谭云亮　刘传孝　赵同彬　著

岩石非线性动力学初论

煤炭工业出版社

国家自然科学基金项目（50804005、50674063）资助
国家自然科学基金重点项目（50534080）资助
教育部“矿山灾害预防控制重点实验室”基金资助
山东省“泰山学者”建设工程专项经费资助

岩石非线性动力学初论

谭云亮　刘传孝　赵同彬　著

Elementary Theory for Rock Nonlinear Dynamics

Tan Yunliang　Liu Chuanxiao　Zhao Tongbin

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

本书是岩石力学新的研究领域岩石非线性动力学方面的一本专著，是作者十几年来科学研究成果的结晶。本书对非线性岩石力学研究现状和发展趋势做了介绍，重点阐述了岩石动力学系统的混沌特征及其描述方法；岩石裂隙分布分形特征和基于时间序列的关联分维预报岩石动力学行为的方法；岩石力学中的突变描述方法；岩石力学中自组织行为及其临界现象；岩石破坏演化模拟的物理元胞自动机 PCA 理论的原理、算法及非均质岩石破坏演化、流变、瓦斯渗流等；非线性人工神经网络在岩石力学中的应用；基于遗传算法非线性反演识别岩石力学参数的方法。

本书可供矿业、水电、冶金、土木、石油等领域岩石力学方面的专家、学者、工程技术人员以及大学生参考使用，也可作为相关研究方向研究生的课程教材。

Summary

Rock nonlinear dynamics is becoming a new branch of rock mechanics and engineering, it is necessary to pay more attention to open out the nonlinear mechanism of rock failure and to establish some effective research methods. This book is the summings – up of authors' recent ten years researching jobs on rock nonlinear dynamics, it is composed of nine chapters. The research status quo and prospect for rock nonlinear dynamics as well as complexity of rock mechanics are introduced in chapter 1 and chapter 2. Chaotic features in rock nonlinear dynamics system and describing methods are introduced in chapter 3. Fractal characteristics of rock fissure distribution as well as correlative fractal dimension predicating method for rock dynamical behavior based on the time series are introduced in chapter 4. Catastrophe describing methods for rock mechanics are brought forward in chapter 5. Self – organization behaviors and critical phenomena are discussed in chapter 6. The rationale and arithmetic of physical cellular automaton i. e. PCA, the simulation achievements for inhomogeneous rock failure evolution, rheological features as well as gas seepage are introduced in chapter 7. The achievements for applying nonlinear neural network into rock mechanics are presented in chapter 8. A new kind of back analysis method based on inherit arithmetic for identifying parameters of rock mechanics is put up in chapter 9.

This book can be referred by the scientists, technicians, teachers and students in college majoring in mining engineering, mechanical engineering, hydroelectric engineering, metallurgical engineering, traffic, civil engineering, etc. It can also be used for the graduate students' teaching material.

前　言

岩石是自然界的产物，是世界上最为复杂的材料之一。从组成上讲，岩石是由多种矿物晶粒、孔隙和胶结物组成。从结构上讲，经过亿万年的地质演变和复杂的构造运动，岩石是极为复杂的非连续、非均质体，具有很强的各向异性、流变性和非线性。特别是岩石的非线性，成为近些年来专家们关注的焦点。如何有效揭示岩石的非线性特征，既是研究岩石非线性动力学的瓶颈，又是当前国内外关注的前沿课题。本书采用混沌、分形、自组织、突变及人工神经网络等非线性动力学方法，研究复杂的岩石力学问题。

本书共分为9章，第1，2，4，5，6，7，8章由谭云亮撰写，第3章由刘传孝撰写，第9章由赵同彬撰写。其中：第1章为绪论，就非线性岩石力学研究现状和展望做了介绍；第2章从岩石的介质性质、应力环境、解析描述方法和数值计算四个方面进行了讨论，为采用非线性方法研究岩石力学问题提供了支持；第3章就岩石动力学系统的混沌特征及其描述方法进行介绍；第4章重点介绍了岩石裂隙分布分形特征和基于时间序列的关联分维预报岩石力学动力学行为的方法；第5章介绍了岩石力学中的突变描述方法；第6章介绍了岩石力学中自组织行为及其临界现象；第7章介绍了岩石破坏演化模拟的物理元胞自动机PCA理论的原理、算法及非均质岩石破坏演化、流变等方面的成果；第8章介绍了基于人工神经网络非线性动力学特征研究岩石力学非线性行为的方法；第9章介绍了遗传算法非线性反演岩石力学参数的方法。本书每一章节，尽量有相应的实验或岩石力学工程中的实例，使得读者对本书所介绍的研究方法更易于把握，每章后还列有参考文献，以便读者查阅。

周辉、马志涛、颜伟、赵志刚、马洪岭、滕桂荣、高明等同志参加了本书的研究工作；岩石力学专家王泳嘉教授及肖亚勋、张玉明、孙伟芳等同志在本书撰写过程中给予了大力帮助；国内外许多学者的相关研究成果为本书所引用，使得本书能够比较系统地呈现在读者的面前；国家自然科学基金项目（50804005、50674063）和国家自然科学基金重点项目（50534080）、教育部“矿山灾害预防控制重点实验室”基金、山东省“泰山学者”建设工程专项经费及山东省自然科学基金的资助使本书得以出版，在此一并表示衷心感谢。

本书是我们课题组十多年来研究工作的总结，我们深知该研究工作还很

肤浅，还不成熟，尚有一些问题需进一步商榷和深化研究，因此将书名定为“岩石非线性动力学初论”。但愿本书的出版能够起到“抛砖引玉”的作用，引起岩石力学界同行的关注，并对不当之处予以斧正，以便帮助我们为岩石力学与工程的发展作出更大的贡献。

谭云亮

2007 年夏于青岛

目　　录

1　绪论 …… 1

1.1　岩石力学研究的主要任务 …… 1
1.2　岩石非线性动力学问题 …… 2
1.3　岩石非线性动力学研究展望 …… 5
参考文献 …… 5

2　岩石力学的复杂性 …… 8

2.1　岩石介质性质的复杂性 …… 8
2.2　岩石应力环境的复杂性 …… 42
2.3　岩体力学本构模型的复杂性 …… 49
2.4　岩石力学数值计算的复杂性 …… 58
参考文献 …… 59

3　岩石力学中的混沌性 …… 63

3.1　混沌及其描述方法 …… 63
3.2　坚硬岩层运动过程中的混沌性 …… 78
3.3　节理岩体系统的混沌特征 …… 97
3.4　软岩混沌性 …… 113
参考文献 …… 117

4　岩石力学中的分形特征 …… 120

4.1　引言 …… 120
4.2　分形基本概念及意义 …… 120
4.3　不同尺度岩石裂纹分布盒维数分析 …… 126
4.4　岩石断裂和破碎的分形特征 …… 133
4.5　时间序列分数维计算的若干问题 …… 138
4.6　煤矿顶板失稳垮落分形特征 …… 153
4.7　岩体节理间距分布的分形模型 …… 157
注记 1　B. B. Mandelbort 生平 …… 161
注记 2　Fractal 一词的来历 …… 162
注记 3　分形所涉及的主要研究领域 …… 162
注记 4　分形的哲学意义 …… 164

参考文献 …… 166

5 岩石力学的突变问题 …… 168

5.1 突变基本理论 …… 168
5.2 煤巷掘进迎头煤与瓦斯突出的突变模型 …… 174
5.3 洞壁层裂屈曲岩爆突变模型 …… 178
5.4 煤柱失稳灾变分析 …… 182
5.5 矿震胞映射－灰色光点突变预测模型 …… 188
参考文献 …… 193

6 岩石力学自组织 …… 195

6.1 自组织基本含义及其特征 …… 195
6.2 散体岩石的自组织性 …… 199
6.3 不同尺度岩体破坏演化的自组织性 …… 217
6.4 岩石力学的逾渗问题 …… 234
参考文献 …… 252

7 岩石破坏演化物理元胞自动机(PCA)理论 …… 255

7.1 元胞自动机基本理论 …… 255
7.2 岩石破坏演化的 PCA 基本模型 …… 265
7.3 细观非均质岩石破坏演化的 PCA 模拟 …… 272
7.4 非均质岩石破坏演化的自组织临界性 PCA 模拟 …… 280
7.5 岩石流变行为的 PCA 模拟 …… 287
7.6 基于遗传算法的物理元胞演化力学模型 …… 294
7.7 裂隙煤体中瓦斯运移规律的 LB 元胞自动机模拟 …… 296
7.8 基于 PCA 算法的有限差分法初步 …… 303
参考文献 …… 307

8 岩石力学的神经网络非线性分析方法 …… 310

8.1 神经网络的非线性特征 …… 310
8.2 岩石本构关系的径向基函数神经网络快速逼近模型 …… 313
8.3 分级加载下岩石流变的神经网络模型 …… 318
8.4 冲击地压 AE 时间序列小波神经网络预测模型 …… 321
8.5 巷道分类指标的神经网络聚类分析模型 …… 324
8.6 巷道稳定性类别的神经网络识别方法 …… 328
8.7 初始地应力场人工神经网络识别方法 …… 331
8.8 弹塑性有限元的神经网络计算方法 …… 336
参考文献 …… 339

9 遗传算法在岩石力学中的应用 …… 342
9.1 遗传算法概述 …… 342
9.2 基于GA的岩石力学参数反演 …… 353
9.3 岩石边坡稳定性的遗传算法分析 …… 362
9.4 挡土墙库仑土压力的遗传算法求解分析 …… 369
参考文献 …… 373

1 绪　　论

1.1 岩石力学研究的主要任务

岩石力学是在具有专门的应用对象和需求条件下发展起来的应用力学学科之一。其应用目标始终是推动岩石力学发展的重要驱动力，而数理科学的进步则是引导岩石力学研究的牵动力。两者的结合构成岩石力学与工程学科发展的动力机制[1]。岩石力学是研究在各种不同的物理环境下岩体力学行为的一门学科，是一切岩石工程设计与施工的理论基础，有很强的应用背景。岩体的几何形态及力学性质复杂，具有非均质性、各向异性、流变性和不连续性等特征。因此，岩石力学又是一门理论研究难度很大的学科。岩石力学探讨岩石在其周围物理和工程环境中变形、强度和破坏的力学性质和力学效应，岩石力学研究的本质就是服务国民经济建设，它的工程应用涉及采矿、交通、水电、石油、工民建、地震、国防工程和核废料处理等岩土工程领域。随着科学技术的进步，21 世纪岩石力学研究的主要任务，必须是从小尺度裂隙岩体问题的解决转向复杂的、大范围的地体系统问题的研究和解决。研究对象的多种因素相互作用，极大地增强了问题的不确定性和非线性。岩石力学中的耦合问题和系统分析变成了不可回避的研究任务[1]。当今岩石力学研究的主要任务为：

（1）加强尺度化研究。岩石力学研究必须从小尺度试块研究向着大尺度岩体研究转化，以如何解决大范围、大尺度的地下或地面工程以及资源开发问题为己任。力学上均一体的尺寸效应进化为大尺度和多尺度问题，因此不可避免地将面临多尺度模型及其耦合。非线性分形理论的应用为这方面研究提供了初步的科学方法。

（2）加强多介质耦合岩石非线性本构理论研究。岩体从本质上讲是包括固、气、液多相介质体，对其本构关系的研究应当包括非线性体积变化、非关联塑性与黏性流动、应变软化、各向异性、拉压异性、主应力旋转影响、加卸载路径依赖性和围压效应等。由微裂纹成核、扩展以及宏观裂纹的出现而导致的破坏与失稳全过程的非线性本构描述，局部化理论及高应变梯度等本构理论都是重要的研究方面。同时，应在细观流变力学研究和宏观流变试验基础上，建立流变理论模型；发展非连续岩体力学、非均匀岩体力学，建立起具有节理特征的岩体本构关系，其内容包括节理岩体的地质描述、节理面力学性质研究等。

（3）强化多种营力场研究。随着岩石力学问题的拓展，热、流、固、化多场并存时其相互作用与耦合机制有待深入研究和突破，包括考虑固体矿物颗粒、水和气三相相互作用，岩石孔（裂）隙网络几何形状和裂隙表面粗糙度对渗流的影响，固流两相介质应力－

变形和流动耦合分析，煤与岩体应力－气（液）渗流耦合分析，岩体中应力－热－气（液）体流动及化学材料渗流耦合分析等。同时静载和动载的复合影响也需要深入探讨。

（4）加强岩石灾变力学行为分析与预报研究。岩石力学从工程岩体稳定性研究向极端灾害的非线性动力过程的预测及防治进军。高烈度地震，巨型山崩、滑坡、泥石流，大型矿山的塌陷等从孕育、形成、发展到成灾的非线系统动力学过程和时空预测将是重大的研究课题。

（5）加强岩石的大变形研究。大变形力学在岩石工程中的应用始于20世纪70年代，主要是苏联力学家在进行应用。在小变形理论中，稳定问题由于引用小变形假设而消失了，要研究失稳问题必须采用大变形理论，这是岩石力学所必须面对的。

（6）加强反演分析研究。长期以来，制约着岩石力学学科发展的主要原因之一就是“二不易确定”[2]：工程岩体所受的作用力不易确定，反映岩石物性的数学力学模型不易确定和岩体力学参数不易确定。通过强化反演分析研究，从应力分布、物性方程到力学参数得到比较符合实际的结果，是值得重视的。

（7）注重分形、混沌、灾变和自组织理论在岩石力学中的应用，加强交叉学科研究。其研究包括岩石工程失稳过程的分岔和混沌特征、岩石灾变可预报性及其预报尺度、岩石灾变演化及其非线性预报力学模型等，以便形成一个崭新的岩石力学分支。

1.2 岩石非线性动力学问题

1.2.1 以混沌为主体非线性动力学发展综述

长期以来，人们在线性关系的基础上解决了许多科学技术的重大问题，如弹性振动、电磁波传播等，促进了技术的迅速发展。但是，科学的发展越来越显示出世界在本质上是非线性的，正像直线是曲线的特殊情况一样，线性关系是非线性的特殊或简单形式。20世纪60年代以后，非线性科学的发展如雨后春笋般地不断涌现，已取得了令人瞩目的成就，有人称之为20世纪内继量子力学、相对论两大发现后的第三次革命。

20世纪60年代，普利高津[3,4]的自组织与耗散结构、Haken的协同论[5]、Thom的灾变理论、Mandlebort[16]的分形几何理论相继诞生，尤其是在1963年，美国气象学家Lorenz[6]在分析天气预报模型时，得出气象不可预测结论，并发现了混沌。从此以后，研究进展很快；1971年Ruelle和Takens[7]提出奇怪吸引子（Strange Attractor）的名词；1975年Li和York开始提出混沌名词[8]；1976年May[9]研究了一维平方映射；在这个基础上Feigenbaum[10]于1978年发现了倍周期分岔通向混沌的两个普适常数，并引入重整化群思想，这是一个重大发现，具有里程碑意义。在这方面作出卓越贡献的还有Arnold[11]、Smale[12]、Melnjkov[13]、Kolmogorov[14]、Moser[15]等学者。但总的来说，20世纪80年代以前，人们对混沌的研究主要集中在计算机实验（如Lorenz系统、Logistic系统、强迫的Brusselor系统）和物理实验（如Duffing振动、浅水波的强迫振动）上，而所借助的分析数学工具主要是分岔理论和突变理论。

在我国，郝柏林院士[17]等率先对分岔、混沌、奇怪吸引子之间的关系进行系统研究。

郑伟谋、郝柏林等[18]创立了实用符号动力学方法来研究混沌性态；郑祖先、刘式达[19]对大气湍流发生的问题进行了探讨；朱照宣[20]（1990）注意到非线性动力学混沌现象，并提出时间序列分析模式可以视为“时间序列 = 混沌 + 涨落”形式。Grassberger 等[26]（1984）提出了从波动时间序列中提取奇怪吸引子分数维熵的方法。J. D. Farmer[22]（1987）研究了如何预测混沌时间序列问题，这在混沌判定与预测方面具有重要的意义。

近年来，国内外许多学者在气象[23-25]、生物[21]、地震[29-32]等领域，开展了卓有成效的非线性预报研究，取得了可喜的成果。值得一提的是，Stephen Wolfram[33]提出的细胞自动机在地震活动等非线性力学自组织研究中已开始得到应用，如 Bak 和 Tang[34]、Ito 和 Matsuzaki[35]、郑捷[36]等用细胞自动机模型研究了地震活动自组织临界现象，曹鸿兴[37]将自组织临界状态应用于大气旋涡分析中。正像 Per Bak，Kan Chen[28]所指出的那样，大的相互作用系统自然地朝着一种临界状态进化，在这种状态下，小事件能够导致大灾难。这和 Haken 的协同论、Prigogine 的自组织虽然在方法上不同，但研究的目的是一致的。同时也看到，自组织的临界状态将预示着混沌状态的出现。

应当指出，Haken 的协同论由于强调系统之间的协作性及因素间的主次关系而导致自组织演化，钱学森称协同学为真正的系统学。

与混沌密切相关的 Mandlebort[16]创立的分形几何理论在非线性学科中产生了巨大影响，其重要意义之一在于用来描述分形特征量化指标的分数维恰好是量度系统混沌性的重要指标。

对于著名的 Logistic 映射有

$$x_{n+1} = \mu x_n - \mu x_n^2 \tag{1-1}$$

当 $\mu = 3.57 \sim 4$ 时，是混沌区，其两个显著特征是具有周期窗口和自相似结构，而这种自相似恰恰是分形几何中两个重要特征（无尺度性和自相似性）之一。正因为如此，混沌性和分形性似乎相互耦合在了一起，而分数维便显示出了其巨大作用，它不仅用于描述分形特征，而且用于量度混沌（正的分数维往往对应着混沌运动）。Packara[38]（1980）提出用时间序列重新构造吸引子的相空间图像方法。Takens[39]（1981）提出嵌入理论，表明只要相空间的维数足够大，就可以刻划 D_0 维的混沌吸引子。刘式达[27]讨论过吸引子的分数维特征，安镇文[40]、陈子林[41]研究了缠震系统前兆场的分数维及混沌吸引子特征。

总的来看，混沌现象是非线性学科研究的中心课题之一，与之密切关联的内容有分形分岔力学、突变论、自组织和耗散结构、协同学、随机非线性微分方程。在研究方法上有拓扑学方法（如康托集合）、分数维方法、扭结理论（奇怪吸引子方法），有马尔尼科法等数学解析方法，有功率谱分析、映射、细胞自动机等数值方法，还有对实测时间序列进行统计意义上的分析（提取 Lyapunov 指数、分数维、信息熵等）及反演动力学模型方法等。

以混沌为中心的非线性动力学研究成为世界性的热点之一，已越来越受到世界的广泛关注。日本《触发器》月刊曾刊登题为“混沌论与相对论、量子力学并为 20 世纪三大发现”的文章。1990 年 5 月在美国 Los Alamos 召开了具有重要意义的非线性科学未来 10 年展望国际学术讨论会。自 1983 年 11 月中国力学学会召开“分叉、突变和混沌力学”学

术交流大会以来，我国对非线性学科的研究方兴未艾，人们对混沌等非线性动力学现象的认识日趋深刻。钱学森指出：在一个层次的混沌是紧接上一个层次的有序基础，所以没有混沌就死水一潭，不会出现有结构的有序化，也就没有“生命”。连一块石头都有原子、电子层次的混沌，石头有晶体结构，这是有序；但这个结构是“活”的，原子、电子进进出出都是混沌！

1.2.2 岩石非线性动力学研究进展

唐春安、徐小荷[42-44]率先注意到能够解释不连续、突变现象的灾变论，并将其应用到岩石破坏过程的描述上来，提出了岩石破裂过程的灾变模型。

谢和平、陈至达[45-47]对岩石断口的不规则性进行统计意义上的分形分析，建立了穿晶以及沿晶界和穿晶耦合的微观断裂 fractal 模型及裂纹分叉的分形模型，描述了岩石微孔隙受压作用后演化过程的分形特征。但上述分形的研究成果主要集中在岩石介质结构特性分形描述上。谭云亮等[48]（1994）率先对煤矿顶板运动过程中声发射分形特征进行了讨论；谭云亮、王泳嘉[49]（1995）对顶板运动过程中声发射、顶板下沉速度等指标进行统计意义上的关联维数分析，详细讨论了用分数预报顶板来压、垮落的可能性，并初步提出了相应的预报方法，将分形方法从理论、实验探讨和描述向工程应用方面推进了可喜的一步。

Huang 和 Turcotte[51]（1990）曾研究过空间不对称的双滑块模型，发现了典型的混沌现象。田野等[52]（1994）用滑坡岩体蠕变位移观测数据计算李雅普诺夫指数，这对于进一步认识岩体蠕变运动混沌现象有一定的理论和实用意义。谭云亮等[53]（1997）对坚硬顶板运动过程中声发射时间序列 Lyapunov 指数进行计算分析表明，顶板运动经历了由周期运动、准周期运动与混沌运动的过程，这对通过实测信息来认知岩层运动的非线性动力学机制，具有重要意义。尹光志等[54]（2000）采用分叉和混沌理论对岩石细观断裂过程及微裂纹演化中的分叉与混沌特征进行一些探索性的研究。周辉[55]（2000）对矿震孕育过程的混沌性及非线性预测理论进行了研究。李泽农等[56]（2000）对软岩巷道运动规律的混沌动力学方法进行了研究，并对巷道运动的短期演化进行了模拟，建立了预报方程。秦四清[57]（2000）根据建立的斜坡演化非线性动力学模型，发现当斜坡本身的非线性作用与外部环境因素的作用能力相当时，斜坡演化过程会出现混沌现象，其通向混沌之路是通过倍周期分叉实现的。宋维源等[58]（2001）根据混沌学理论，研究了冲击地压发生的混沌特性，提出了在一定的时间尺度内预测预报冲击地压发生的方法。韩非[59]（2001）对矿井涌水量中的混沌及其最大预报时间尺度进行了分析。王连国等[60]（2002）对承压水上开采煤层底板变形破坏过程中岩移、注水量（渗透性）等矿压显现的时序，进行 Lyapunov 指数的提取，并对其混沌性态进行了研究，实例分析表明：煤层底板变形破坏过程中呈现出典型的混沌性态，另外，煤层底板渗透性指标的 Lyapunov 指数比岩移量指标大得多，表明用渗透性指标描述煤层底板变形破坏特征要比岩移量指标更敏感。刘华明等[61]（2003）根据滑坡位移时间序列的非线性性质，应用混沌时间序列预测方法，建立滑坡预测的非线性混沌模型，从而为滑坡位移提供了一种新的预测方法。蒋斌松[62]（2005）讨论深部岩体变形行为及其围岩稳定性分析中应用混沌方法，并给出了最大 Lya-

punov 特征指数的计算步骤，并给出了岩体位移时序的线性和非线性两种混沌预报模式；据此，建立了岩体工程位移观测数据的混沌预测方法。

1.3 岩石非线性动力学研究展望

透过岩石复杂性现象，岩石非线性动力学可望在以下几个方面有所突破：

（1）充分利用分形自相似特点，从岩石细观结构及演化过渡到宏观裂纹结构及演化、解决岩体节理裂隙的尺度性问题，并为最终建立尺度岩石力学奠定基础。

（2）深入研究其自组织临界状态及力学行为，特别是研究其自组织演化过程中的主宰系统演化的变量及特性，对于把握岩体破坏内在非线性机制具有十分重要的意义。

（3）对不同结构和建造的岩体而言，研究用有效数值方法来模拟研究围岩破坏及运动过程中混沌特征、影响因素，乃是实现对混沌有效控制，使得岩体系统破坏演化向着有序化转化，实现用岩体破坏及运动非线性动力学行为进行可靠预测的重要途径。

（4）开展对各类岩石破坏及运动非线性动力学行为的可预报性及预报尺度研究，并研究如何选取描述岩石破坏及运动演化过程的变量类型及变量数目的准则，最终建立起岩体破坏及运动的非线性动力学反演预测模型。

（5）从能量角度出发，研究岩石破裂演化的物理元胞自动机（PCA）方法、岩体渗流的格子气模型和裂隙逾渗模型。

（6）建立岩爆、煤与瓦斯突出的分岔、突变模型及其判据。

（7）充分利用神经网络的非线性动力学机制，进行岩石力学的仿真与计算[63]。

参 考 文 献

[1] 王思敬．岩石力学与工程的新世纪［C］//中国岩石力学与工程学会第七次学术大会论文集．北京：科学技术出版社，2002：1－3.

[2] 李铁汉．岩体力学的学科属性及发展战略［J］．岩石力学与工程学报，1993，12（3）：286－289.

[3] 普利高津．非平衡系统的自组织［M］．徐锡申，等译．北京：科学出版社，1986.

[4] 普利高津．探索复杂性［M］．成都：四川教育出版社，1986.

[5] Haken H. Advanced synergetics［M］. Springer Verlag, Berjin Hejdelberg, New York, 1983.

[6] Lorenz E N. Deterministic no periodic flow［J］. J Atoms Sci, 1963, 20: 130－192.

[7] Ruelle D. Takens F. On the nature of turbulence［J］. Commun. Math. Phys. 1971, 20: 167－192.

[8] Li T Y, York J A. Period three implies chaos［J］. Am Math Monthly, 1975.

[9] May R M. Simple Mathematical models with very complicated dynamics［J］. Nature, 1976, 261: 459－467.

[10] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of non－linear transformations［J］. J Stat Phys. 1978, 19: 25－52.

[11] Arnold V I, Smale I. *Mappings of the circumferences onto itself*［J］. *Amer Math Soc Transl*, 1965, 2 (46): 213－284.

[12] Smale S. Different morphisms with many period points［M］. S S Cairns: Princeton University

Press. 1963.

[13] Melnjkov V K. On the stability of the center for time periodic perturbations [J] . Trans. Moscow Math. Soc, 1963, 12: 1 - 57.

[14] Kolmogorov A N. Periodic movements with small change in the Hamilton function [J] . Akad Navk SSSR Doklady, 1954.

[15] Moser J. Stable and random motions in dynamical systems [J] . Princeton University Press, 1973.

[16] Mandlebort B B . The fractal geometry of nature [J] . San Francisco, 1983.

[17] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他 [J] . 物理学进展, 1983, 3 (5): 25 - 32.

[18] 郑伟谋, 郝柏林, 符号动力学 [J] . 物理学进展, 1990, 10 (2): 316.

[19] 郑祖先, 刘式达. 对大气湍流发生问题的探讨 [J] . 中国科学, 1987, 17 (6): 669.

[20] 朱照宣. 关于时间序列分析 [J] . 力学与实践, 1989, 4 (1): 22 - 27.

[21] 吴祥宝. 混沌时间序列的非线性预测及其在研究人脑功能中的应用. 中国科学院研究生院学报, 1993: 198 - 194.

[22] Farmer J D. Predicating a chaotic time series [J] . Phy Rev Lett, 1987, 59 (8): 845.

[23] 林振山. 当代气候的时间序列分析和模式特征 [J] . 北京大学学报, 1991, 27 (3): 358 - 364.

[24] 林振山. 长期预报的相空间距平符号预报法 [J] . 应用气象学报, 1991, 14 (4): 440 - 446.

[25] Fraedrich K. Estimating weather and climate predictability on tractor [J] . J Atoms Sci, 1989, 44: 7.

[26] Grassberger P, Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractor from a fluctuating dynamics approach [J] . Phys Rev D, 1984, 13 (341) .

[27] 刘式达. 地球系统模拟和混沌时间 [J] . 地球物理学报, 1990, 33 (2): 144 - 153.

[28] Per Bak, Kan Chen. 自组织的临界状态 [J] . 科学, 1991 (5): 8 - 16.

[29] 安镇文, 王琳英, 朱传镇. 大震前后地震活动的时空分维特征 [J] . 地震学报, 1989, 11 (3): 251 - 258.

[30] 安镇文, 王琳英, 姚栋华, 等. 大震孕育过程中的混沌特征 [J] . 地震学报, 1992, 14 (4): 393 - 399.

[31] 白超英, 朱令人, 王海涛, 等. 地震活动信息熵及时空维在地震预报中的意义 [J] . 地震, 1992, 1 (4): 7 - 10.

[32] 胡平, 杨培才, 李卫. 地震过程动力行为和预报性问题的研究 [J] . 地球物理学报, 1990, 33 (6): 647 - 656.

[33] Stephen Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata [J] . Rev. of Modern phys, 1983, 55 (3): 601 - 643.

[34] Bak P, Tang C. Earthquakes as a self - organized critical phenomenon [J] . J G R, 1994 (B11): 635 - 637.

[35] Ito K, Matsuzaki M. Earthquakes as self - organized critical phenomenon [J] . J G R, 1995(5):6853 - 6860.

[36] 郑捷, 李兴才. 具有滑动弱化模式本构关系的断层滑动细胞自动机模型 [J] . 中国地球物理学会会刊. 北京: 地震出版社, 1992.

[37] 曾鸿兴, 等. 大气大型涡流的自组织界态. 分形理论及应用 [M] . 合肥: 中国科技大学出版社, 1993.

[38] Packara N H. Geometry from a time series [J] . Phys Rev Lett, 1980, 45: 712.

[39] Takens F. Detecting strange attractor in turbulence [J] . Lecture Notes in Math, 1983, 23: 151 - 157.

[40] 安镇文．分形与混沌理论在地震学中的应用与探讨．分形理论及应用［M］．合肥：中国科技大学出版社，1993.

[41] 陈子林，周硕愚．蠕震系统前兆的混沌吸引子及其分维［J］．地震学报，1993，15（4）：463－470.

[42] 唐春安，徐小荷．岩石破裂过程失稳尖点灾变模型［J］．岩石力学与工程学报，1990，9（2）：100－107.

[43] 唐春安．岩石破裂过程中的灾变［M］．北京：煤炭工业出版社，1993.

[44] Chunan Tang，John A，Hudson，et · al. Rock failure instability and related aspects of earthquake mechanics［M］. China Coal Industry Publishing House，1993.

[45] 谢和平，陈至达．分形（fractal）几何与岩石断裂［J］．力学学报．1998，20（3）：264－271.

[46] 谢和平，陈至达．岩石类材料裂纹分叉非规则性几何分形效应［J］．力学学报，1989，12（5）：613－619.

[47] 谢和平．岩石力学中的分形［M］．荷兰：balkema 出版社，1993.

[48] 谭云亮，石永奎．煤矿顶板活动过程中声发射前兆分析［J］．东北大学学报，1994（S）．

[49] 谭云亮，王泳嘉．煤矿顶板冒落分形预报方法［J］．中国安全科学技术学报，1995，25（32）：121－125.

[50] 谭云亮，杨永杰．煤矿顶板冒落分形预报可行性［J］．岩石力学与工程学报，1996，15(1)：90－95

[51] Huang J，Turcotte D L. Are earthquake and example of deterministic chaos? Geophys Res Lett，1990，17（3）：223－226.

[52] 田野，徐平．用岩体蠕变数据计算 Lyapunov 指数［J］．长江科学院院报，1994，11（2）：49－66.

[53] 谭云亮，宋扬．顶板运动过程中混沌性分析［J］．矿山压力与顶板管理，1997，4（3）：227－229.

[54] 尹光志，鲜学福，等．岩石细观断裂过程的分叉与混沌特征［J］．重庆大学学报（自然科学版），2000，23（2）：56－59.

[55] 周辉．矿震孕育过程的混沌性及非线性预测理论研究［J］．岩石力学与工程学报，2000，19（6）：813.

[56] 李泽农，王圣公．软岩巷道运动规律的混沌动力学方法研究［J］．煤炭学报，2000，25（增刊）：107－111.

[57] 秦四清．斜坡失稳的突变模型与混沌机制［J］．岩石力学与工程学报，2000，19（4）：486－492.

[58] 宋维源，潘一山，等．冲击地压的混沌学模型及预测预报［J］．煤炭学报，2001，26（1）：26－30.

[59] 韩非．矿井涌水量中的混沌及其最大预报时间尺度［J］．煤炭学报，2001，26（5）：520－524.

[60] 王连国，宋扬，等．底板岩层变形破坏过程中混沌性态的 Lyapunov 指数描述研究［J］．岩土工程学报，2002，24（3）：356－359.

[61] 刘华明，齐欢，等．滑坡预测的非线性混沌模型［J］．岩石力学与工程学报，2003，22（3）：434－437.

[62] 蒋斌松，韩立军，贺永年．深部岩体变形的混沌预测方法［J］．岩石力学与工程学报，2005，24（16）：2934－2940.

[63] 冯夏庭．智能岩石力学的发展［J］．中国科学院院刊，2002，6（4）：256－259.

2 岩石力学的复杂性

2.1 岩石介质性质的复杂性

2.1.1 岩石材料的类型及其形成

1. 岩石的定义

陈颙[1]将岩石进行了如下定义：岩石是一种或几种造岩矿物按一定方式结合而成的矿物的天然集合体。岩石是在地球发展到一定阶段时，经历各种地质作用形成的坚硬产物，它是构成地壳和地幔的重要物质。由于岩石具有自己特定的密度、孔隙度、抗压强度等许多物理性质（表2-1），因此岩石虽由矿物组成，但其所表现出来的特性，却常常不能用一种或几种矿物的特性加以替代或描述。换言之，岩石像其他材料一样服从同样的力学定律，但其在形态上有很大差异。

2. 岩石的类型及其成岩过程

1）岩浆岩

岩浆岩是岩浆冷凝而形成的岩石。绝大多数岩浆岩是由结晶矿物所组成，是组成地壳的主要岩石元素。构成岩浆岩的元素主要有氧、硅、铝、钙、钠、钾、镁等。其中二氧化硅在岩浆岩中的比例最大，在各种不同的岩浆岩中占35%～78%。在岩浆岩中，二氧化硅被称为酸性成分，铁、镁、钙被称为基性成分，钠、钾被称为碱性成分。一般而言，将二氧化硅含量大于65%的岩浆岩称为酸性岩，如花岗岩、流纹岩；将二氧化硅含量为52%～65%的岩浆岩称为中性岩，如安山岩、闪长石等；将二氧化硅含量小于52%的岩浆岩称为碱性岩，如玄武岩、辉长石等。

岩浆岩的形成过程称为火成过程，即地壳深部的岩浆在地下或喷出地表发生结晶或固化作用。如果岩浆在地下活动，冷凝固化后可以形成侵入岩；如果岩浆由火山活动喷发到地表后才冷凝固化，则形成喷出岩。

2）沉积岩

沉积岩是由母岩（岩浆岩、变质岩和早期形成的沉积岩）在地表经风化、剥蚀、搬运、沉积和硬结作用而形成的岩石。上述过程，称为沉积过程。沉积岩的主要物质成分为颗粒和胶结物。颗粒包括各种不同形状和大小的岩屑及某些矿物。胶结物常见的成分有钙质、硅质、铁质及泥质等。一般而言，硅质、钙质胶结的沉积岩强度较大，泥质胶结的沉积岩强度较小。另外，由于受沉积环境的影响，沉积岩具有层理构造，这就使得沉积岩沿着不同方向表现出不同的力学性能。

尽管岩浆岩占据了地壳总体积的95%之多[2]，但地壳表层分布最广的是沉积岩。沉

积岩覆盖了大陆面积的75%（平均厚度2km）和几乎全部的海洋地壳（平均厚度2km）。由于沉积岩的沉积过程与岩浆岩的成岩过程有着明显的不同，因而在内部微结构上二者有着明显的差异。一般而言，岩浆岩多为晶粒结构，而且在成岩时各种矿物彼此紧密接触，很少有孔隙；沉积岩是由松散的沉积物固结而成的，而且经过压实、胶结再次硬化，中间有很大的孔隙，往往具有层状结构。沉积岩的种类很多，但考虑到矿物颗粒大小及成分等因素，可以将其分为砂岩、页岩和石灰岩[1]三类。

表2-1 常见岩石的某些物理性质

岩石类型		密度/（g·cm^{-3}）	孔隙度/%	抗压强度/MPa	抗拉强度/MPa
岩浆岩	花岗岩	2.6～2.7	1	200～300	4～7
	闪长岩	2.7～2.9	0.5	230～270	
	玄武岩	2.7～2.8	1	150～200	
沉积岩	砂　岩	2.1～2.5	5～30	35～100	1～2
	页　岩	1.9～2.4	7～25	35～70	
	石灰岩	2.2～2.4	2～20	15～140	
变质岩	大理岩	2.5～2.8	0.5～2	70～200	4～7
	石英岩	2.5～2.6	1～2	100～270	
	板　岩	2.6～2.8	0.5～5	100～200	

砂岩包含的矿物颗粒的大小范围为1/16～2mm。这些颗粒大多来源于风化等作用后的岩浆岩碎片，还有一部分来源于已经存在的砂岩风化物，其主要矿物是石英、长石和钾长石。在沉积岩总量中，砂岩约占50%，如图2-1所示。

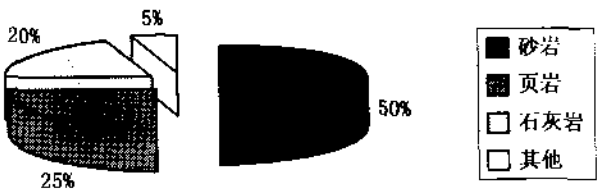


图2-1 沉积岩组成比例图

页岩是由直径大小不足1/16mm的细颗粒组成。页岩以黏土矿物为主要造岩矿物，也包括许多细粒的石英、长石等矿物。这些颗粒细密，渗透性差。页岩在沉积岩总量中，约占25%。

石灰岩以方解石和白云石为主要造岩矿物，它占沉积岩总量的20%左右。

3）变质岩

变质岩是岩浆岩、沉积岩甚至是变质岩等现存的岩石在地壳中受到高温、高压及化学活动性流体的影响发生变质而形成的岩石。它在矿物成分、结构构造上具有变质过程中所

产生的特征，也常常残留原岩的某些特点。由于其成岩作用是在高温下和各种物理化学作用下进行，且这些变化可以在低于硅的熔化温度时发生，因此已经存在的岩石可以始终保持固态。这种过程与低温下的沉积作用和高温下的岩浆作用不同，称之为变质作用。例如，石灰岩通过变质过程形成大理岩，但其固态保持不变。变质岩的成分和结构比岩浆岩、沉积岩要复杂。例如，石灰岩变质形成的大理岩中几乎不含二氧化硅，而石英砂岩变质形成的石英岩中二氧化硅高达90%。大陆和海底都有变质岩存在，在地壳中分布很广，约占大陆面积的18%。

由此可见，岩石组成成分和形成过程十分复杂，这就决定了岩石本身的物理力学性质十分复杂。

2.1.2 岩石材料的非均质性

岩石是一种典型的多孔介质，也就是说岩石是由矿物颗粒和孔隙构成。如图2-2所示，通过扫描电镜显示，岩石在细观层次上其结构十分不均匀，既有孔隙，又有尺度大小不同的矿物颗粒，是一种典型的非均质材料。这种非均质性对岩石的物理力学性质、强度等有着很大影响。

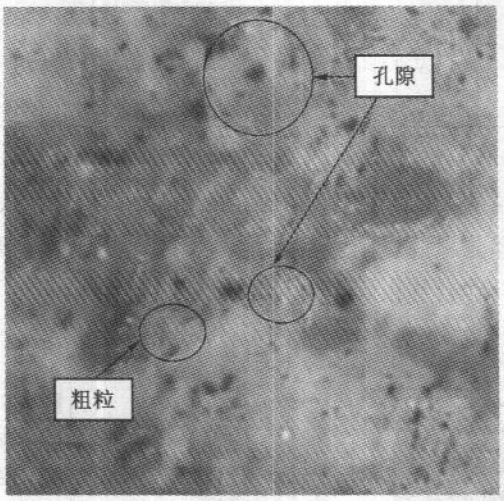


图2-2 砂岩细观电镜扫描图

1. 岩石的孔隙及对力学性质的影响

1）岩石的孔隙及弹性常数

由于大多数岩石都有孔隙存在，为了描述孔隙的多少，将体积为 V 的岩石孔隙体积 V_v 所占的百分比称做孔隙度，用 η 来表示：

$$\eta = \frac{V_v}{V} \tag{2-1}$$

不同的岩石，其孔隙度差别较大。对于火山喷出岩和部分砂岩，其孔隙度达20%；而对大多数结晶岩石，孔隙度仅为0.1%～1%，其余岩石的孔隙度介于这两个数值之间。

岩石孔隙按照形状可以分成空洞（pore）和裂纹（crack）。空洞一般近似球形，而裂纹一般为狭长形。为此，定义空洞裂隙度 η_p 和裂纹孔隙度 η_c 如下：

$$\eta_p = \frac{V_p}{V} \tag{2-2}$$

$$\eta_c = \frac{V_c}{V} \tag{2-3}$$

式中 V_p，V_c——体积为 V 的岩石空洞和裂纹所占体积。

显然有

$$\eta = \eta_p + \eta_c \tag{2-4}$$

孔隙的存在，使得岩石材料复杂性大为增加，因为尽管孔隙所占的比例不大，但对岩石性质影响却相当大。例如，花岗岩中的裂纹仅占岩石总体积的1%左右，但当存在的空洞和裂纹被压实时，岩石的体积模量可以相差5倍之多。表2-2、表2-3分别给出了部分造岩矿物和岩石的一些弹性常数，从表中可以看出，尽管岩石是由矿物组成，但矿物的弹性模量远远高于岩石的弹性模量。

表2-2 部分造岩矿物的弹性常数[1]

矿　物	弹性模量 E/GPa	泊松比 μ
钙蚩石	111.3	0.28
贵榴石	241.8	0.28
磁铁矿	230.3	0.26
黄铁矿	286.8	0.16
磷灰石	114.6	0.26
赤铁矿	209.2	0.14
方解石	68.8	0.31
重晶石	62.8	0.32
黑云母	33.8	0.27
白云母	56.8	0.25
异剥石	141.3	0.21
透灰石	154.4	0.26
钠长石	69.9	0.28

表2-3 部分岩石的弹性常数[3]

岩　石		弹性模量 E/GPa	泊松比 μ
岩浆岩	玄武岩	20～98	0.14～0.25
	辉绿岩	29～88	0.13～0.25
	辉长岩	59～108	0.13～0.25
	花岗岩	26～69	0.13～0.25

表2-3（续）

岩石		弹性模量 E/GPa	泊松比 μ
沉积岩	页岩	7.8～29	0.11～0.54
	砂岩	5.0～80	0.17～0.30
	石灰岩	10～79	0.14～0.30
变质岩	大理岩	59～88	0.25～0.38
	石英岩	26～87	0.11～0.23
	板岩	—	0.06～0.44
	片麻岩	20～59	0.11～0.25

B. B. 勒热夫斯基等[4]曾对不同岩石的弹性模量与孔隙度之间的关系，进行了统计分析，发现有如下规律：

岩浆岩　　$E=8.1\times10^{10}(1-\eta)/(1+3\eta)$　　(2-5)

变质岩　　$E=8.1\times10^{10}(1-\eta)^{0.25}$　　(2-6)

碳酸岩　　$E=8.1\times10^{10}(1-3.2\eta)^{2}$　　(2-7)

对于泊松比 μ 而言，随着孔隙度的增加，泊松比可能增加，也可能减小，当孔隙度 $\eta=7.5\%\sim10\%$ 时，泊松比最小，如图2-3所示。

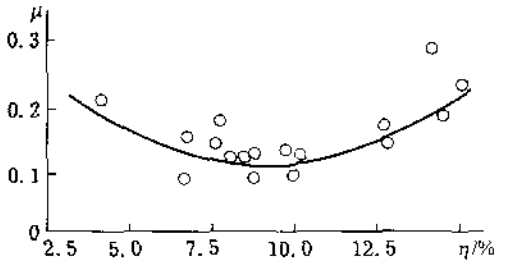


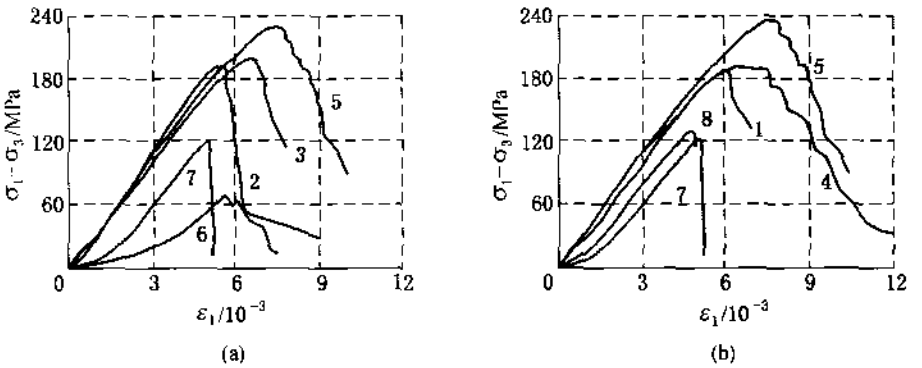
图2-3　石灰岩泊松比与孔隙度 η 的关系曲线[4]

2）孔隙对岩石强度的影响

尤明庆等[5]对河南省义马某矿煤层顶板进行三个试块砂岩的单轴压缩和5次不同围岩的常规压缩试验表明，对具有垂直于轴向的层理面和少量孔隙缺陷的砂岩，其强度表现出了很大的离散性，如图2-4所示，相关试验结果的力学参数见表2-4。

杨永杰等[6]利用MTS815.03电液伺服岩石试验机对砂岩进行了强度试验，结果见表2-5。从表中可以看出，对于同一种砂岩，由于内部的孔隙等缺陷，导致单向抗压强度离散性很大，最大为27.74MPa，最小为15.36MPa，二者相差12.38MPa。

由于孔隙的存在，孔隙水将对岩石的强度产生较大影响。郭中华等[7]对比了试验不同含水条件下的岩石强度，如图2-5所示。从图中可以看出，不同的含水状态对岩石试件的强度特性有很大的影响，含水率越高，强度越低，砂岩与石灰岩受含水状态影响的程度也有很大的差异，前者的软化系数比后者的软化系数大。



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8—试块编号

图 2-4 义马某矿砂岩压缩试验曲线[5]

表 2-4 义马某矿砂岩压缩试验结果

序号	v_p/(m·s^{-1})	v_s/(m·s^{-1})	E_d/GPa	μ_d	σ_3/MPa	E_{av}/GPa	σ_s/MPa
1	4163	2677	43.7	0.15	2.5	35.7	186.3
2	3862	2744	39.5	-0.01	5	38.9	197.0
3	3878	2313	34.9	0.22	10	34.9	209.4
4	3862	2325	35.2	0.22	15	34.3	201.7
5	3862	2277	34.2	0.23	20	35.5	248.5
6	4052	2334	36.4	0.25	0	16.1	68.0
7	3959	2407	37.1	0.21	0	32.1	120.6
8	3828	2519	37.0	0.12	0	33.5	126.5

表 2-5 同种砂岩强度测定结果

编号	高度/mm	纵波速度/(m·s^{-1})	单轴抗压强度/MPa	编号	高度/mm	纵波速度/(m·s^{-1})	单轴抗压强度/MPa
1	84.9	1761	18.22	8	94.5	1905	22.98
2	83.4	1769	15.36	9	94.9	1998	23.32
3	88.7	1794	20.25	10	81.1	2003	24.23
4	82.7	1803	21.67	11	100.0	2007	24.36
5	99.9	1806	21.07	12	93.3	2008	22.09
6	85.1	1821	22.95	13	100.0	2208	26.18
7	88.3	1878	23.76	14	100.2	2210	27.74

为了探讨孔隙分布特征对岩石强度的影响，卫宏等[8]探讨了岩石微观孔隙分数维与岩石抗压强度之间的关系，如图 2-6 所示。由图可见，岩石中微观孔隙越发育，其孔隙分数维越大，岩石抗压强度就越小。由散点图经乘幂拟合所得曲线方程为

$$S_c \approx 138.46 D_{孔}^{-3.5483} \tag{2-8}$$

式中 S_c——岩石的单向抗压强度；

$D_{孔}$——孔隙分数维。

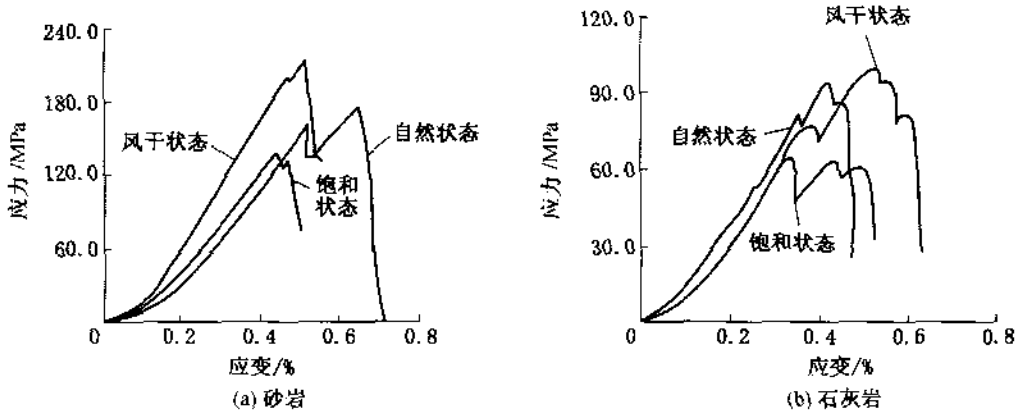


图 2-5　不同含水条件下岩石应力-应变关系

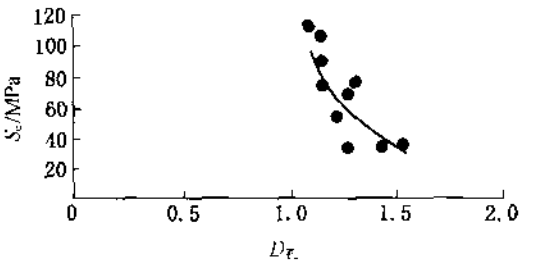


图 2-6　岩石微观孔隙分数维与岩石抗压强度之间的关系

2. 岩石非均质性的统计描述

T. C. 皮萨林科等[9]早在 1976 年指出，物体全部范围包含的裂缝和许多其他缺陷，其分布是随机的，因此在计算过程中引入反映强度统计特点的函数是合适的。唐春安等[10]研究了孔隙等缺陷的概率分布与损伤变量之间的关系，他认为，岩石内部存在的孔隙等缺陷当受到外载时，将繁衍和发展，在缺陷密集的地方，支承外载的能力削弱，汇集成宏观裂纹，破裂成一系列尺度不等的碎块。这些缺陷的分布可以是随机的、相互独立的，各处的平均密度又是稳定的，因而可以用泊松分布来描述这些缺陷的分布。他经过推导得到损伤参量 D 的统计表达式为

$$D = 1 - \left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m + 1\right]\exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m\right] \tag{2-9}$$

式中　ε——应变；

ε_0——常量；

m——维数，$m = 1 \sim 3$。

将式（2-9）代入到连续损伤的胡克定律[11]式（2-10）得

$$\sigma = E\varepsilon(1 - D) \tag{2-10}$$

$$\sigma = E\varepsilon\left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m + 1\right]\exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m\right] \tag{2-11}$$

岩石材料内部的构造极不均匀，其各处强度也不相同。考虑到岩石材料在加载过程中的损伤是一个连续过程，假设：

（1）无损岩石微元的平均弹模 E 在破坏以前服从胡克定律。

（2）各微元的强度服从正态分布：

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{S}\right)^2\right] \quad (\varepsilon\geqslant 0) \tag{2-12}$$

式中 ε_0——均值；

S——方差；

$\varphi(\varepsilon)$——岩石试样在加载过程中损伤率的量度。

这样一来，损伤参量 D 与微元破坏的概率密度 $\varphi(\varepsilon)$ 之间可以表达为[10]：

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}=\varphi(\varepsilon) \tag{2-13}$$

若初始损伤 $D_0=0$，则得

$$D=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\varepsilon_0}{S}\right)^2\right]\mathrm{d}x \quad (\varepsilon\geqslant 0) \tag{2-14}$$

此即为以岩石微单元强度的统计分布表示的岩石损伤参量。

考虑到应用的方便，通常把微元强度的分布假设为 Weibull 分布：

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{m}{\alpha}\varepsilon^{m-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon^m}{\alpha}\right) \tag{2-15}$$

式中 m，α——常数，其中 m 为岩石的均质度系数。

如果式（2-15）中的 ε 用其他岩石的力学性质如岩石抗压强度、弹模等来替换，则可以认为岩石力学性质均服从式（2-15）所表达的 Weibull 分布。

3. 非均质性对岩石破坏行为的影响

冯增朝等[12]考虑岩石材料的非均质性，把弹模的分布函数取为

$$\varphi(E)=\frac{m}{E_0}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{E}{E_0}\right)^m\right] \tag{2-16}$$

式中 E——弹模；

E_0——所有单元弹模的平均值；

m——岩石的均质度系数，m 越大，表明岩石材料越均匀，材料波动范围越小，如图 2-7 所示。

图 2-8 显示了采用 RFPA 软件模拟得到的不同均质度条件下，岩石试块的破坏形态。从图中可以看出，随着均质度的增加，岩石破坏由“区域分散”向着“区域集中”过渡，这与马志涛、谭云亮[13]采用 PCA 模拟的结果相似，如图 2-9 所示。

梁正召等[14]采用 RFPA^{3D}软件，模拟了不同均质度下岩石空间破裂形态和空间声发射分布，如图 2-10 所示，更形象地反映出岩石非均质性对岩石破坏的影响。

2.1.3 岩石材料的各向异性

各向异性是指物理性质随着量度的方向而变化的通性。各向异性是晶体的重要特征之一，岩石本身是矿物结晶颗粒和胶结物的聚合体，矿物结晶颗粒具有不同层次的结构和构造，是一种典型的各向异性体。

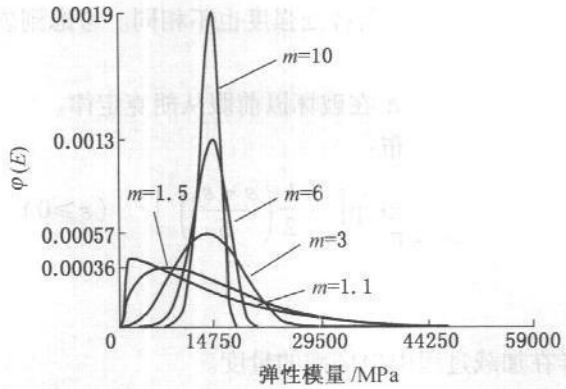


图 2-7　弹模随均质度系数 m 的分布变化[12]

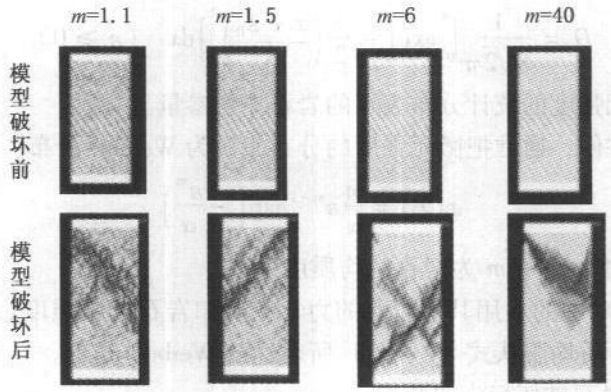


图 2-8　不同均质度系数 m 的岩石破坏形态[12]

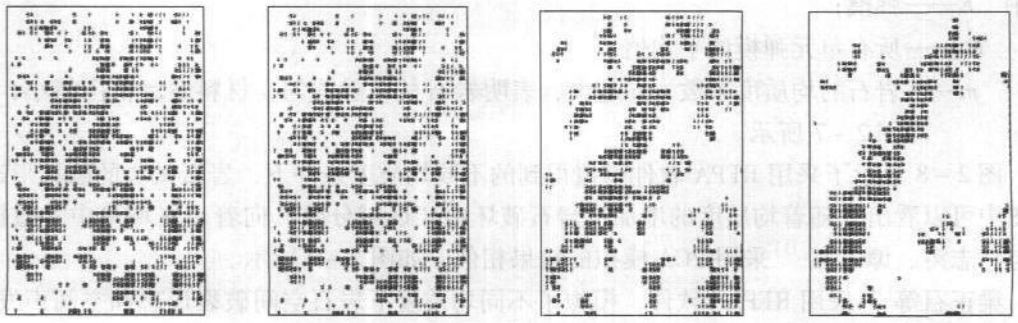


图 2-9　不同均质度岩石破坏演化 PCA 模拟

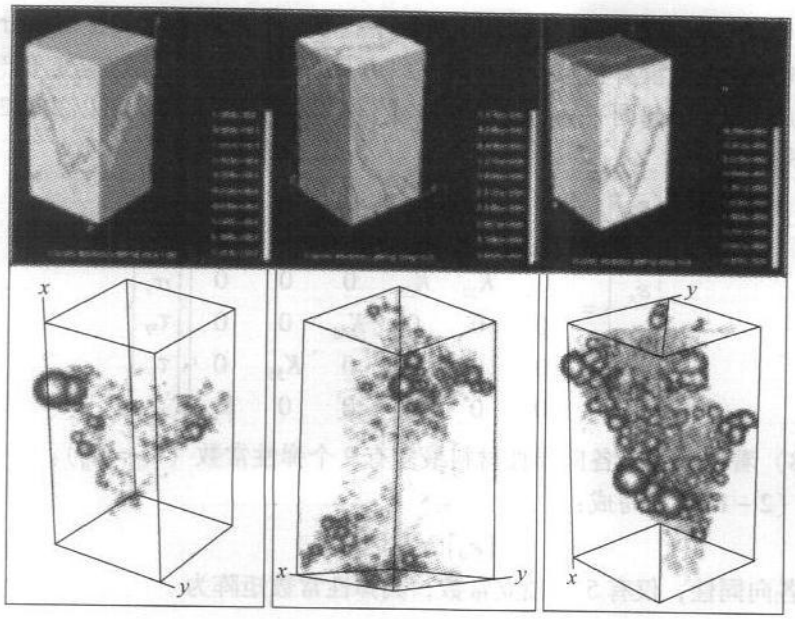


图 2-10　不同均质度下岩石空间破裂形态和空间声发射分布[14]

1. 各向异性材料应力-应变关系

在载荷作用下，岩石内一点一般有独立的 6 个应力分量和 6 个应变分量。对于各向同性材料正应力分量只引起线应变，不引起切应变，而切应力分量只引起面内切应变。对于各向异性材料，每一个应力分量都可以产生全部的 6 个应变分量。也就是说，正应力分量不仅引起线应变，也将引起切应变；切应力分量不仅引起切应变，同时也将引起线应变。在线弹性范围内，这些应力与应变之间也呈线性关系。小变形情况下，叠加原理仍然适用。例如，x 方向的线应变 ε_x 是由 6 个应力分量引起的，可以写成 6 个应力分量的线性函数：

$$\varepsilon_x = K_{11}\sigma_x + K_{12}\sigma_y + K_{13}\sigma_z + K_{14}\tau_{xy} + K_{15}\tau_{yz} + K_{16}\tau_{zx}$$

其余 6 个应变也有类似关系式，将它们用矩阵形式表示如下：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & \cdots & \cdots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2-17}$$

由式（2-17）看出，各向异性材料共有 36 个弹性常数。K_{ij} 中第一个角标 i 表示与应变分量有关，第二个角标 j 表示与应力分量有关。可以通过考察由应力作用引起的总功与应力的作用次序无关来证明，弹性常数矩阵［K］是对称的，即 $K_{ij} = K_{ji}$。因此，最多有 21 个弹性常数。

若材料的弹性性质对于三个互相垂直的平面具有对称性，则称为正交异性材料，如增

强纤维材料、木材等。当 x、y、z 轴选取分别平行于三个对称面时，各切向分量之间或切向分量与法向分量之间没有相互作用，即正应力只产生线应变，对切应变不产生影响，一坐标面内的切应力只引起同一平面内的切应变，而不产生线应变。所以式（2－17）可简化为下列形式：

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0\\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0\\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix} \tag{2-18}$$

由式（2－18）看出，正交各向异性材料最多有 9 个弹性常数（$K_{ij}=K_{ji}$）。

若将式（2－18）简写成：

$$\{\varepsilon_{ij}\}=[S_{ij}]\{\sigma_{ij}\} \tag{2-19}$$

则对于横观各向同性，仅有 5 个独立常数，其弹性常数矩阵为

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_1} & \frac{-\mu_1}{E_1} & \frac{-\mu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\mu_1}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\mu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\mu_3}{E_3} & \frac{-\mu_3}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1}\end{bmatrix} \tag{2-20}$$

2. 砂岩变形的各向异性[15]

席道瑛等[15]从野外采集 700mm×450mm×150mm 具有清晰的细观层理构造的紫红色砂岩。按照一定的 θ 方向取样（θ 角为层理面与岩样端面间的夹角）。θ 角取值从 0°～90°，增量为 15°，共取 7 组（图 2－11）。将砂岩加工成（50～100）mm×40mm×40mm 的长方体。

采用 SYC－3 型声波仪测定了弹性波速度 v_p，v_s，用 DCS－500 型岛津材力试验机进行了单轴压缩试验，以确定 E_1，E_3，μ_1，μ_3 和 G_3 共 5 个独立弹性常数。加载方向为：对 $\theta=0°$的样品沿着 z 轴加载，如图 2－12a 所示，可以求得杨氏模量 $E_3=\frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$和泊松比 $\mu_3=-\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$；对 $\theta=90°$的样品沿着 z 轴（样品端面）加载，如图 2－12b 所示，可以求得杨氏模量 $E_1=\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$和泊松比 $\mu_1=-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$；对 $\theta=45°$的样品，在单轴压缩中用 45°应变花测得三个方向的应变 ε'_z，ε'_y，$\varepsilon'_{45°}$，绘出应力－应变曲线如图 2－13 所示，可以求出 $E_{45°}$。

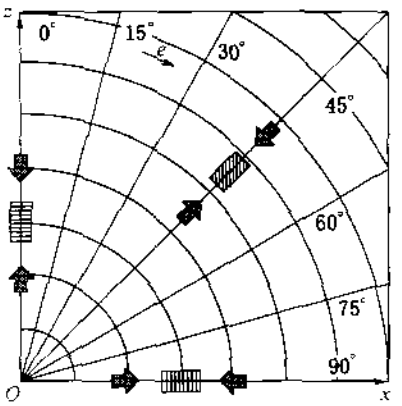


图 2-11　砂岩取样与单轴压缩实验示意图

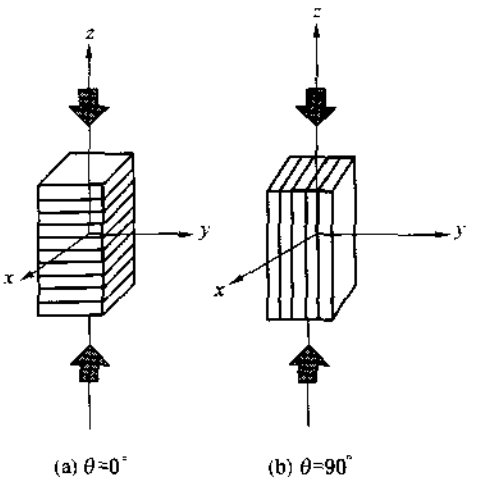


图 2-12　求 E_1，E_3，μ_1，μ_3 的加载示意图

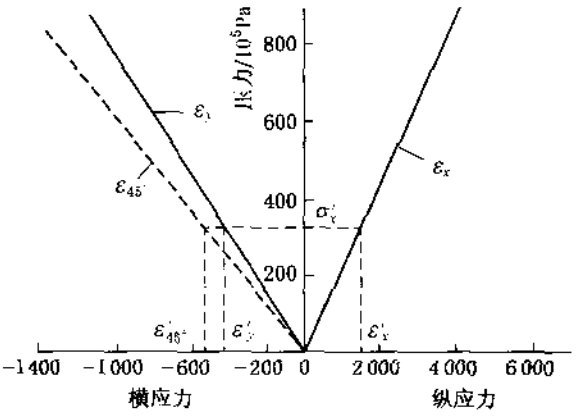


图 2-13　砂岩的应力-应变曲线

由单轴压缩试验所得到的砂岩应力-应变曲线，可以求得砂岩的静杨氏模量 E_s 和静泊松比 μ_s，其值见表 2-6。

表 2-6　砂岩各向异性力学参数试验结果[15]

样品编号	样品格式	角度 θ/(°)	纵波速度 v_p/(m·s^{-1})	横波速度 v_s/(m·s^{-1})	泊松比		杨氏模量/GPa		体积模量 K_d/GPa	剪切模量 G_d/GPa	波速比 v_p/v_s
					μ_d	μ_s	E_d	E_s			
A	6	0	3729	2405	0.144	0.123	34.5	15.5	15.1	16.2	1.550
B	4	15	3788	2434	0.148	0.138	35.5	16.0	15.5	16.8	1.556

表2-6（续）

样品编号	样品格式	角度 θ/(°)	纵波速度 v_p/(m·s^{-1})	横波速度 v_s/(m·s^{-1})	泊松比		杨氏模量/GPa		体积模量 K_d/GPa	剪切模量 G_d/GPa	波速比 v_p/v_s
					μ_d	μ_s	E_d	E_s			
C	2	30	3856	2468	0.153	0.144	36.7	17.6	15.9	17.2	1.563
D	6	45	4071	2540	0.181	0.168	39.8	21.8	16.8	20.8	1.603
E	4	60	4277	2617	0.201	0.189	42.2	24.2	17.9	23.9	1.635
F	7	75	4376	2631	0.217	0.212	44.0	26.7	18.1	25.9	1.680
G	6	90	4632	2677	0.249	0.248	46.7	27.9	18.7	31.1	1.730

由表2-6的数据，作出砂岩的动、静杨氏模量（E_d、E_s）及动、静泊松比（μ_d、μ_s）随θ角变化的曲线，如图2-14所示。从图中可以看出，动、静杨氏模量（E_d、E_s）及动、静泊松比（μ_d、μ_s）随θ角的增加呈上升趋势，静态参数比动态参数随θ角变化要陡一些，说明砂岩各向异性在静态时显得更为突出。

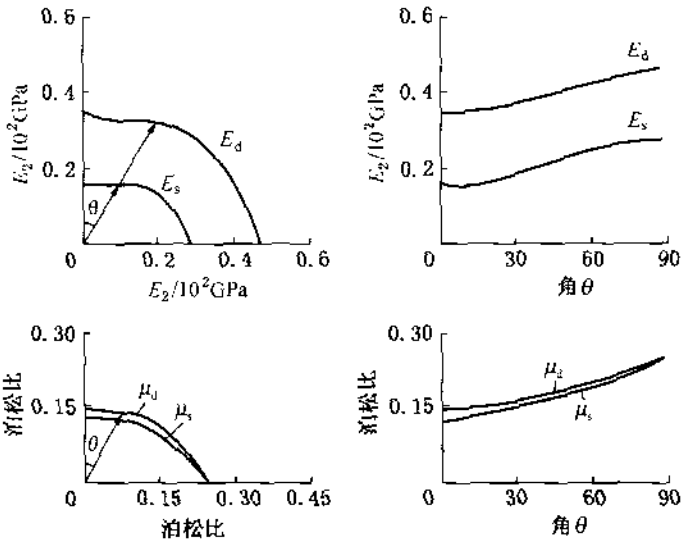


图2-14 砂岩动、静态弹性常数比较

3. 不同围压下岩石泊松比的各向异性[16]

刘斌等[16]选用19块岩石样品包括榴辉岩、片麻岩、麻粒岩、蛇纹岩和闪岩等(表2-7)，对不同围压下泊松比各向异性进行了试验研究。试验前样品被加工成边长为43mm的立方体，并在130℃的温度下真空干燥24h以上。在将岩样放入真三轴压力机时注意根据其构造方向选取放置方向：使线理平行于x轴，y轴在层理面内且与线理方向垂直，z轴垂直于样品层理面。

表2-7 试验样品名称

样品编号	样品名称	$\rho/(g\cdot cm^{-3})$	样品编号	样品名称	$\rho/(g\cdot cm^{-3})$
B01	斜长角闪岩	3.038	B11	片麻岩	2.955
B02	含石榴子石镁铁麻粒岩	3.052	B12	二长片麻岩	2.639
B03	石榴子石镁铁麻粒岩	3.286	B13	斜长角闪岩	2.953
B04	重硅线石	2.958	B14	蜕化榴辉岩	2.973
B05	辉石岩	3.295	B15	石榴子石片麻岩	2.926
B06	长石砂岩	2.620	B16	多硅白云母榴辉岩	2.933
B07	石榴子石辉长石	3.658	B17	花岗片麻岩	2.909
B08	含石榴子石麻粒岩	3.265	B18	蛇纹岩	2.721
B09	石榴子石单斜辉岩	3.451	B19	长石砂岩	2.139
B10	二辉橄榄岩	3.275			

试验结果如图2-15~图2-17所示，一般来讲z方向的泊松比表现出非线性的快速增加，这可能是由微裂纹的迅速闭合造成；但在x、y方向的泊松比有时增大，有时减少，幅度不大。从整体上看，随着围压增大，泊松比呈现增大趋势，正交三个方向明显不同。在围压较低时岩样内部的微裂纹对泊松比的各向异性十分明显；当围压超过100~200MPa以后，样品的泊松比各向异性主要反映了含裂隙岩石基质或矿物集合体的内禀性质。但是不同岩石也不一样，如闪长岩在高围岩下泊松比的各向异性仍然可以达到34%。这说明不同围压条件下不同岩石泊松比各向异性的复杂性。

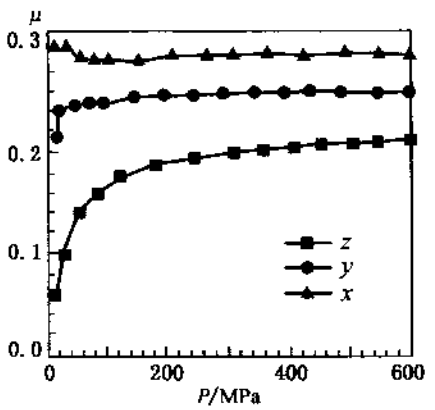


图2-15 角闪岩沿着正交三个方向泊松比随着围压变化

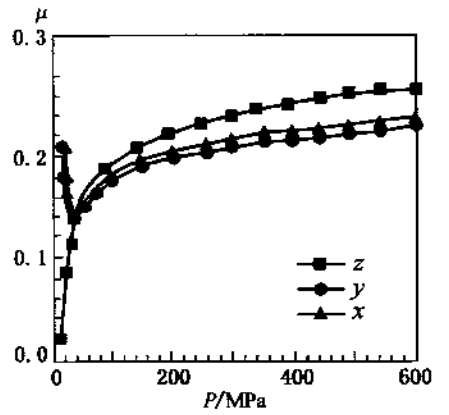


图2-16 B06号长石砂岩沿着正交三个方向泊松比随着围压变化

4. 岩石质量指标（RQD）的各向异性[17]

岩石质量指标RQD是美国伊利斯诺大学的Deere提出用来评价岩石质量的一个指标。其定义为长度大于10cm的整段岩心的累计长度所占的百分数。RQD方法在岩石力学工程界得到了广泛应用。杜时贵等[17]为了研究RQD指标的各向异性，将RQD指标的定义进

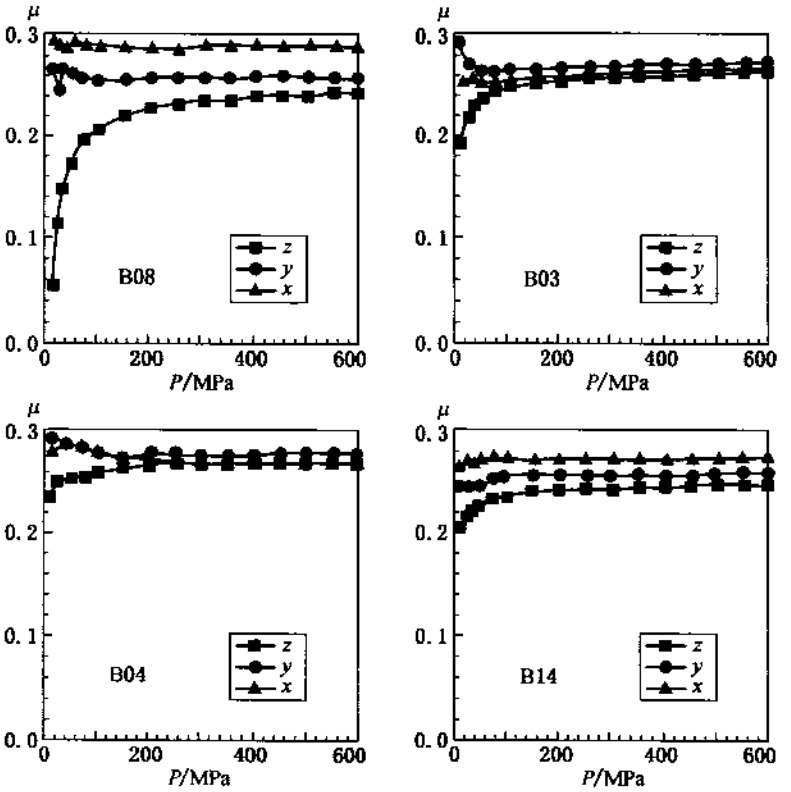


图 2－17　4 种样品沿着正交三个方向泊松比随着围压变化

行延拓：岩体沿着某一方向上大于某确定值 t 的间距累计长度与该方向上所有间距总长度的百分比，记为 RQD_t。假设某岩体发育三组结构面，结构面走向相互平行，倾角服从正态分布，均值分别为 0°，45°，90°，方差均为 5°；结构面迹长均服从负指数分布，均质为 2.62m，方差为 1.86m，间距均值分别为 0.08m，0.20m 和 0.40m 时，垂直结构面走向剖面上的 RQD_t 随着方向变化特征如图 2－18 所示。图中，从外向内依次表示 $t=0.1$m，0.3m，0.5m，0.7m 时的 RQD_t 随着方向变化曲线。表 2－8 列出了不同 t 值时 RQD_t 的各向异性率（RQD_{max}/RQD_{min}）与结构面平均间距关系。

从图 2－18 和表 2－8 中可以看出，随着结构面平均间距的增大，岩体中 RQD_t 的各向异性程度降低，而且，t 值越大，这种趋势越明显。对于具体特定结构面平均间距的岩体而言，t 值越大，RQD_t 的各向异性程度越高。

表 2－8　不同 t 值时的 RQD_t 的各向异性率与结构面平均间距的关系

平均间距/m	t/m			
	0.10	0.30	0.50	0.70
0.08	1.88	18.43	236.21	4980
0.20	1.39	5.62	30.40	185.66
0.40	1.17	2.46	6.46	18.73
1.00	1.07	1.53	2.55	4.56

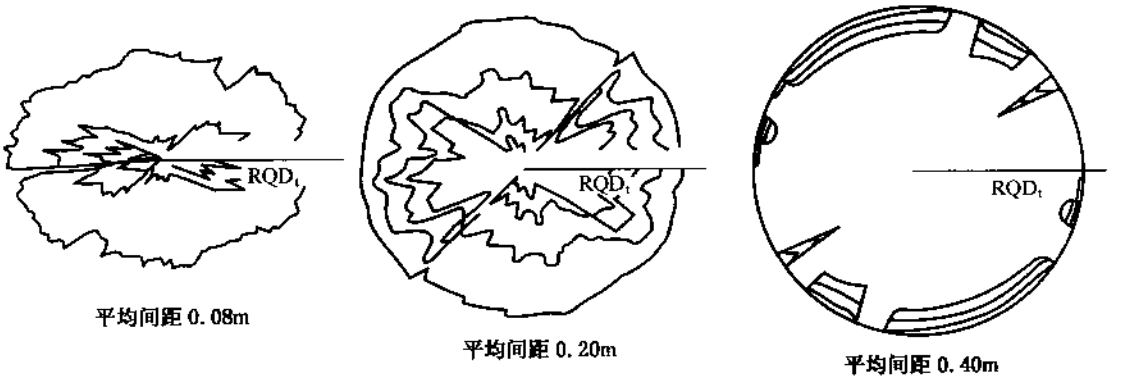


图 2-18 RQD_t 随方向变化图

5. 各向异性对岩石强度的影响[18,19]

关于各向异性对岩石强度的影响最早是 J. C. 耶格和 N. G. W. 库克[18]进行讨论并引起国内学者的重视[19]。首先讨论的是平面各向异性情形。

在二维空间中，假设岩层有一软弱面，如图 2-19 所示，其面法线与最大主应力 σ_1 成 β 角，对结构面上滑动的准则，有

$$|\tau| = c_0 + f\sigma \tag{2-21}$$

式中 σ，τ——正应力和切应力；

c_0——内聚力。

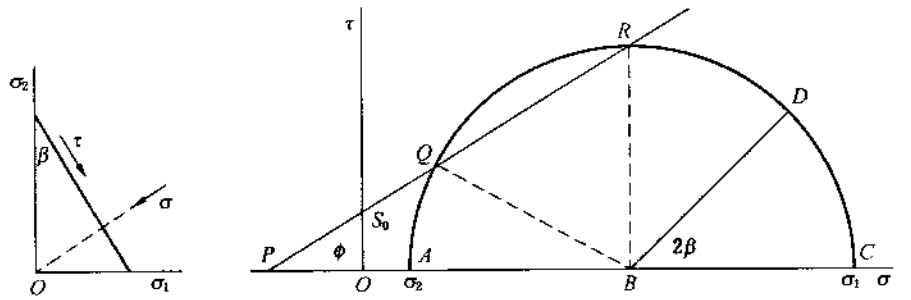


图 2-19 一组节理的库仑准则

由摩尔圆可知

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\beta \tag{2-22}$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\beta \tag{2-23}$$

也可用另一形式表示，即

$$\sigma = \sigma_m + \tau_m \cos 2\beta \tag{2-24}$$

$$\tau = -\tau_m \sin 2\beta \tag{2-25}$$

式中

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{2-26}$$

$$\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{2-27}$$

令 $f = \tan\phi$，将式（2-24）、式（2-25）代入式（2-21）中，得

$$\tau_m(\sin 2\beta - \tan\phi\cos 2\beta) = c_0 + \sigma_m \tan\phi \tag{2-28}$$

$$\tau_m = (\sigma_m + c_0\tan\phi)\tan\delta \tag{2-29}$$

式中

$$\tan\delta = \sin\phi\csc(2\beta - \phi) \tag{2-30}$$

将 σ_m 和 τ_m 代入式（2-30），得

$$\sigma_1[\sin(2\beta - \phi) - \sin\phi] - \sigma_2[\sin(2\beta - \phi) + \sin\phi] = 2c_0\cos\phi \tag{2-31}$$

最后，式（2-28）可写成

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2c_0 + 2f\sigma_2}{(1 - f\cot 2\beta)\sin 2\beta} \tag{2-32}$$

和

$$\sigma_1 = \frac{2c_0\cot\phi}{(1-k)\sin(2\beta - \phi)\csc\phi - (1+k)} \tag{2-33}$$

式中 $k = \sigma_2/\sigma_1$。

式（2-29）、式（2-31）、式（2-32）、式（2-33）都是破坏准则式（2-21）的不同表达式。当 c_0、f 固定时，式（2-32）中 $\sigma_1 - \sigma_2$ 和 β 的关系为

当 $\beta \to \frac{\pi}{2}$ 时　　$\sigma_1 - \sigma_2 \to \infty$

当 $\beta \to \phi$ 时　　$\sigma_1 - \sigma_2 \to \infty$

这表明上述两种情况，软弱面不会发生滑移，不会被剪坏，只有 $\phi < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时方可能出现沿软弱面剪坏的情形。

从式（2-32）可得到，当 $\frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_2)}{\partial\beta} = 0$ 时，$\tan 2\beta = -\frac{1}{f}$，$(\sigma_1 - \sigma_2)$ 的最小值为

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = 2(c_0 + f\sigma_2)[f + (1 + f^2)^{1/2}] \tag{2-34}$$

当 $f = 0.5$，而 σ_2 有不同值时，σ_1 随 β 的变化而变化，如图 2-20 所示。

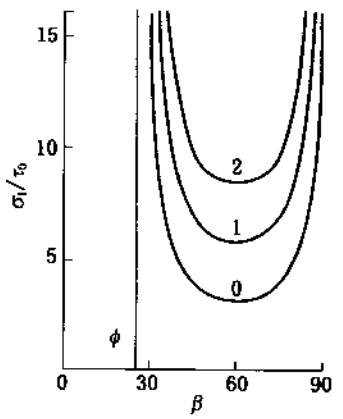


图 2-20　$f = 0.5$ 的软弱面滑动时 σ_1 随 β 的变化（曲线上的数字是 σ_2/c_0 值）

以上结果可由摩尔圆很清楚的表示出来，如图 2-19 所示。此线在 $O\sigma$ 轴上形成截距 $OP = -c_0\cot\phi$，将软弱面上应力表示为 D 点，若 D 位于 AQ 或 RC 弧段上，则此应力不引起滑动破坏，若 D 位于 QR 上，则将出现破坏，对应于 R 点和 Q 点的极限情况为 D 点和 R 点重合，因

$$\angle RBC = 2\beta \qquad \angle PRB = 2\beta - \phi$$

故

$$BR/\sin\phi = PB/\sin(2\beta - \phi) \quad 或$$

$$\tau_m\sin(2\beta - \phi) = (\sigma_m + c_0\cot\phi)\sin\phi \tag{2-35}$$

这就是摩尔准则由式（2-29）推出的式子。

给定 ϕ、c 值后，滑动面上的滑动准则用滑动区表示，即 Q 点、R 点的 β 值用 β_1、β_2 表示为

$$2\beta_1 = \pi + \phi - \sin^{-1}\{[(\sigma_m + c_0\cot\phi)/\tau_m]\sin\phi\} \tag{2-36}$$

$$2\beta_2 = \pi + \sin^{-1}\{[(\sigma_m + c_0\cot\phi)/\tau_m]\sin\phi\} \tag{2-37}$$

由此可见，岩体的强度准则在考虑了软弱面的位置后，就不同于完整岩石，岩石是否破坏将视 $\sigma_1 - \sigma_2$ 与 β 的关系而定。

对于具有平行组的薄弱平面的岩石，其强度准则也可用式（2-32）表示。可见其强度随 β 值而有所不同。

对于某些 β 值下的作用力，材料破坏是穿过完整的材料，此时破坏面上的 c_s，f_s，都比软弱面上的大，即 $c_s > c_0$，$f_s > f_0$。

由图 2-21a 的摩尔圆可见，直线 AB 上的强度可表示为 $|\tau| = c_0 + f_0\sigma$，这是软弱面的强度准则，对于完整岩石的强度可用直线 CD 表示：

$$|\tau| = c_s + f_s\sigma \tag{2-38}$$

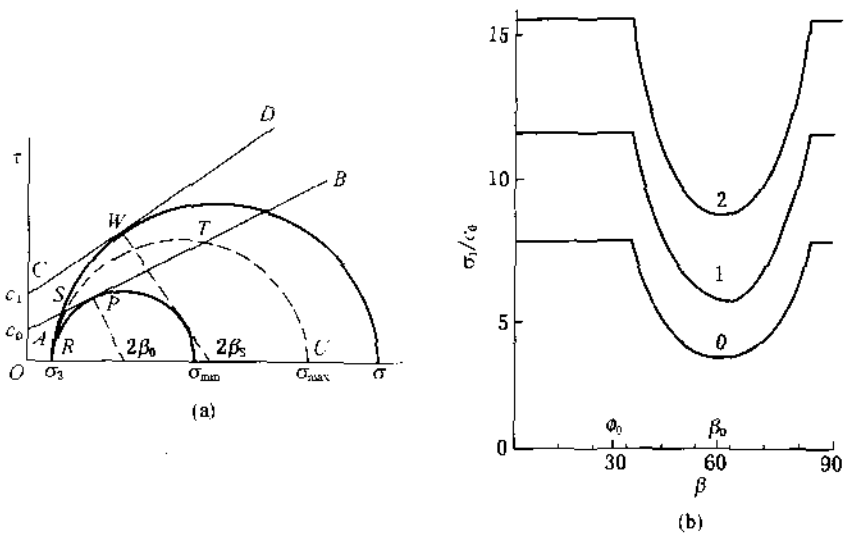
如保持 σ_3 不变，增加 σ_1，当 $\sigma_1 \to \sigma_{min}$ 时，其摩尔圆和 AB 直线相切于 P 点，破坏首先发生在软弱面上。当然，此时破坏面上的倾角应满足式（2-39）：

$$\tan 2\beta_0 = -1/f_0 \tag{2-39}$$

当 σ_1 增加到 U 时，若 2β 位于圆弧 ST 上，则软弱面有可能破坏，若 2β 位于圆弧 PS 或 TU 上，则破坏不会发生。当 $\sigma_1 \to \sigma_{max}$ 时，摩尔圆与 CD 相切，破坏面通过完整岩体，可得

$$\sigma_{max} = \sigma_3 + 2(c_s + f_s\sigma_3)[(1 + f_s^2)^{\frac{1}{2}} + f_s] \tag{2-40}$$

由式（2-40）和式（2-34）可示出材料能经受的最大和最小应力，对于 $\sigma_1 < \sigma_{max}$，只有在弱面的有限倾角范围内，破坏才有可能发生。图 2-21b 示出 σ_1 随 β 角的变化范围，可看出各向异性的影响。



a—用于研究材料的薄弱平面内和横过这些平面的破裂的摩尔图；

b—对于 $f_0 = 0.5$，$f_s = 0.7$，$c_s = 2c_0$ 的情况，σ_1 随 β 变化，曲线上的数字是 σ_3/c_0 的值

图 2-21　含弱面岩石破坏摩尔图

2.1.4 岩石材料的流变性

在应力保持常量时，应变随着时间增长的性质称之为流变或蠕变。岩石材料是一种典型的流变体。我国孙钧院士等[20]对此做了大量研究。

完整岩块的理论蠕变曲线由图2-22所示的三个区段所组成。在恒定的应力水平（$\sigma=\sigma_1$）作用下，除图中曲线 a 的 OA 段为加载后瞬间产生的弹性应变外，AB 段是随时间增长发展后的初期蠕变（过渡蠕变），其变形速率逐渐递减；BC 段是变形速率呈定值稳定状态的第二期稳定蠕变，这个区段一般历时比较长；CD 段是试件破坏前变形呈加速增长的三期蠕变（加速蠕变）。如果在 AB 段卸载，试件中的弹性应变部分将瞬时恢复，其余部分为黏弹性应变，它们也将随时间逐渐延迟恢复到零；如果在 BC 段卸载，试件应变除一部分产生瞬时和延迟恢复外，还将存在不可恢复的、永久的粘塑性变形。

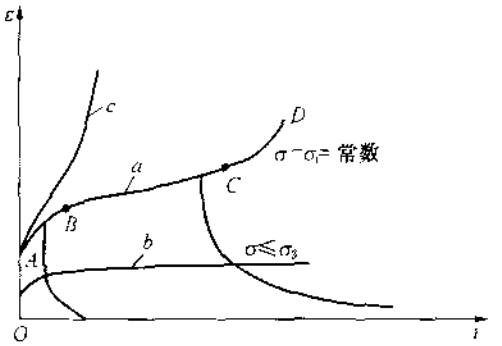


图2-22 恒定应力作用下的理想蠕变曲线

显然，随着岩石自身的属性、应力状态以及温度条件等的不同，上述蠕变曲线的形状也将是不同的。当应力水平较低时，可能只产生 AB、BC 两个区段的蠕变；当应力水平低于某一限值时，如 $\sigma\leqslant\sigma_s$ 时，甚至不产生蠕变现象，如图2-22中曲线 b 所示，σ_s 称之为蠕变下限；反之，当应力水平较高，在单轴压缩条件下，例如，接近岩石的抗压极限强度时，上述几个区段的蠕变反映不明显，变形将近似直线状呈急剧发展，直至迅速地导致破坏，如图2-22中曲线 c 所示。如以某种石灰岩在不同应力差的三向围压恒定作用下的各区段压缩蠕变试验为例，围压保持在1000MPa不变，应力差不同时曲线特征也不同；680MPa时呈现出三区段蠕变；550MPa时为前两区段蠕变；小于等于440MPa时仅有初期蠕变；当应力差达到1000MPa以上时，试件急剧发展为第三区段蠕变并迅速破坏。

对于不同的受力条件，各类岩石所表现的流变性态也不尽相同。实验室研究[21,22]表明，岩石的流变性有如下特点：

（1）通常在岩石单向压缩情况下，侧向蠕变比轴向蠕变显著，侧向蠕变速率随应力增加也比轴向蠕变迅速。多数岩石在较低的单轴压应力作用下表现出黏弹性固体性态。待压应力超过一定量值以后又表现为黏塑性流体性态。某些岩石（如砂岩和凝灰岩等）在单轴压缩条件下具有比较明显的体积蠕变特性，即其体积变形常随时间缓慢增大，而出现体积膨胀的应力值比短时加载时低。一些岩石在不同蠕变阶段其轴向和侧向蠕变曲线的形状都相类似。应该指出，由于压缩蠕变的发展，使岩石的长期强度急剧降低，如泡水Nugget砂岩，在自然干燥状态下的准静力抗压强度可达到230MPa，而蠕变发展1200h后，其强度值将降低到130MPa以下；其弹性模量和泊松比也都随加载时间和加载速度不同而变化，一般可把泊松比为0.5时所对应的应力作为岩石的长期强度。

（2）一些岩石在单向拉伸、扭转（剪切）和多点弯曲等恒载分别作用下的变形均表现出更加明显的时间效应。在这几种受力条件下，即使是较低应力时岩石也显现出黏弹塑性流体的蠕变性态。试件受单向拉伸作用时，由于侧向变形很小，体积蠕变和轴向蠕变在

性态和量值上都大体相同。一些岩石（例如花岗岩）在单轴拉伸时的蠕变速率比较高，第三期蠕变的时间又极短暂，因而常造成突然破坏；而另一些岩石（例如砂岩和石灰岩）的拉伸蠕变变形很大，在相同的百分比（指施加应力占破坏值的百分数）时，其拉伸蠕变值大约是压缩蠕变值的5～6倍。

（3）在双轴和三轴压缩的复杂应力条件下，岩石的蠕变性态将受到各个方向应力的大小及其加载路径的影响。对围压恒定、轴压增加的情况，一些岩石在每一级增量荷载下的轴向、侧向和体积变形都具有较明显的时间效应；其轴向和侧向瞬时应变以及轴向第二期的平均蠕变速率随应力差的变化规律均与单轴压缩的情况相似。反之，在轴压恒定、围压增加的情况下，体积变形的时间效应多不明显，其轴向和侧向蠕变值也不大。但许多实验结果又都表明侧压力对另一些岩石蠕变的影响是很显著的。就花岗岩而言，切应力增加使切应变和体积应变以及蠕变速率均增加；而侧压力加大，这些量值减小。切应力不变时，岩石试件的断裂时间随围压增高而增大；因而，在高围压条件下，蠕变断裂要比单轴压力情况困难得多。此外，体积应变的性态对岩石畸变蠕变特性也有较大影响。

（4）软弱夹层和沿节理结构面的剪切流变性态是决定不连续岩体（节理岩体）流变特征的关键。根据这类实际岩体所呈现的不同状况，可将试样区别为节理面之间有、无软弱夹层充填两大类，都可用现场采集的岩样在室内弱面直剪流变仪上进行试验。当与节理面呈正交的法向应力为不同的恒定值时，分别得出不同时刻节理面的切应力－剪切位移曲线关系。试验表明，节理面的剪切刚度随时间的推移而降低，剪切位移速率随切应力增加而增大。依据对表面粗糙但无大的起伏角、无黏土矿物质夹层充填的节理面所进行的剪切蠕变实验可以看出，与其他类型的节理面相比，其蠕变曲线相对平缓，变形过程中没有大的起伏和剧变。此外，层状板中存在的节理面还会影响到侧向蠕变，平行于节理面加载时出现的侧向蠕变值有时可达到垂直于节理面加载时的2倍。

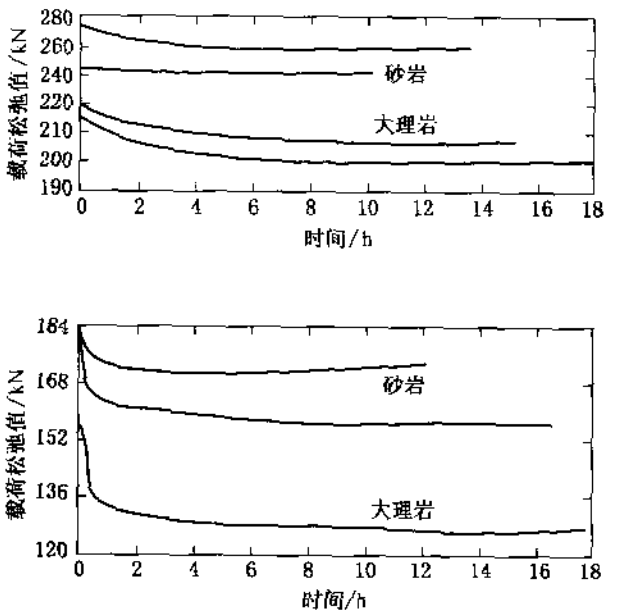


图2－23　岩石的应力松弛特性

（5）在恒定的单向压应变作用下，多数岩石都表现有不同程度的应力松弛特性。应力松弛持续的时间具有随岩石单向抗压强度降低而减小的趋势，同时还受到所施加应变值大小的影响。图 2－23 所示为采用有伺服控制的刚性试验机对某种砂岩和大理岩所作的应力松弛试验曲线。从图 2－23 中可见，在出现第一条宏观裂纹的瞬时，荷载急剧降低，很快达到与产生裂纹大小有关的稳定值，这表明裂纹扩展后又趋于下一个新的平衡。

研究岩石流变的应力－应变－时间特性时，采用力学模型是为了把复杂的流变属性用比较直观的数学表达式来描述，这在作数值分析和计算处理时，尤其方便。

人们从实际的工程材料中已经概括了三种理想的单元体，或称“元件”，即胡克（Hook）体——弹性元件；圣维南（St. V）体——塑性元件；牛顿（Newton）体——黏性元件。它们是建立流变力学模型所要求的基本形态。将上述各个元件分别作适当的串联或并联组合，就可得到各种黏性、黏塑和黏弹塑性的流变模型。常见的几种流变模型反映了对某些特定岩石材料流变的主导属性。对岩样分别进行室内蠕变和应力松弛试验，并将该两类试验曲线结合起来分析，就能用于鉴别和判明上述某一流变模型对该特定岩石流变属性的适用程度。各种流变模型所适用岩体的范围和种类归纳于表 2－9 之中。

表 2－9　各种流变模型所适用的岩体种类

流变属性	流变模型	建议使用者	提出的年份	建议适用的岩体种类
黏弹性	M 体	Salustowicz	1958	较大深度下的岩体
黏弹体	K 体	Salustowicz	1958	各种岩体
		郑颖人、孙学毅	1979	各种岩体
复合黏弹体	Bu 体	Terry	—	各种煤泥板岩、
		俞裕泰、李青麒	1960、1984	正长岩、砂岩
黏塑性	B 体	Bing ham	1916	软黏土、软岩
黏弹塑性	SCH－SCB 体	孙钧等	1981	中等强度岩体和软岩
		李成江	1983	渗水膨胀复合流变岩体

岩体的流变属性是非常复杂的，上述一些模型只能说明其流变特征中某些主导方面的性质和现象，不可能全面地反映各种特定的流变性态；同时，选用流变模型也有较大的抽象性和一定的任意性。此外，一些模型的参数，如延迟模量和黏弹性系数等也难以确切测定。因此，在对一些重大工程对象作流变方面的岩性研究时，如果具备条件，能够通过一定数量的现场和室内流变试验为给定的岩石与岩体建立相应的经验关系与公式，是恰当的。

2.1.5　岩(石)体介质的不连续性

岩体是一种地质材料，它经受长期的地质构造作用，在一定的地质环境中形成一定的结构，显现出宽广和多变的材料响应范围。岩体与一般工程材料相比，其最大特点是一般具有结构上的不连续性，多为层面和节理面等弱面所切割。实际上，岩体结构的连续性和不连续性都是相对的。如图 2－24 所示，当取样范围较小时，可能碰到完整岩石，逐渐扩大取样范围，则是节理岩体。

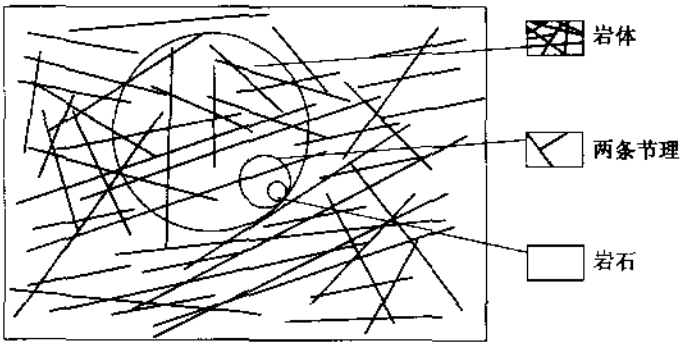


图 2-24　从完整岩石到节理岩体

岩体的性质取决于组成岩体的完整岩石的力学性质，以及岩体在漫长的地质年代中遭受多次应力变化所产生的不连续面的数量和性质。不连续面包括层理、节理、片理等，其对岩体的变形、强度、渗透、各向异性、力学适应性及应力分布等都有很大影响。

对于节理有很多不同的描述，古德曼 R[23] 从工程的角度，把岩体中所有的或部分的不连续面都用节理一词描述，但有别于只限于小型岩石试件特性研究的裂隙。Priest[24] 把岩石中的裂隙与断裂面统称为节理。有些学者也曾把节理量化，如大于 5m 等。在构造地质学中，把在构造力作用下沿破裂面的两侧岩块没有位移或相对位移很小的断裂称为节理。张志刚等[25] 把除断层外对岩体力学特性有影响的不连续面统称为节理。节理大量存在于地壳表面 1km 范围内的各种岩石之中，方向各异，长度小到几厘米，大至数百米。另外节理出现的概率比断层要高得多，一般地，很少能看到 $1m^3$ 岩体内不含有任何节理的情况。因此，在地表所进行的大多数岩体工程都不可避免地要遇到节理面。工程岩体的力学介质是一种具有地质结构面的复杂地质体。正是由于岩体中地质结构面的存在，才使得岩体力学强度大为降低，并且大多数的工程实践证明，岩体中的结构面对岩体的变形与破坏强度起着控制作用。

1. 岩体结构类型[26]

1）结构面的分级

结构面影响岩体力学作用的因素很多，其中填充状况及结构面规模等具有重要意义。因此，在进行岩石力学研究时，不仅要查明各种类型结构面及其特征，而且应按力学作用差别进行分级，一般可分为五级。

Ⅰ级结构面：区域性断裂破碎带，延展远、深度大、厚度宽，往往延展在数十千米以上，厚度达数十米以至数百米。它对工程区的地质构造起控制作用，对区域稳定、山体稳定和岩体稳定都有很大影响。

Ⅱ级结构面：为延展性强、宽度有限的区域地质界面，如中型断裂、层间错动带、不整合面、风化夹层、原生软弱夹层以及接触和挤压破碎等等。一般延展数百米至数千米，宽 1～3m。该级结构面往往控制山体与岩体稳定。因工程无法避开，故需查明和处理。考察的重点是：结构面的产状、形态及其变化趋势，结构面组成的物质成分、微结构、水文地质条件及其泥化趋势，结合山体地形和工程布局，了解结构面间的组合情况。

Ⅲ级结构面：一般在数百米范围内的断层、挤压或接触破碎带、风化夹层，其宽度在

数厘米至1m左右。它们直接影响工程具体部位岩体的稳定。Ⅱ、Ⅲ级结构面往往是岩体稳定分析的边界，控制着岩体的破坏方式。它们的存在与组合，常构成不同工程部位的可能滑移体。

Ⅳ级结构面：延展性差，无论是在走向上还是纵深方向上的发展，均是有限的，一般在数米至30m左右，无明显宽度。主要包括明显的节理、发育的劈理、层面、片理等。它们的存在不仅破坏了岩体的完整性，直接影响岩体的力学性质和应力分布状态，而且很大程度上影响着岩体的破坏方式。

Ⅴ级结构面：延展性甚差，无厚度之别，分布随机，是为数甚多的细小的结构面，主要包括微小的节理、劈理、隐微裂隙、不发育的片理、线理、微层理等。它们的发育受上述诸级别结构面所限制。这些结构的存在，降低了由Ⅳ级结构面所包围的岩块的强度；在硬脆岩层中深埋地下工程所产生的岩爆，往往与这些微小或隐微构造有关。

上述级序中，Ⅰ、Ⅱ级结构面属软弱结构面，工程岩体变形、破坏几乎全部受其控制。Ⅲ、Ⅳ级结构面主要属于硬性结构面，工程岩体变形破坏有时受其控制。Ⅴ级结构面主要使岩体在力学性质上具有方向性和对岩体力学性质具有弱化作用。

2）岩体结构类型

不同岩性及不同形式结构体的组合方式及其连接状态决定了岩体的结构类型，综合考虑岩体的地质背景条件、完整性程度、结构面与结构体特征和地下水的特征等5方面因素，归纳出4类岩体结构类型及特征，见表2－10。各类岩体结构的典型图式如图2－25所示。

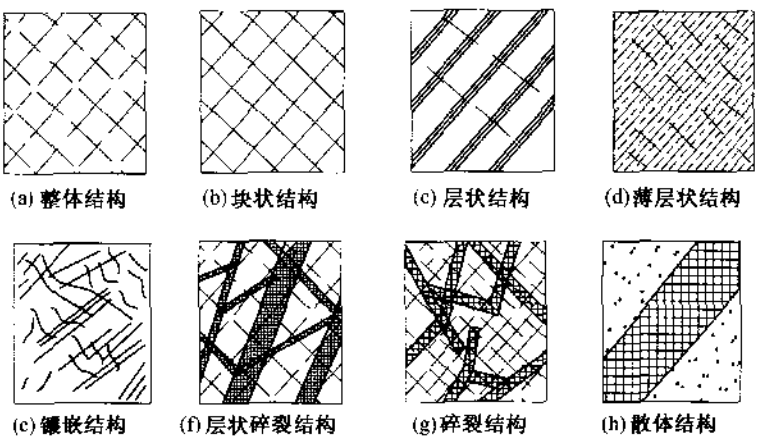


图2－25　各类岩体结构图式

2. 不连续岩体的力学性质

1）结构面的力学性质

结构面的力学性质主要表现在法向应力作用下产生的法向变形，切应力作用下产生的剪切变形，抗剪强度。

（1）法向变形：在研究软弱结构面时，采用应力、应变关系即刚度关系反映软弱结构面的力学特性。由实测的变形曲线（图2－26a）可知，其应力－应变曲线呈指数形曲线，可用式（2－41）表达：

表 2－10　各类结构岩体工程地质特征

结构类型		亚类		力学介质类型	岩体变形破坏的特征
代号	名称	代号	名称		
Ⅰ	整体块状结构	$Ⅰ_1$	整体结构	连续介质	硬脆岩石中的深埋地下工程可能出现岩爆，即脆性破裂，一般是沿裂隙端部产生。在半坚硬岩层中可能产生微弱的塑性变形
		$Ⅰ_2$	块状结构	连续或不连续介质	压缩变形微量，主要决定于结构面的规模、数量和方位以及结构体的强度。剪切滑移受结构面抗剪强度及岩块刚度、形状、大小所制约，部分岩石抗剪断强度可以发挥作用，滑移面多数与结构面相一致
Ⅱ	层状结构	$Ⅱ_1$	层状结构	不连续介质	变形受岩体组合、结构面所控制，压缩变形取决于岩性、岩层变位程度，结构面发育情况，缓倾和陡立岩层在拱顶和边墙可能出现弯曲拗折现象。剪切滑移受软面尤其受层面和软弱夹层的抗剪强度及其方位所制约
		$Ⅱ_2$	薄层状结构		岩体的变形破坏受整体特性所控制，特别是软弱破碎岩层可能出现压缩、挤出、底鼓等现象。硐室顶部、边墙易产生拗折现象。剪切滑移面受结构面抗剪强度和薄板体的强度所控制
Ⅲ	碎裂结构	$Ⅲ_1$	镶嵌结构	似连续介质	压缩变形量直接与结构体的大小、形态、强度有关。结构面的抗剪强度、结构体彼此镶嵌能力，在岩体变形破坏过程中起着决定性作用。崩落坍塌是由表及里逐渐发展的，若及时喷锚即可改善表层的应力状态，防止变形的发展
		$Ⅲ_2$	层状碎裂结构	不连续介质	岩体的变形破坏受软弱破碎带所控制，具备坍塌、滑移的条件，还有压缩变形的可能
		$Ⅲ_3$	碎裂结构	不连续或似连续介质	整体强度低，坍塌、滑移、压缩变形均可发生。岩体塑性强，变形时间效应明显。岩体的变形破坏受软弱结构面的规模、数量、特性及其组合特征所决定
Ⅳ	散体结构			似连续介质	是岩体中工程地质特性最坏的部位，近松散介质，具显著的塑性特征，变形时间明显。基础的压缩沉降、边坡的塑性挤出、坍塌滑移、硐室的坍塌、膨胀无不产生。其变形、破坏受破碎带的物质组成及其强度所控制

$$\varepsilon = U_0(1 - e^{-\frac{\sigma}{K_n}}) \tag{2-41}$$

式中　U_0——软弱面的最大压缩变形量；

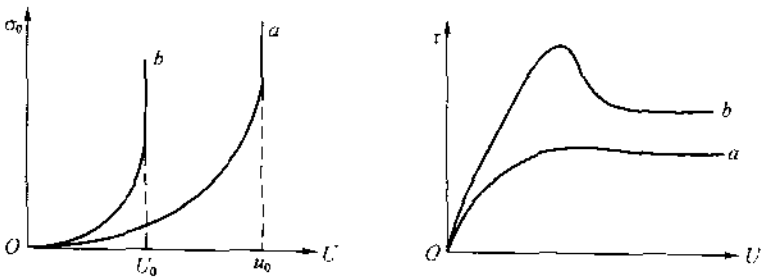
K_n——软弱结构面的法向压缩刚度。

如果弱面压缩量 U 的单位取 cm，σ 单位取 MPa，则 K_n 单位取 MPa/cm。

$$K_n = \frac{\partial \sigma}{\partial U} \tag{2-42}$$

（2）剪切变形：在一定的法向应力作用下，结构面在切应力作用下产生的变形有两种基本形态，如图 2－26b 所示，一种为脆性变形，用剪切刚度表示其力学特征：

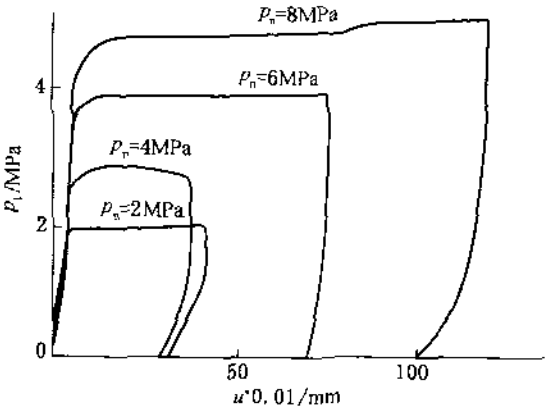
$$K_s = \frac{\partial \tau}{\partial U} \tag{2-43}$$



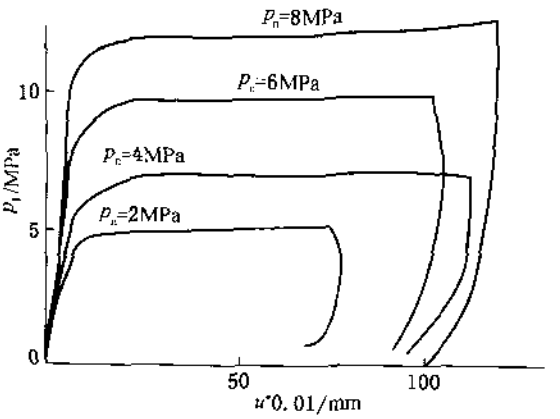
(a) 结构面法向变形特征　　(b) 结构面变形－破坏类型

图 2－26　结构面变形与破坏

法向力不同，其 K_n 可能不变，此时称为常刚度；也可能刚度随法向应力改变，称变刚度，如图 2－27，一般结构面比较坚硬，其 K_s 为前者，如结构面松软，则多属于后者。



(a) 张夏灰岩 NO. 1软弱夹层抗剪曲线



(b) 岗山灰岩 NO. 1试件弱面抗剪曲线

图 2－27　剪力－位移曲线

结构面的抗剪强度可以用库仑准则：

$$\tau = \sigma_n \tan\phi + c \tag{2-44}$$

式中 ϕ，c——结构面上的摩擦角和凝聚力。

对于具有凹凸不平的结构面，其力学模型可简化如下，如图 2－28 所示，受剪切结构面上有突台，突台角 $i=45°$，模型上半部作用有剪力 S 和法向力 N，模型下半部固定不动。在应力较小时，上半部模型受剪力作用开始沿突台斜面滑动，除向右移动外，还向上移动。这向上移动的分量称之为剪胀。S 继续增大，突台根部被剪断，如图 2－28c 所示。此时沿剪断平面滑移。如果材料强度较低，在 S 作用下没有明显的剪胀，在突台根部即发生剪断。从这个模型可以看出，结构面上的粗糙程度，即突台的凸出程度和结构面的强度影响结构的整体抗剪强度，图 2－29 所示为上面模型的剪力和法向力的关系曲线。可以看到它呈双直线的特性。ϕ_r 是残余摩擦角，代表剪断后的摩擦特性。

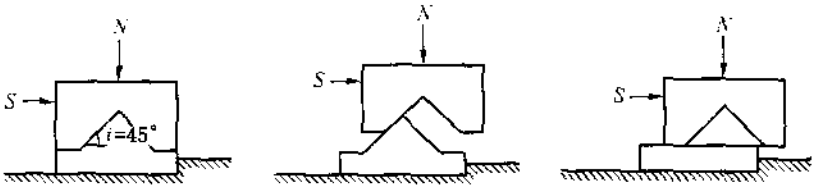


图 2－28　节理剪断机理

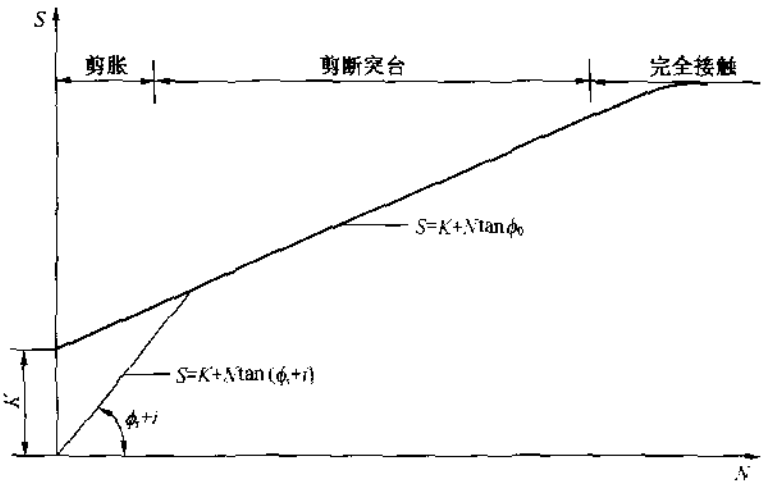


图 2－29　节理剪力－法向应力关系

挪威学者 Barton[27]对节理面的力学特性做了实验研究，他将节理面开始剪切破坏的摩擦角分为 ϕ_b，d_n 和 S_n 三部分，建立节理模型，如图 2－30 所示。ϕ_b 是节理面间的残余摩擦角，一般为 25°～35°，d_n 为峰值时的剪胀角，S_n 为岩石突台强度，故可表示为下式：

$$H/N = \tan(\phi_b + d_n + S_n)$$

Barton 进行了大量试验，其试件长为 2～30m，$\sigma_n = 0.72 \sim 840\text{kPa}$，得近似式

$$\tau/\sigma_n = \tan(2d_n + 30°) \tag{2-45}$$

经验取值：

$$d_n = 10\lg(\sigma_c/\sigma_n) \tag{2-46}$$

式中 σ_c——单轴抗压强度。

由式（2－45）和式（2－46）消去 d_n 得经验公式为

$$\tau/\sigma_n = \tan[20\lg(\sigma_c/\sigma_n) + 30°] \tag{2-47}$$

式(2－47)一般限于非风化、无填充的节理。若岩石试件 σ_c 为 100MPa，试验时 σ_n = 2MPa，则$\tau/\sigma_n \cong 2.06$。采用不同的 σ_c 值，可以得到峰值抗剪强度的一簇曲线及其包络线，并因之推出进一步的经验公式，表征节理面粗糙情况的 JRC 粗糙系数为

$$\text{JRC} = \frac{\tan^{-1}(\tau/\sigma_n) - \phi_b}{\lg(\sigma_c/\sigma_n)} \tag{2-48}$$

式中 τ——峰值抗剪强度；

σ_n——法向应力；

ϕ_b——残余摩擦角，一般在 25°～35°之间，平均值采用 30°。

若岩石的单轴抗压强度以 JCS 代表，则式（2－47）变为

$$\tau/\sigma_n = \tan[(\text{JRC})\lg(\text{JCS}/\sigma_n) + \phi_b] \tag{2-49}$$

JCS 的取值应考虑岩石节理面的风化，如为风化节理面可取 $\sigma_c/4$ 代入。若有水充满节理，则 σ_n 和τ均采用有效应力。

Barton 将岩石的节理面粗糙度分别按形状给出，从而可利用式（2－49）估算出岩体节理面的强度。

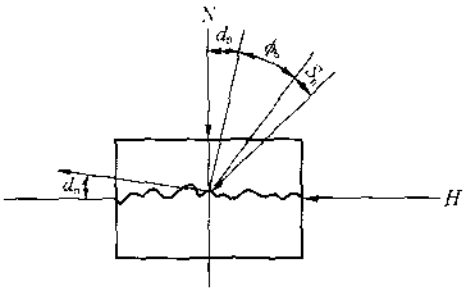


图 2－30 Barton 节理模型

对节理力学效应的研究有助于理解岩体的尺寸效应，Barton 用模型做了不同的节理实验，对于无充填的节理，得到的结论是：当节理块长度从 5～6cm 增加到 36～40cm（相当于实物由 1.5～1.8m 增加到 10.8～12m）时，平均的峰值摩擦角降低 8°～20°。而随面积的增大，平均峰值切应力呈减少的趋势（图 2－31）。

Jaeger[28,29]通过试验表明，节理的抗剪强度与历史有密切关系，如图 2－32 所示。第一次剪切时，节理有很高的强度，同一方向重复进行到了 7 次试验，还可看出节理的峰值与残余强度的区别，但到第 15 次，就看不出节理的峰值与残余强度的区别了。这说明节理的抗剪强度与历史有极大关系。

2）裂隙岩体的强度特征

（1）节理数目对裂隙岩体强度的影响。通过模型试验可知，无论岩体具有水平或竖直节理，当模型实验中节理层数增加时，其强度和变形模量都因节理层数增加而降低，但影响都是逐渐减小，层数再增加变化也不大。原岩强度越高（不同 M 值），降低越多，如图 2－33 所示，其破坏形式也不同。水平节理的破坏是在岩石中间及节理面上出现裂纹并向上下发展而致；竖直节理是以层间分离形式破坏。在变形机制上也不同，前者是节理间

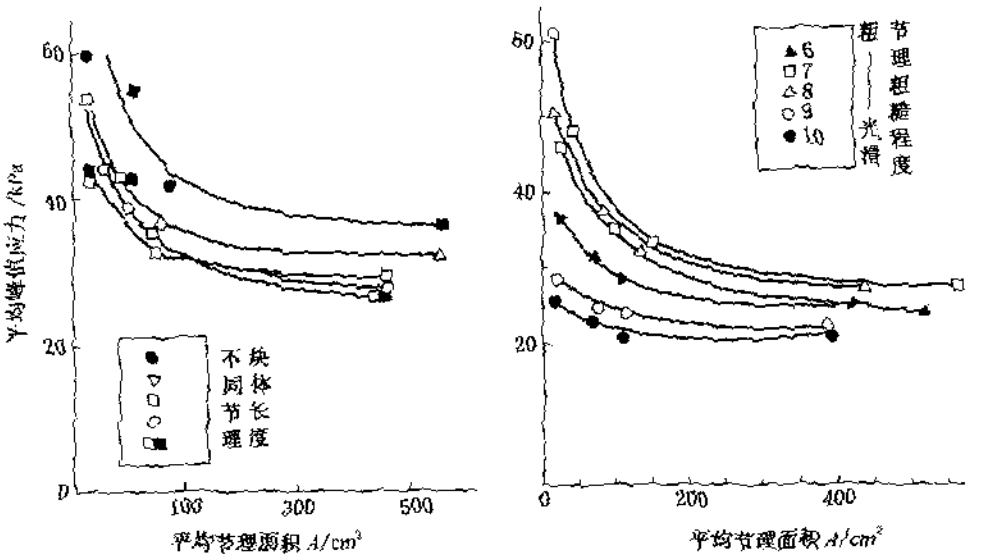


图 2－31　节理面积与峰值切应力之间的关系

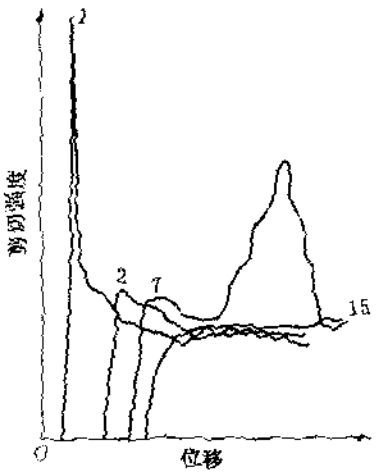


图 2－32　剪切位移与强度之间的关系

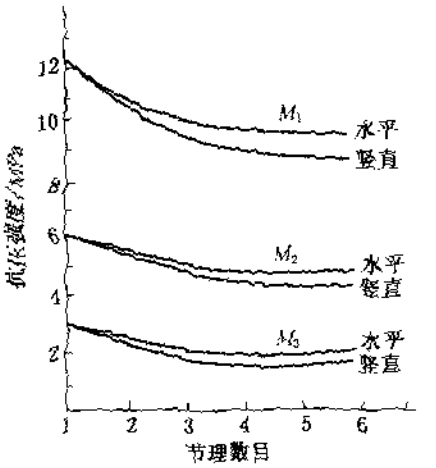


图 2－33　节理数目与强度关系[30]

的刚度起作用，后者是层间侧向约束起作用。

由单元块体组成的三组正交贯穿节理的岩体模型试验结果与水平竖直节理的试验结果相似（图 2－34），强度因节理密度增加而降低，当密度达某数值后，强度和模量的变化趋于稳定。当节理密度达到一定值后，裂隙岩体趋向变成散粒体，岩体性质已有本质变化，故节理面再多，影响也不大。这种组合模型的破坏形式不同于完整试块的破坏。它是渐进型破坏，开始只是其中某几个单元破坏，随后破坏的单元逐渐增多，有时应变已达 30%，却仍有相当完整的单元。

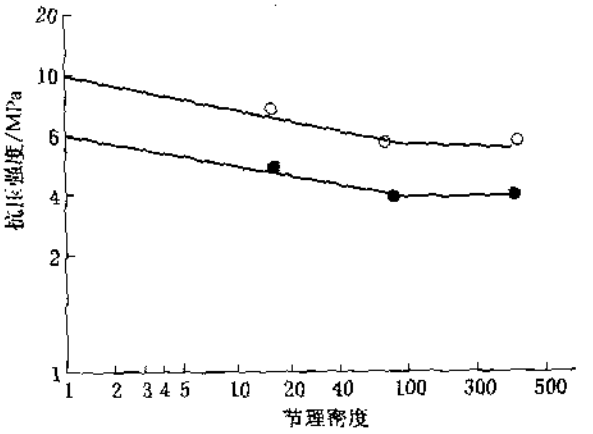


图 2－34　节理密度对岩体强度的影响[30]

（2）节理倾角对裂隙强度的影响。为了解单轴压力与节理面方位之间的关系，用志留纪淤泥岩进行试验（图 2－35）。当层面倾角大于 50°时，岩体以层间剪切形式破坏；当层面倾角为 32°～45°时，岩体以轴向劈裂与层间剪切混合形式破坏；当层面倾角小于 32°时，岩体以轴向劈裂形式破坏。由此可见，抗压强度不仅因层面角度增大而减少，同时破坏形式也发生变化。

图 2－36 表明，强度变形在 30°左右（约等于岩石摩擦角）开始降低，然后在 60°左右再次降低。这是第二组节理在起作用。角度小时破坏形式为节理张开，超过 45°后，破坏形式除节理张开外，还伴随单元体内开裂。

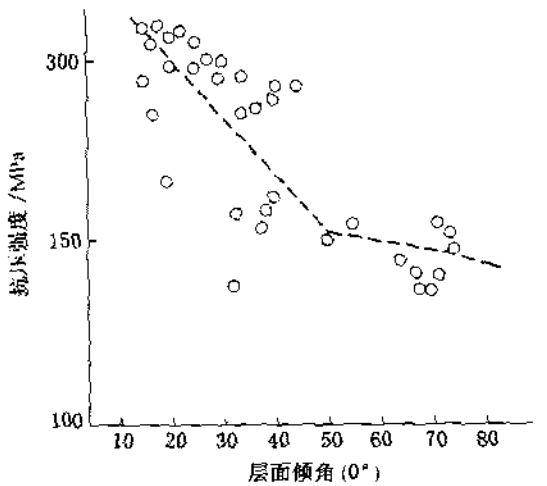


图 2－35　节理层面倾角与强度关系[30]

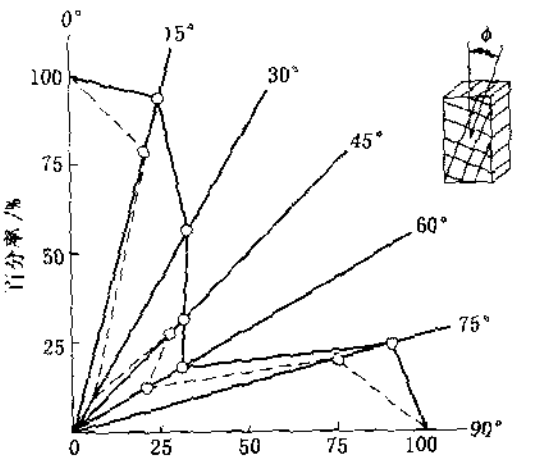


图 2－36　方位角对岩体强度的影响[30]

2.1.6　岩体性质的尺度性

1、固体材料的尺度性

在固体力学中，研究尺度律问题的主要兴趣在于了解结构对名义强度产生什么样的影

响，这是一个非常古老的问题，甚至比材料力学和结构力学出现的时间早[31]。15 世纪的 Leonardo Davinci[32] 就讨论过尺寸效应问题，他宣称："在粗细相同的绳索中，最长的就意味着最不结实；绳索越短，就会越结实。"这意味着绳索的名义强度与其长度是成反比的，当然这是尺寸效应的一种夸张说法。

Griffith[33] 在 1921 年的"Phenomena of rupture and flow in solids"一文中，不但为创建断裂力学打下了基础，而且还把断裂力学引入到尺寸效应的研究中。他的结论是：各向同性固体材料的薄弱部分是由于本身的不连续或疵点引起的，如果能消除这些缺陷，那么工程材料的有效强度将至少增加 10～20 倍。Griffith 在他的实验中阐明了这些结论，实验表明当玻璃纤维的直径从 0.107mm 变化到 0.003mm 时，其名义强度将从 291.45MPa 变化到 3382.99MPa。在 Griffith 看来，决定材料失效的裂纹或疵点只是细观上的，这对于准脆性材料是不适用的，它们的随机分布决定着材料的局部宏观强度。

Bazant[34] 提出，应变软化损伤的局域化形成带状区域，会对达到峰值以后的挠度和结构能量的耗散产生尺寸效应。20 世纪 80 年代初期，基于能量释放的近似分析，Bazant[35] 提出了一个尺寸效应法则的简单公式。这个公式是用来描述在经过大的稳定裂纹扩展之后，准脆性结构名义破坏强度的尺寸效应。20 世 80 年代中期开始，人们对准脆性材料尺寸效应的研究表现出极大的兴趣，许多研究人员在这方面做出了显著的成绩，尺寸效应已经成为混凝土断裂学术会议的一个主要议题[36]。

目前，固体力学中主要有三种有关尺度律的基本理论：①Weibull 的随机强度统计理论；②长裂纹引起的应力重新分布和断裂能量释放理论；③裂纹分形理论，包括表面粗糙度的分形属性和间隙分形特性理论等。

2. 岩石介质的结构尺度性

岩石由于其生成条件及生成后亿万年地质构造作用及大气风化作用，在岩石内部形成各种类型的空隙、微裂隙及肉眼可见的各种缺陷，它们直接影响岩石的物理力学性质。因此，岩石样品大小的不同，常表现出其力学性质的差异，即所谓尺寸效应或比例尺效应。如图 2－24 所示，不同尺度的岩体，其结构性态有着很大的差异。从最小的不含任何天然裂隙的完整岩石单元，到含有两组节理的较大尺度单元，一直到节理的密度和形态可以代表整个岩体多组节理大尺度单元，其力学性质和破坏行为有着很大的不同。

1）节理或弱面

节理或弱面的数量和展布对岩体的强度及力学性质有着很大影响。Durelli 和 Parks[37] 考虑节理等缺陷而影响到尺寸效应。假定边长为 a 的立方体内含有 m 个缺陷，其中每一个在给定应力 p_a 下能够存在的概率为

$$p_a = p_0^m \tag{2-50}$$

类似边长为 b 的立方体内含有 n 个缺陷，其中每一个在给定应力 p_b 下能够存在的概率为

$$p_b = p_0^n \tag{2-51}$$

另外有关系式

$$(n/m) = (b/a)^\beta \tag{2-52}$$

其中 β 为常数，它代表着缺陷的分布形式。对于体积分布，$\beta = 3$。由式（2－50）～式（2－52）得

$$a^{-\beta}\ln p_a = b^{-\beta}\ln p_b = const \tag{2-53}$$

根据 Evans[38] 提出的压缩强度 σ_a 随着立方体边长 a 的指数变化规律

$$\sigma_a = ka^{-\zeta} \tag{2-54}$$

式中 ζ——常数，对于各种煤，其值在 0.17～0.32 之间。

由式（2-53）和式（2-54）得

$$(\sigma_a)^{\beta/\zeta} \ln p_a = \text{const} \tag{2-55}$$

孙广忠[39]综合二滩电站、林县金牛山坝址、“227”隧道、“330”坝址、“728”工程等，统计了节理密度与岩石强度之间的关系，如图 2-37 所示。图中 σ_m 代表岩体强度，σ_b 代表岩块强度，x 代表节理线密度即每米岩体内含节理的条数。从图中可以看出，随着节理线密度的增加，岩体强度呈负指数状衰减。

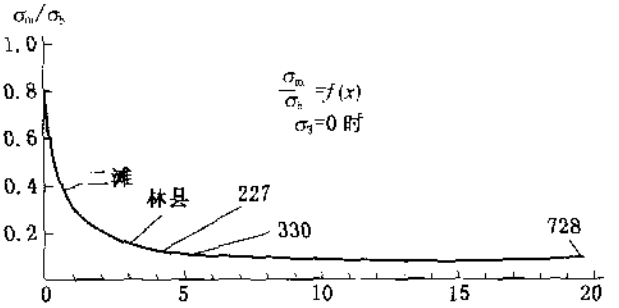


图 2-37 节理线密度对抗压强度的影响[39]

2）颗粒

颗粒尺寸的大小对岩石力学性质也有着较大影响。苏承东[40]曾试验研究了大理岩矿物颗粒大小对岩石破坏及力学性质的影响。试验大理岩采自河南省南阳市南召县，均为白色，主要成分为方解石、白云石和菱镁矿，依结晶颗粒的大小分为粗粒、中粒、细粒和粉粒 4 种，平均密度在 2.7g/cm^3 左右。其中岩块 A 为粗粒变晶结构，粒径为 4～6mm，平均粒径为 5mm，重结晶程度高；岩块 B 为中粒变晶结构，粒径为 1～4mm，平均粒径为 1.5mm，粒度严重不均，结晶程度高；岩块 C 为细粒变晶结构，粒径为 0.5～1mm，平均粒径为 0.7mm，粒度相对均匀，断面似砂糖状，微风化；岩块 D 为粉粒变晶结构，粒径为 0.2～0.5mm，平均粒径为 0.3mm，风化严重，结构疏松。岩块 A、B、C、D 宏观上比较均质，没有明显的缺陷。

所得到应力－应变全程曲线如图 2-38 所示。从图中可以看出，颗粒尺度越小，强度越低，弹性模量越小。在不同的颗粒尺寸条件下，随着石块长径比 L/D 的增加，岩石强度比 σ_x/σ_2（σ_x 代表石块强度，σ_2 代表石块长径比为 2 的标准试块），呈现逐渐减小的趋势，如图 2-39 所示。但是，不同颗粒岩石减小的程度差别较大，其中以粉砂岩最为明显。

3. 岩石抗压强度的尺寸效应

关于岩石尺寸对强度的影响，J. A. Hudson 等[41]曾采用 D = 100mm、D = 50mm 和 D = 19mm 三种不同直径的试块来测试大理岩的强度尺度效应，得到了如图 2-40 所示的应力－

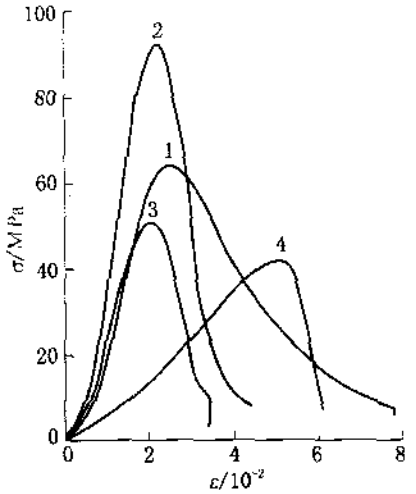


图 2－38　不同颗粒大理岩单轴压缩的应力－应变全程曲线[40]

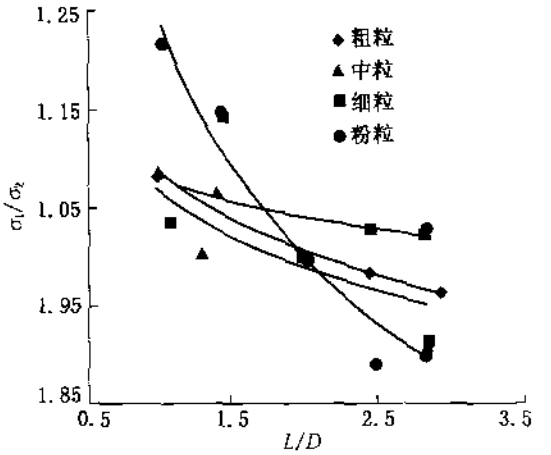


图 2－39　不同颗粒大理岩强度与试样长径比的关系[40]

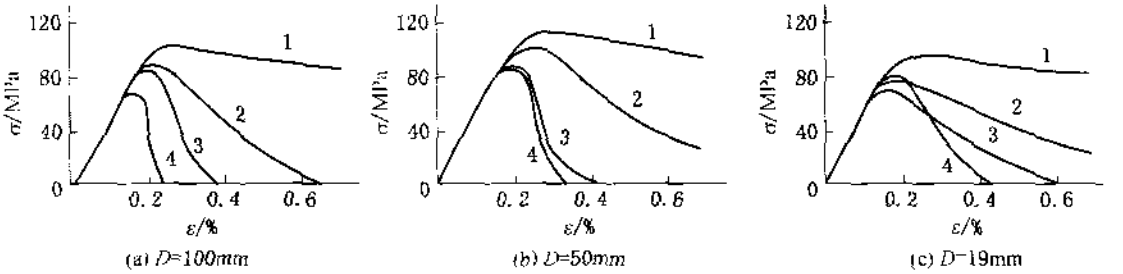


图 2－40　不同直径大理岩强度与试样长径比的关系[41]

应变全程曲线。从图中可以看出，岩石的强度随着长径比的增加而减少。杨圣奇[42]等通过试验也得到了类似的结论，即在直径不变的条件下，随着试块高度增加岩石强度减少，如图 2－41 所示。

刘宝琛等[43]在总结国内外岩石强度尺寸效应结果基础上，提出了用于反映尺度对岩石强度影响的经验公式，即

$$\sigma_c = \gamma_c + \alpha_c \exp(-\beta_c D) \qquad (2-56)$$

式中　σ_c——受力断面边长（长方柱岩体）或受力断面直径（长圆柱岩样）为 D（单位为 cm）的岩样的单向

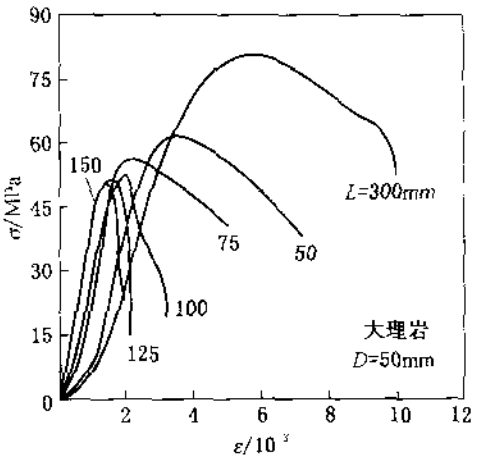


图 2－41　同直径不同长度大理岩的应力－应变曲线[42]

抗压强度，MPa；

α_c，β_c，γ_c——取决于岩石性质及其中天然缺陷状态的待定参数。

理论上，当 $D\to\infty$ 时，岩样强度 σ_c 趋近于岩体强度 σ_m，即

$$\sigma_m=\lim_{D\to\infty}[\gamma_c+\alpha_c\exp(-\beta_c D)]=\gamma_c \tag{2-57}$$

式（2-57）说明，参数 γ_c 就是该种岩体的单向抗压强度，将式（2-57）代入式（2-56）得

$$\sigma_c=\sigma_m+\alpha_c\exp(-\beta_c D) \tag{2-58}$$

理论上，当 $D\to 0$ 时，这是一种极限情况（实际无意义）。当岩样很小时，可以认为其中不包含任何天然缺陷，此时的岩样强度应趋近于原岩（岩石材料）强度 σ_o，即

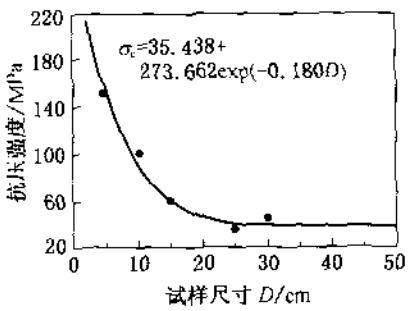
$$\sigma_o=\lim_{D\to 0}[\sigma_m+\alpha_c\exp(-\beta_c D)]=\sigma_m+\alpha_c \tag{2-59}$$

其中，系数 α_c 表示原岩强度与岩体强度之差，其单位为 MPa；系数 β_c 表示岩样强度随尺寸的增大而减少的程度，称为强度衰减系数。

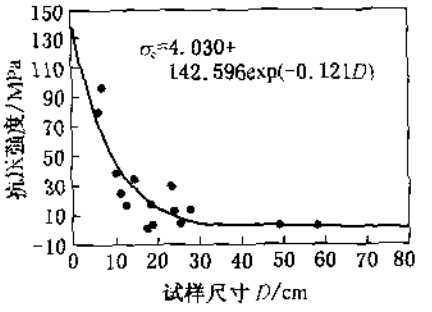
刘宝琛等[43]进一步综合国内外资料，进行了拟合分析见表 2-11。其结果如图 2-42（a）~图 2-42（g）所示。

表 2-11　7 种岩样尺寸及数量

岩石种类	岩样形状	岩样尺寸/cm	试验组数	试验数量
石灰岩	立方体	5~30	6	20
黄石灰岩	圆柱体	5.98~47.85	15	31
煤	立方体	1.9~203	14	62
石英片岩	圆柱体	8~70	3	10
绢云母片岩	立方体	5~25	5	15
闪长岩	立方体	10~276	8	15
铁矿石	立方体	10~100	6	6



(a) 石灰岩



(b) 黄石灰

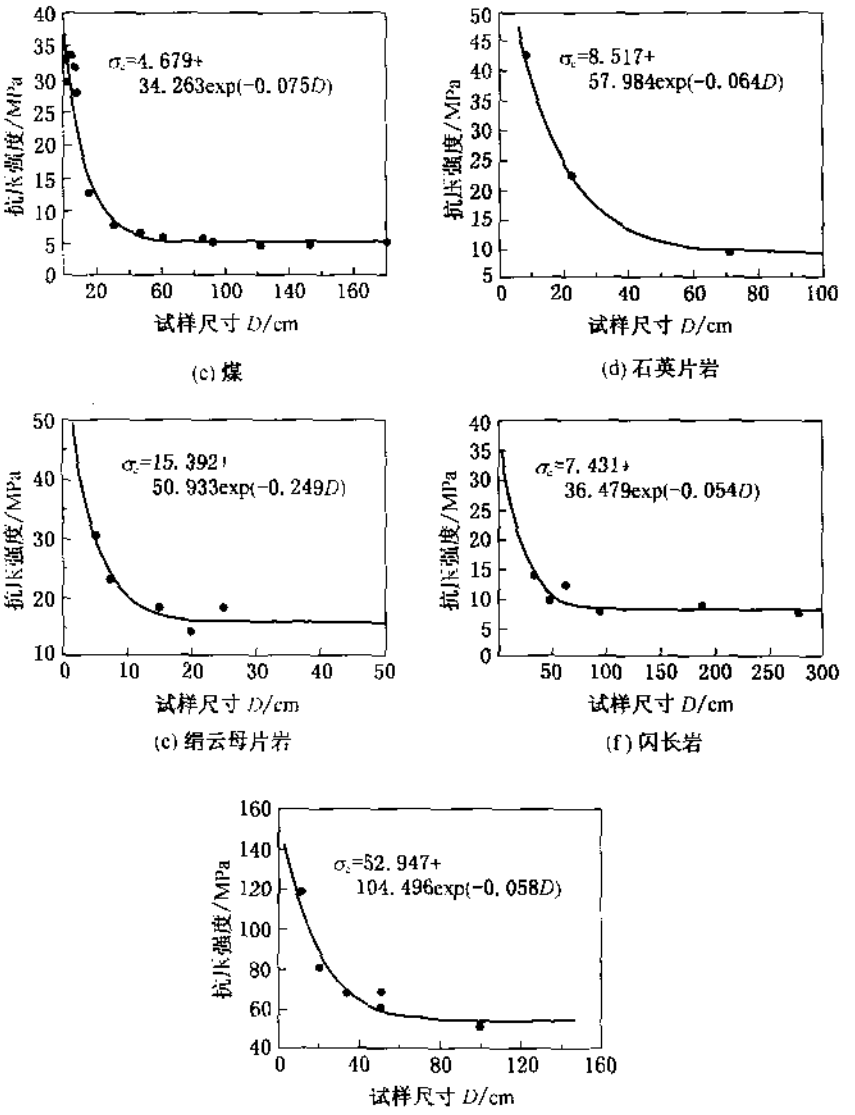
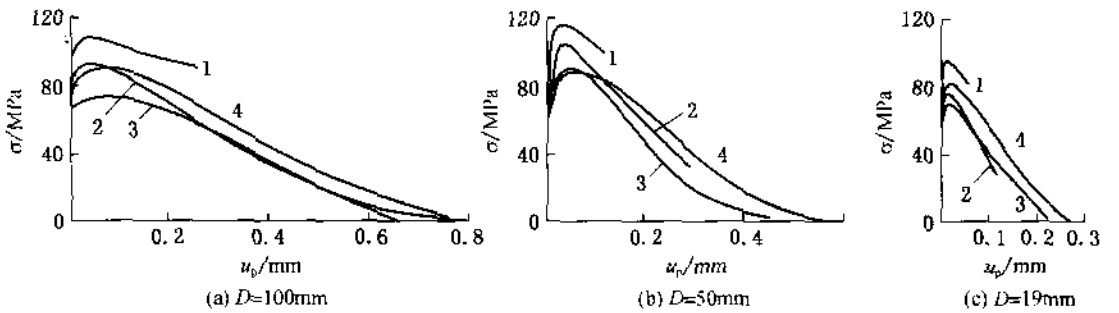


图 2-42　不同岩石抗压强度尺度效应[43]



1，2，3，4—分别表示长径比为 0.5，1.0，2.0，3.0

图 2-43　岩样强度降低与塑性变形量间的关系[44]

从图 2－42 中可以看出，随着试块尺寸的增加，岩石单向抗压强度均近似呈负指数规律衰减。

4. 岩石变形的尺寸效应

一般而言，随着岩石尺寸的增加，其内部节理等弱面的数量也在增加。这些弱面的存在，在外载的作用下，使得岩石在峰值以后的塑性累计变形增加。即呈现出峰值以后的变形特征，从小尺寸试件的弱塑性向着大尺寸试件的强塑性转化，文献［44］对不同尺度岩样试验结果（图 2－43）说明了这一点。

5. 岩石破裂形态的尺寸效应

由于随着岩石尺度的变化，其内部结构与建造发生了变化，因此在不同尺度条件下，岩石的破裂形态也将有很大不同。文献［44］试验表明，在直径一定，试件高度较小时，破裂形态较为复杂；试件高度较大时，试件基本上为单断面的剪切破坏，如图 2－44 所示。这与文献［45］基于 RFPA^{2D}数值模拟的结果（图 2－45）吻合较好。因此，对于岩石的破裂形态，建立在相应尺度进行考察。

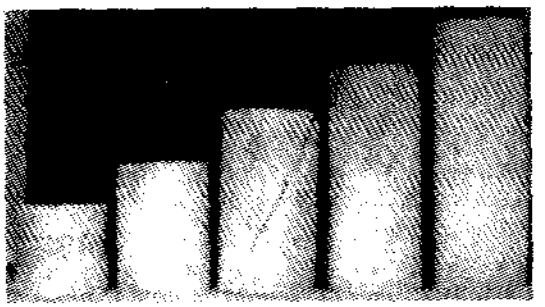


图 2－44　不同高度大理岩样的破坏形式[44]

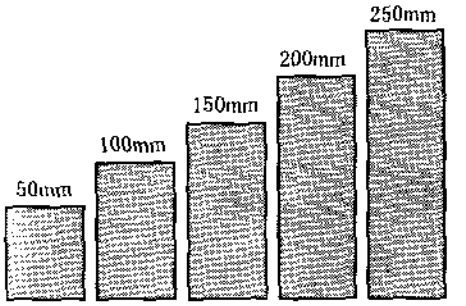


图 2－45　不同高度大理岩样的破坏形式 RFPA 模拟结果[45]

2.2　岩石应力环境的复杂性

2.2.1　地应力及其构成

地应力是指岩体处于天然产状条件下所具有的内应力，有的称为岩体初始应力，或天然岩体内应力。地应力的概念首先是由瑞士地质学家 A. Heim 于 1912 年提出，并假定地壳中任意一点的应力在各个方向上均相等，均等于单位面积上覆岩层的重量的观点（海姆静水压力说）。这种天然的内应力的形成一般认为主要与地球的各种动力运动有关，这些运动包括大陆板块边界受压、地幔热对流、地球内应力、地心引力、地球旋转、岩浆侵入、地壳非均匀扩容以及温度不均、水压梯度、地表剥蚀或其他物理化学变化，并且认为构造应力场与重力应力场是地应力场的主要组成部分。浅层地壳地应力首先主要是由地壳构造运动而产生的水平应力造成的，具有相对稳定性；其次是上覆岩层的自重作用造成的内应力、变异应力及其他应力。地应力按其成因可分为自重应力、构造应力以及变异和残余应力等。

1. 自重应力

研究及实践已基本证明，在未受构造运动影响的地区，在处于某一深度的岩层中，覆盖岩层重量所引起的垂直压应力可由式（2－60）表示：

$$\sigma_z = \gamma H \tag{2-60}$$

式中 σ_z——作用于该点的垂直压应力，kPa；

H——该点距地表深度，m；

γ——覆盖岩层的平均重力密度，kN/m^3。

如果假设该岩层是基本均质的弹性体，其弹性模量用 E 表示，则对照图 2－46 所示的单元体的平衡条件有 $\sigma_x = \sigma_y$，$\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\left(\dfrac{\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma_z}{E}\right) = 0$

即 $$\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) = 0$$

由此可得出该点在垂直压应力作用下产生的水平压应力为

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z = \lambda\gamma H \tag{2-61}$$

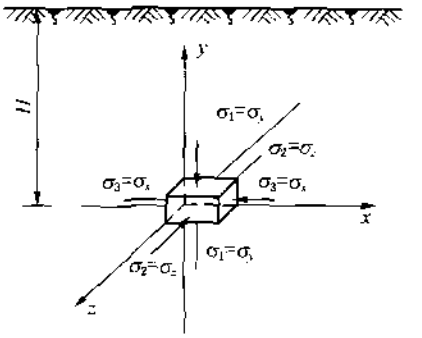


图 2－46 地下岩石单元应力分析

式中 μ——岩石的泊松比（横向变形比例系数）；

λ——侧压系数。

$$\lambda = \frac{\mu}{1-\mu} \tag{2-62}$$

显然，μ 值愈大，该岩石在垂直压应力作用下产生的水平压应力（侧向压应力）也愈大。

地下各种岩石的泊松比值相差很大，矽质及硅质胶结的坚硬砂岩 $\mu = 0.1 \sim 0.15$；泥质胶结的岩石，如泥质页岩 $\mu = 0.3 \sim 0.35$；含蒙脱石等成分的泥质胶结岩石，遇水时 μ 值可达 0.5。此时，$\lambda = 1$，岩石将处于静水压力状态之下，这些正是在软岩中开掘硐室维护困难的原因。

2. 构造应力

指由构造运动而产生的地应力。以往构造所形成的内应力在岩体中残留下来的又称残余应力，近期和现代构造运动所形成的还在活动的内应力又称活动性内应力。构造应力的基本特征是具有较高的水平压应力。

其特点为水平压应力大于垂直应力；具备各向异性十分明显，垂直褶皱走向的水平压应力比沿走向的水平压应力大得多。据此可以区别于自重应力场，已有大量实测资料表明，大多数地区的地应力状态是以水平应力为主，这说明构造运动在地壳岩体天然应力的形成中起着主导作用；地应力在应力场随时间而变化，各时期的特点和历次变化情况，均可由遗留下的构造形迹加以辨认和确定。

3. 变异应力及其他应力

有的地应力是由于岩体的物理、化学变化而引起的，当岩体发生了变异时往往引起岩体体积变化，引起岩体中天然应力的积累和变化。这种地应力一般仅是局部的，强度也不像构造应力那样大，岩浆活动也常形成地应力，当岩浆侵入时沿接触带产生很大的压应

力。

由温度升高引起的岩石膨胀而产生的应力 σ_T 可以表示为

$$\sigma_T = \alpha \cdot \beta \cdot E \cdot H \tag{2-63}$$

式中 σ_T——岩体的温度膨胀应力，kN/m^3；

α——温度升高梯度；

β——岩体线膨胀系数；

E——岩体弹模；

H——岩体的埋深。

2.2.2 地应力场的尺度特征

地应力的分布具有一定的尺度性，从大尺度上讲，地应力是由全球岩石圈应力场的分布与演化所控制；从小尺度上讲，区域地应力将受到区域地质构造及其运动影响。

1. 全球地应力特征

岩石圈弹性部分（地表以下 10～35km）中的应力主要来自两种类型力的作用[46]。第一种类型力产生“构造应力”，是指作用在岩石圈中的一种大尺度、大范围，由构造运动引起的力，是岩石圈应力的主体部分。这种类型的力主要包括：①产生于岩石圈底部的剪切力，它起驱动或阻滞板块运动的作用；②俯冲带上板块前缘下插的牵引力，平衡板块俯冲于软流圈时产生的阻力；③洋脊推力，高热岩浆沿洋脊上涌形成向两侧的推力；④海沟引力，由于海沟负地形产生的大陆板块向海洋板块运动方向的力（图 2－47）。第二种类型力产生“局部应力”，是指受地形、岩性非均匀特性和局部构造变形影响而产生的一种小尺度、小范围的附加应力，是岩石圈应力的非主体部分。这种力通常产生于地形起伏变化较大地区、板块弯曲部位和地表浅部。岩石圈中的应力主要取决于板块的构造运动，板块运动驱动力的大小决定着岩石圈应力的强度，而岩石圈的应力状态又确定着构造变形的特征以及板块边界和板块内部的地震活动。

文献［46］通过最新获得的全球现代构造应力分布图像和分析其与板块构造运动之间的联系，认为：

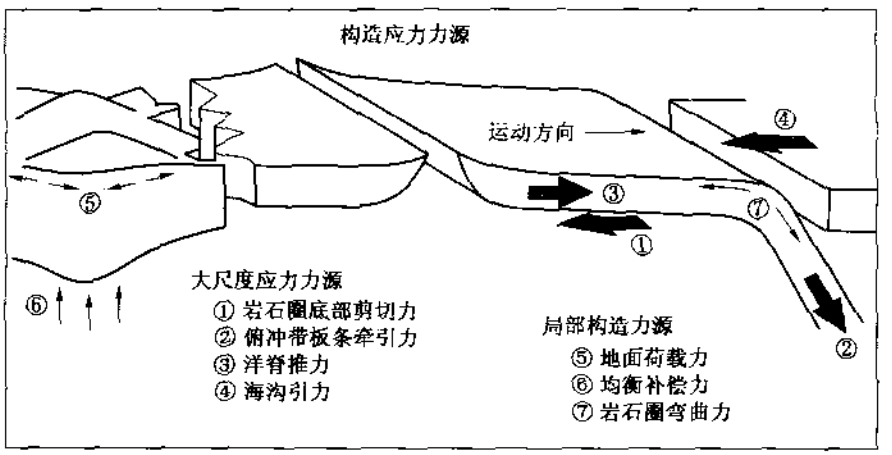


图 2－47 岩石圈中应力的力源示意图[46]

（1）全球存在大尺度统一性构造应力场，板块部存在一级和二级应力场，一级应力场是与板块运动有联系的应力场，二级应力场是由局部原因，如岩石圈横向密度差异、局部热活动等引起的地区性应力场。

（2）大多数板块中部地区表现为挤压应力作用的特征，它们的应力结构多为逆断型、走滑型或逆走滑型。

（3）大陆板块内部的扩张区（正断裂或正走滑断裂）大多位于异常高海拔地区，例如，美国西部的盆地山脉、东非裂谷、贝加尔裂谷、青藏高原和安第斯山脉。

（4）全球大部分地区的地壳上部经受着方向较为一致的应力场作用，如占世界陆地面积1/8的北美中、东部地区处于北东到北东东挤压构造应力作用之下，而欧洲西部地区处于北西到北北西挤压构造应力作用之下。

（5）全球大部分地区的最大水平主应力方向与板块运动（角速度）迹线保持较好的一致性，反映出构造应力与板块运动的关系密切。

（6）板块汇聚、洋脊扩张可能是产生岩石圈上部构造应力的主要力源，而板块底部的拖拽主要影响岩石圈下部应力状态。

2. 中国地应力特征[46]

中国东部及邻近地区，现代构造应力场的主体特征表现为近东西向挤压。其中，中国华北—东北地区的主压应力方向以北东东—南西西方向为主导，而中国华南地区以南东—北西到南东东—北西西方向占优势的特点十分明显（图2－48）。在中国西部地区，现代

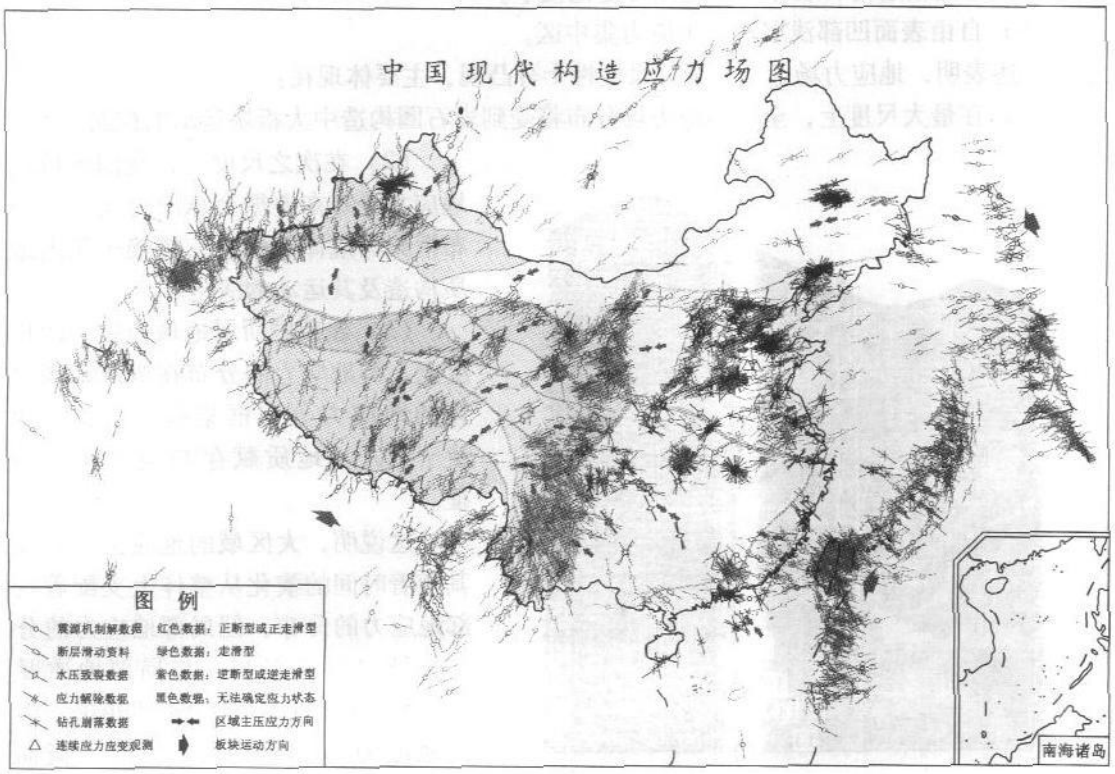


图2－48　中国现代构造主压应力方向分布（引自“中国大陆地壳应力环境基础数据库”）

构造应力场的主体特征为主压应力方向为北北东—南南西。在青藏高原北、东边缘，构造应力场的主压应力方向从北北东—南南西方向变化至南南东—北北西方向（图2－48）。在青藏高原南部地区，地壳上部的现代构造应力表现为近东西方向拉张的正应力状态；在鄂尔多斯地块周边，现代构造应力以拉张为主，应力方向和结构与华北区域构造应力场有明显的不同。

3. 大安山矿后槽应力场分布特征

通过对大安山矿后槽区域应力场数值模拟分析（图2－49、图2－50）表明：

（1）最大主应力大小分布的总体趋势是随深度的增加而逐渐增大。但是，最大主应力的增大并不是随深度增加而呈等梯度增大。并且从模拟结果可以看出：整个后槽区域最大主应力为水平应力。

（2）断层附近的主应力方向发生不同程度的变化。在断层附近主应力方向与边界应力方向呈一定夹角。在断层中部，最大主应力的方向趋向于垂直于断层，变化程度较小；在断层的两端，最大主应力方向的变化比较大；远离断层，最大主应力方向逐渐趋于与边界应力方向一致。

（3）在断层端部容易形成应力集中区。但是，断层内部区域处在应力降低区。

（4）由于煤层与岩层本身应力场矢量的叠加，煤层与断层交界处附近区域主应力的大小和方向变异性较大。

（5）由于煤层与岩层弹性性质相差较大，在煤层与岩层交界处主应力变化较大。但两种材料属性相近的岩层界面间主应力变化较小。

（6）自由表面凹部浅层也产生应力集中区。

上述表明，地应力场十分复杂，尺度性十分凸现，主要体现在：

（1）在最大尺度上，全球地应力场分布将受到岩石圈构造中大板块运动的控制。

（2）在次之尺度上，我国区域内地应力分布在遵循全球应力场基本分布框架与规律基础上，依赖于我国地质构造及其运动的演化。

（3）在我国所属地域内较小的尺度上，其地应力的分布在服从我国总体的地应力分布框架基础上，将取决于该区域地质赋存与地质运动特征。

这说明，大区域的地应力分布及其随着时间的演化从整体上支配着局部地应力的分布，但局部地应力的分布特征又形态各异，与局部地质赋存、地质构造及其运动密切相关。因此地应力场十分复杂，不能一概而论，应当针对具体的岩石力学工程条件，从不同尺度上进行探察。

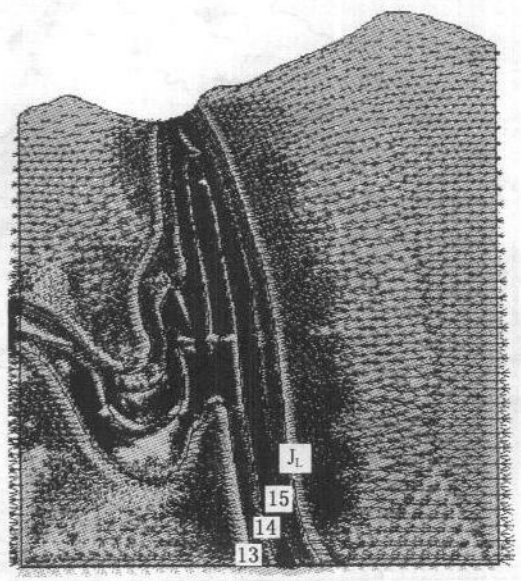


图2－49　第Ⅸ勘探线垂直剖面主应力矢量图

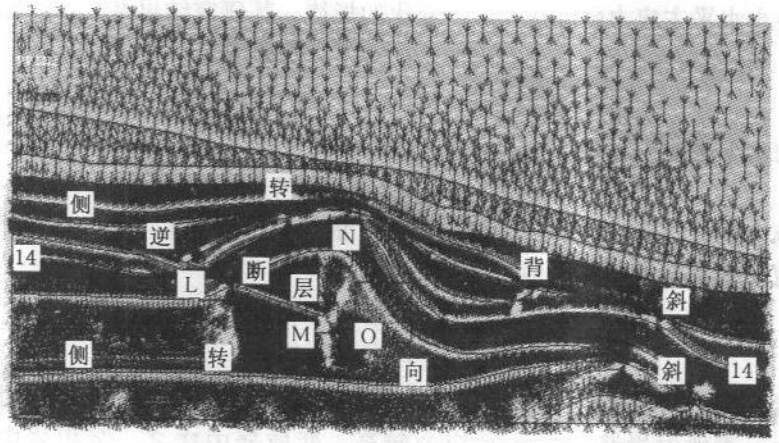


图 2-50　水平剖面模型主应力矢量图

2.2.3　区域地应力分布的基本规律

N. Hast[47] 于 20 世纪 50 年代在斯堪的纳维亚半岛进行了实际地应力测量，得出了地壳上部地应力分布的基本规律。对于地应力测量得到的主要认识为

（1）地壳中主应力为压应力且方向基本上是铅直和水平的。测量结果表明，一个主应力的方向并不总是铅直的，但与铅直方向的夹角小于 30°，故可认为一个主应力基本上是铅直的，另外两个主应力基本上是水平的。铅直应力的大小与上覆岩层的重量有关，可以式（2-60）进行计算。

（2）垂直应力随深度呈线性增长。G. Herget[49] 经统计研究，得出了垂直应力随着深部变化的基本规律为

$$\sigma_Z = (19 \pm 12.6) + (0.266 \pm 0.028) H \tag{2-64}$$

我国朱焕春[48] 等通过实测统计得到了类似的结论，如图 2-51 所示。

（3）水平应力分布变异性大。水平应力主要受到构造的控制，其变异性较大，主要体现在：

①最大水平应力分量绝大多数大于垂直应力分量。根据国内外实测资料统计，$\sigma_H/\sigma_Z = 0.5 \sim 5.5$，大部分在 0.8～1.2 之间，最大值有的达 30 或更大[19]。

②地壳内第一主应力方向接近水平，它与水平面夹角多数小于 30°。

③水平应力另一特点是两个应力分量不相等，一大一小具有明显的方向性，一般最大水平应力 $\sigma_{H\max}$ 和最小水平应力 $\sigma_{H\min}$ 相差 1.4～3.3 倍。

$$\sigma_{H\max}/\sigma_{H\min} = 1.4 \sim 3.3 \tag{2-65}$$

根据我国地应力测量资料，在地层 500m 以

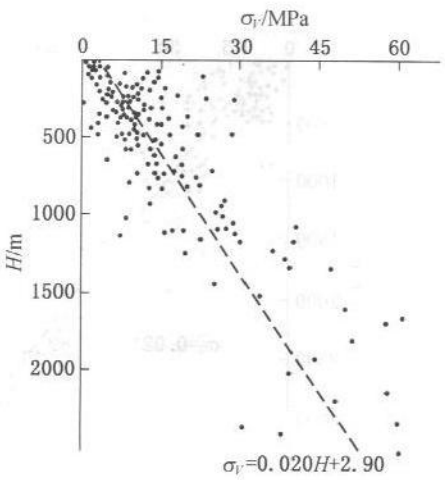


图 2-51　实测垂直应力随深度分布[48]

上的最大及最小水平主应力随深度（Z）变化的规律，其研究结果是

$$\bar{\sigma}_{H\max} = (4.5 \pm 2.5) + 0.049Z \tag{2-66}$$

$$\bar{\sigma}_{H\min} = (1.5 \pm 1.0) + 0.030Z \tag{2-67}$$

我国平均水平主应力随深度的变化关系为

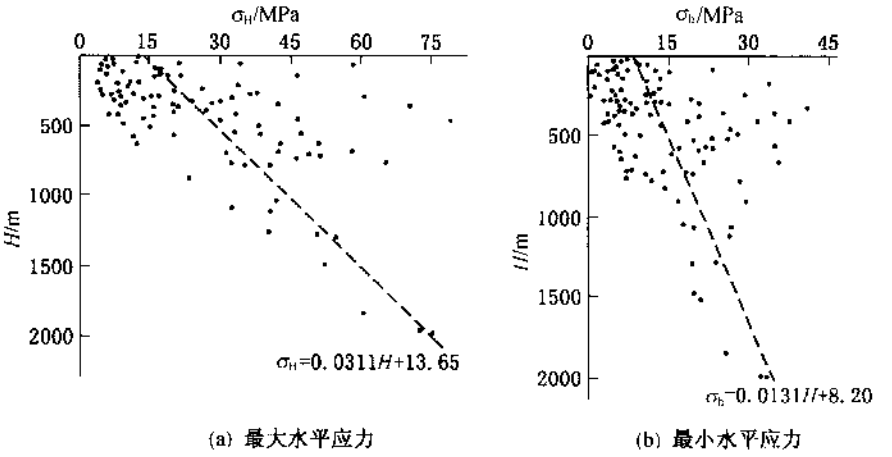
$$\bar{\sigma}_{Hav} = (\sigma_{H\max} + \sigma_{H\min})/2 = 0.72 + 0.041Z \tag{2-68}$$

④水平应力随着深度变化表现的各向异性。依据我国埋深在500m以内地层的测量资料，水平应力与垂直应力之比值随深度而变化为

$$\sigma_{H\max}/\sigma_V = 150/Z + 1.4 \tag{2-69}$$

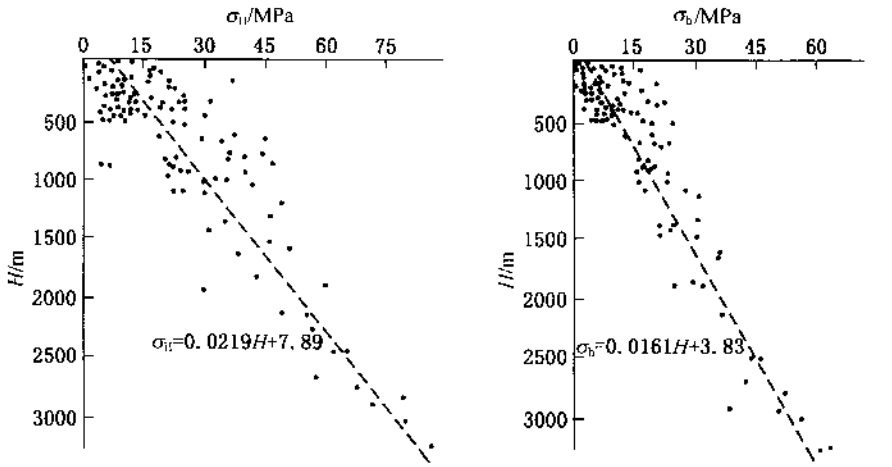
$$\sigma_{H\min}/\sigma_V = 128/Z + 0.5 \tag{2-70}$$

⑤随着岩性的不同，水平地应力随着深度增加的梯度将不一样，从本质上讲，体现在岩石的成因上，表现为岩浆岩中水平应力较高，变质岩中次之，沉积岩中最低。文献[48]研究的结果（图2-52）说明了这一点。



(a) 最大水平应力　　(b) 最小水平应力

(1) 岩浆岩



(a) 最大水平应力　　(b) 最小水平应力

(2) 沉积岩

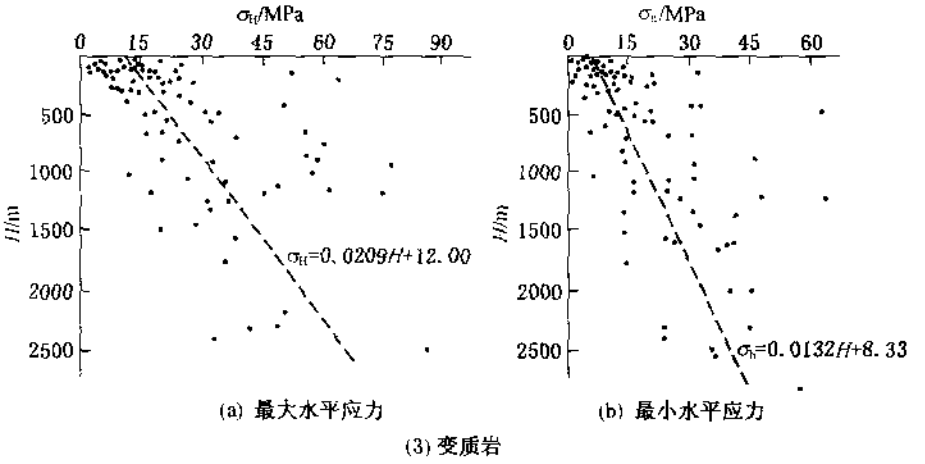


图 2-52 不同岩石地应力随深度分布[48]

(4) 最大主应力的方向具有区域相对稳定性。在相对平坦的地区和离地表较深处的地应力测量结果是可以代表这个地区的应力场特点的。最大水平主应力方向尽管存在着局部变化，但是在一个相当大的区域内，最大主应力的方向是相对稳定的，因为它受区域构造的控制。

地应力是地球发展运动的结果，其取决于历次构造运动所产生的应力，地壳升降运动引起的加荷、卸荷，岩浆活动的温差应力，岩体物理力学性质的变化等。但是，目前还不可能做到以地球发展的历史为根据去求解可供工程应用的初始地应力场。可供工程应用的初始地应力值，主要依据实测资料，由于现场实测难度大，不可能大量进行，因此如何利用少数测点去确定满足工程需要的区域的初始地应力场问题，一直是岩石力学界研究的一个热点和难点问题。

2.3 岩体力学本构模型的复杂性

岩石本构理论就是研究岩石在力学、物理、化学作用下岩石的力学行为，是岩石力学研究的核心问题。目前，在宏观唯象学基础上发展起来的岩石弹塑性理论、流变学理论以及损伤理论已得到充分发展和完善，并且广泛应用于岩土工程中，解决了许多具体工程问题。然而，由于岩石是一种结构非常复杂的地质材料，其力学性质的复杂性和差异性决定了其本构关系不可能简单地按照某一种模型就能满足工程的要求，这就需要针对不同岩石力学在特定应力环境下的力学行为建立相应的本构关系，任何一种模型都不可能“包打天下”，这也是岩石力学不同于其他固体力学的重要特点。

2.3.1 岩石弹塑性本构模型[51]

1. 非线性弹性模型

严格来说，岩石类介质的应力应变关系都是非线性的。仅仅是由于在解决实际工程问题的过程中，有时在数值计算上遇到困难，有时考虑按非线性计算目前花费代价过大，而在问题本身的非线性程度并不高的情形下，才按线性模型简化计算。但是，对于大多数岩

石力学问题，要想得到工程上满意的结果就必须采用非线性计算，否则所得到的结果不符合实际。

对岩石类介质采用的最简单的非线性模型是非线性弹性模型，其本构关系一般可写为

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{2-71}$$

或

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2-72}$$

其中，σ_{ij}和ε_{ij}分别是应力张量和应变张量，它们都是二阶对称张量。而C_{ijkl}和D_{ijkl}是四阶的弹性系数张量。

若假设岩石变形是各向同性的，则对于一个各向同性的四阶本构张量，可以证明仅含两个独立的材料系数。这时式（2-71）和式（2-72）可以改写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{2-73}$$

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \tag{2-74}$$

式中 δ_{ij}——克罗内克记号；

E——杨氏模量；

μ——泊松比；

G——剪切模量；

K——体积模量。

以上都是应力不变量或应变不变量的状态函数。

在岩石力学中使用得相当广泛的非线性弹性模型是 Duncan－Chang[52]。在该模型中，材料模量E和μ为双曲线形式的表达式，由三轴试验可得出杨氏模量E和泊松比μ为

$$E = \frac{1}{\dfrac{1}{E_0} + \dfrac{\varepsilon_1}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}} \tag{2-75}$$

$$\mu = \mu_0 - d\cdot\varepsilon_3 \tag{2-76}$$

式中 ε_1，ε_3——轴向应变和径向应变；

$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$——应变$\varepsilon_1$趋于无限大时极限的主压应力差值；

d——实测参数；

E_0，μ_0——初始模量，它们随围压变化，由实验知：

$$E_0 = Kp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \tag{2-77}$$

$$\mu_0 = G - F\log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) \tag{2-78}$$

式中 K，n，G，F——实测参数；

p_a——大气压，与围压σ_3的量纲相同。

该模型对土体比较适合，但对岩石大部分不符合。

2. 塑性模型

当岩石类介质内的应力超过一定限度（称为弹性极限或屈服应力）时，在撤去外加作用后其应变仅有部分是可恢复的，另一部分为不可恢复的，称为不可逆变形或塑性变

形。岩石类介质的塑性变形应在宏观意义下去理解，也就是说，在塑性变形中不仅包括岩石介质内微破裂的发生和裂隙错动的积累所造成的部分的不可逆变形，还包括与微观尺度的不均一性和不连续性引起的残余应力相对应的那部分未恢复的弹性变形。总之，这些塑性变形与材料内部结构的永久性变化有关，这种永久性变化反映了材料的变形历史。弹塑性材料模型的应力应变关系不仅与当时状态有关，也与变形的历史或变形路径有关。这种性质称为历史相关性或路径相关性。于是，弹塑性介质的本构关系在原则上应以增量形式或速率形式表述，而不能以全量形式表述。

如果以应力张量为基本未知量，那么在应力空间中表述的本构方程为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} &= C_{ijkl}\mathrm{d}\sigma_{kl} + \frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} < \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl} >, \quad \text{当} f(\sigma_{ij,k}) = 0 \\ \mathrm{d}\varepsilon_{ij} &= C_{ijkl}\mathrm{d}\sigma_{kl}, \quad \text{当} f(\sigma_{ij,k}) < 0 \end{aligned} \tag{2-79}$$

式中 $f(\sigma_{ij,k})$ ——屈服函数。

括号 $<\ >$ 的含义是

$$< x > = \begin{cases} x, & \text{如果 } x > 0 \\ 0, & \text{如果 } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{2-80}$$

A_1 是 σ_{ij} 和 κ 的已知函数，其表达式为

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial \kappa} h \tag{2-81}$$

$$h = \begin{cases} \sigma_{ij}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{当 } \kappa = \omega^P \text{（塑性功）} \\ \delta_{ij}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{当 } \kappa = \theta^P \text{（塑性扩容）} \\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{当 } \kappa = \bar{\varepsilon}^P \text{（等效塑性应变）} \end{cases} \tag{2-82}$$

式中 κ——塑性内变量，其可以是塑性功、塑性扩容或等效塑性应变。

在式（2－79）尖括号内的表达式 $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 大于零、等于零和小于零分别对应于加载、中性变载和卸载。这个判据就是应力空间表述的加－卸载准则。然而这个准则仅适用于硬化材料（屈服应力随内变量的增大而提高的材料）。因为对于理想塑性材料，加载时和中性变载时都有 $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} = 0$；对软化塑性材料，在加载和卸载时都有 $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} < 0$，因而在应力空间中无法给出合理的加－卸载准则（图 2－53）。

在普通的试验机上做单轴和低围压三轴试验，岩石介质表现为脆性破坏。然而在刚性试验机（加载系统的刚度很大）上做上述试验，却可得到包括硬化和软化阶段的全部的应力－应变曲线。在岩石力学中，将这样逐渐的而不是突然的破坏过程称为渐进破坏。为此，岩石类介质的本构关系在原则上应在应变空间中表述，它是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_{ij} &= D_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \frac{1}{A_2}D_{ijmn}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} < \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}C_{pqkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} >, \quad \text{当} f = 0 \\ d\sigma_{ij} &= D_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}, \quad \text{当} f < 0 \end{aligned} \tag{2-83}$$

其中

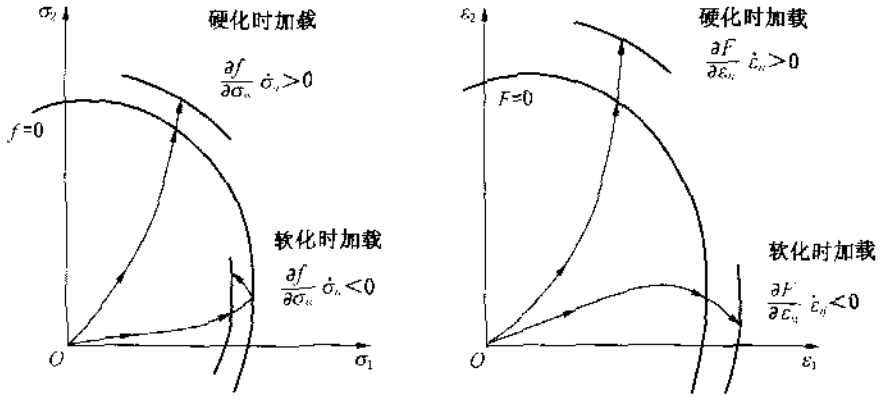


图 2－53　加载与卸载屈服面

$$A_2=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}-\frac{\partial f}{\partial \kappa}h \tag{2-84}$$

在式（2－83）右端尖括号内的表达式$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}C_{pqkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$大于零、等于零和小于零分别对应于加载、中性变载和卸载。这个判据称为应变空间表述的加－卸载准则。这个准则对硬化、软化和理想塑性材料是普遍适用的。

上面给出的本构方程是在假设塑性势函数存在的前提下导出的，因此称其为塑性势理论。如果取屈服函数为塑性势，即$g\equiv f$，这时塑性应变增量矢量垂直于现时屈服面。这种塑性变形规律称作关联的流动规律或正交法则。如果塑性势函数与屈服函数不同，即$g\neq f$，则称作非关联的流动规律。大部分实验资料表明，岩石类介质的塑性变形不满足正交法则，因而非关联的塑性势理论在岩石工程计算中曾经得到广泛的应用。

2.3.2　岩石流变本构模型

流变是岩石的显著特征，几乎所有岩石都存在不同程度的流变性，特别是在高围压条件下。建立弹黏塑性介质的本构方程通常有两种方法。最直接了当的方法是假设岩石类介质的总应变率可以分解为弹性的、塑性的（瞬时的不可逆应变）和蠕变的（与时间有关的具有有限速率的不可逆应变）三个独立的成分，而且每部分应变遵守各自的本构规律。于是，本构方程可写为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}+\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}<\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}>+\eta(J_2^C,\ J_2)\sigma_{ij} \tag{2-85}$$

其中，η是黏性系数，通常它是蠕变应变ε_{ij}^C的第二不变量和应力偏张量的第二不变量的函数，具体函数形式由简单受力条件下的材料蠕变试验确定。这种方法建立的模型有时称为弹性－塑性－蠕变模型。

另一种方法是将蠕变现象与塑性现象耦合在一起来考察[53]，这种模型称为耦合模型。由于在实际观测中很难将塑性变形和蠕变变形严格地区别开来，这种耦合理论可能更具有实际意义。在这种模型中假设总应变率可以分解为纯弹性的和黏塑性的两部分，则本构方程具有如下形式

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \gamma < 1 - \frac{\omega^{\mu P}(t)}{f^*} > \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2-86}$$

其中，弹性系数 C_{ijkl} 可以是应力张量的不变量的函数，g 是黏塑性势函数。方程

$$f^*(\sigma_{ij}) - \omega^{\mu P}(t) = 0 \tag{2-87}$$

为黏塑性屈服条件或称为松弛边界面方程。其中 $\omega^{\mu P}(t)$ 是黏塑性功，其表达式为

$$\omega^{\mu P}(t) = \int_0^t \sigma_{ij}(t)\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mu p}\,\mathrm{d}t \tag{2-88}$$

初始屈服面对应于应力空间的一个点，即初始屈服应力为零。γ 是控制黏塑性流动速率的流度参数，它是时间 t 和黏塑性应变张量 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mu p}$ 的不变量的函数。不可逆的体积变形率为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mu p} = \gamma < 1 - \frac{\omega^{\mu P}(t)}{f^*} > \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij} \tag{2-89}$$

在应力空间中 $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij} > 0$ 定义了岩石发生扩容的区域。这时黏塑性耗散的机制是沿微裂纹的摩擦滑动和新裂纹的产生占优势。相反的不等式定义了不可逆的压缩变形，这时微空穴的破坏和微裂纹的闭合占优势。对应于 $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij} = 0$ 的状态是扩容的门槛边界。

2.3.3 岩石损伤本构模型

损伤力学是近 30 年发展起来的一门新的学科。Kachanov[54] 于 1958 年提出连续度的概念，Rabotnov[55] 于 1963 年提出“损伤因子”的概念，1977 年法国的 Lemaittre 和 Chaboche[56] 等学者运用连续介质力学的方法，基于不可逆过程热力学原理，初步建立起了“损伤力学”学科。Krajcinovic[57] 于 1981 年运用热力学等理论对岩石类脆性材料的本构方程进行了较为全面的研究。由于损伤力学是研究受损材料的损伤演变规律及其破坏的理论，其核心问题是建立损伤模型，即确定损伤变量及其转化问题，在一定程度上弥补了其微观和细观研究的不足。到目前为止，确定损伤变量及其转化问题，研究岩石力学损伤的方法主要有：能量损伤、几何损伤、分形损伤和统计损伤等主要模型。

1. 能量损伤模型[58]

不同材料由于其组成成分和孔隙结构的不同，在损伤过程中表现的特点也不同。岩石材料在损伤过程中，不断产生新的裂隙，这不仅使岩石的弹性模量降低，而且使塑性应变增大。这就需要考虑塑性应变随着损伤的演化而增大的现象的事实。秦跃平[58] 定义损伤应变能释放率为岩石从完整的无孔隙、裂隙等缺陷的无应力状态，经过准静态过程，到最终破坏完全失去承载能力，单位体积所消耗的机械能。在该过程的起始状态和最终状态，因岩石所受应力均为零，故岩石的弹性能在起始状态和最终状态均为零，岩石损伤应变能释放率等于该过程中外界所做的功。

岩石从完整的无孔隙、裂隙等缺陷的无应力状态，经过准静态过程到达某一状态时，单位体积所消耗的机械能与损伤应变能释放率的比值定义为岩石的损伤。岩石在完整的无孔隙裂隙等缺陷的状态时，损伤为 0，岩石完全破坏时的损伤为 1。由于在过程中的某一状态点，岩石具有承载能力，在受力状态下，其内部必然储存有弹性能，因此，外界做功并不等于损伤所消耗的机械能。根据能量守恒定律，外界所做功等于损伤消耗的机械能与岩石内部储存弹性能的增量之和：

$$\delta a = \mathrm{d}u + \delta w \tag{2-90}$$

式中 a——外界对单位体积岩石所做的功，即比功；

u——单位体积岩石内储存的弹性能，即比弹性能；

w——单位体积岩石由于损伤所消耗的机械能，即消耗的比机械能。

$\mathrm{d}u$ 表示比弹性能的增量，δa 和 δw 表示比功和比机械能增量。

据损伤的定义，损伤所消耗的比机械能可表示为

$$\delta w = \gamma \mathrm{d}D \tag{2-91}$$

式中 γ——损伤应变能释放率，Pa 或 MPa；

D——损伤，无量纲。

定义连续性因子 φ 为

$$\varphi = 1 - D \tag{2-92}$$

进一步假设岩石的弹性模量和弹性应变均与连续性因子的平方根成正比，用公式表示为

$$E = \sqrt{(1-D)}E_0 = \sqrt{\varphi}E_0 \tag{2-93}$$

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p = \sqrt{(1-D)}E_0 = \sqrt{\varphi}\varepsilon \tag{2-94}$$

式中 E——岩石的实时弹性模量，简称弹性模量；

E_0——无损伤状态岩石的弹性模量，称为原始弹性模量；

ε，ε_p，ε_e——岩石总应变、塑性应变和弹性应变。

在式（2-93）、式（2-94）的假设条件下，应力可表示为

$$\sigma = E\varepsilon_e = E_0\varphi\varepsilon \tag{2-95}$$

式中 σ——岩石所受的单轴压应力。

经进一步应用能量守恒原理，由式（2-90）推得

$$\varepsilon^2 = \frac{2\Gamma^2}{(1-\sqrt{\varphi})^3}\left[\varphi_0 - \varphi - 4(\sqrt{\varphi_0} - \sqrt{\varphi}) - \ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)\right] \tag{2-96}$$

式中 φ_0——岩石的初始连续性因子；

Γ——无因次参数，是一个材料常数，且

$$\Gamma = \sqrt{\gamma/E_0} \tag{2-97}$$

将式（2-96）代入式（2-95）中得到能量型岩石损伤本构关系：

$$\sigma = E_0\varphi\left\{\frac{2\Gamma^2}{(1-\sqrt{\varphi})^3}\left[\varphi_0 - \varphi - 4(\sqrt{\varphi_0} - \sqrt{\varphi}) - \ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2-98}$$

2. 几何损伤模型

几何损伤理论由 Murakami S 等[59]针对金属材料创立并发展起来，其主要观点为材料的损伤由微缺陷造成，损伤的大小和演化与微缺陷的尺寸、形状、密度及其分布有关。T. Kawamoto 等人将其引入到了岩体损伤力学中[60]，形成了节理岩体损伤力学的基本框架，孙卫军等[61]以此为基础，建立了裂隙岩石弹塑性损伤模型。

对于岩体中只有一组裂隙的情况，损伤变量的定义为

$$D = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}\lambda d^2\right) \tag{2-99}$$

式中 λ——裂隙面密度；

d——裂隙面直径。

对于岩体中有多种裂隙的情况，损伤变量为

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i n_i \otimes n_i \tag{2-100}$$

$$D_i = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}\lambda_i d_i^2\right) \tag{2-101}$$

式中 D_i，λ_i，d_i——第 i 组裂隙的损伤变量、裂隙面密度和裂隙面直径；

n_i——第 i 组裂隙的单位法向矢量；

$\otimes$——张量积。

二维情况下的有效应力为

$$\sigma^* = \frac{1}{2}(\sigma\varphi + \varphi\sigma) \tag{2-102}$$

式中 σ^*——有效应力；

σ——表现应力；

φ——一种“损伤算子”，$\varphi = (1-D)^{-1}$。

3. 分形损伤模型

由于岩石是一种典型的裂隙体，岩石的破坏演化从不同尺度看，其裂纹的分布具有自相似性，Nolen－Hoeksema 和 Gordon[62] 曾对白云石大理岩折叠悬臂梁中缺口处微裂纹在 5 个不同载荷阶段（σ/σ_c = 64%，80%，93%，96% 和 100%）的发展、演化进行了实验研究，微裂纹发展和演化过程及其分布情况如图 2－54 所示，充分显示了不同尺度裂纹分布的自相似性。

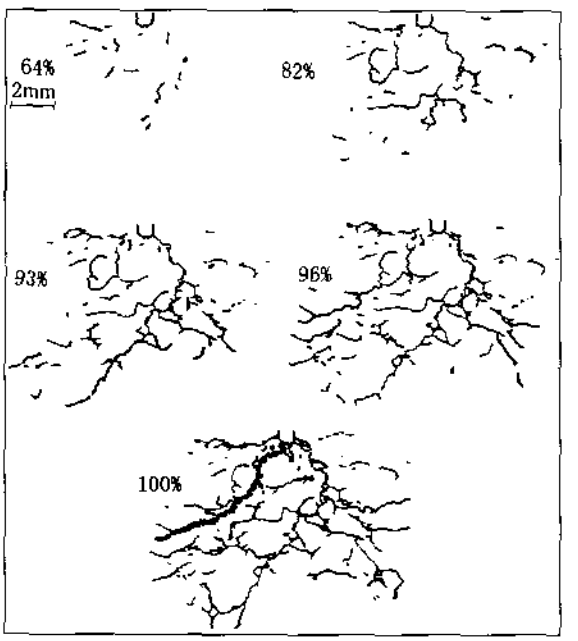


图 2－54 白云石大理岩折叠梁中缺口处微裂纹随载荷的变化
（据 Nolen－Hoeksema 和 Gordon[62]）

在我国，谢和平院士[63~65]率先运用分形几何理论定量地描述了岩石损伤，探讨了岩石类材料的分形损伤特性，开拓了损伤研究的新领域。赵永红[66]定义岩石构元中破裂面的分数维值为各向同性损伤变量，定义各个方向上裂纹面的累加量为各向异性损伤变量，并根据裂纹发育特征提出了损伤变量演化方程，从而建立起岩石脆性变形破坏过程的分数维损伤本构模型。各向同性损伤变量 φ_0 为

$$\varphi_0 = <\frac{D - D_c}{D_0}>,\ \sigma_c > \sigma > \sigma_0 \tag{2-103}$$

式中 $<\frac{D - D_c}{D_0}>$——某数的 Macauley 约定；

D——随应力变化的裂纹分数维值；

σ_0，D_0——材料开始损伤时对应的应力值和构元裂纹分数维值；

σ_c，D_c——材料破坏时对应的应力值和构元裂纹分数维值。

各向异性损伤变量可以用张量形式写为

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{A_c} n_i^{(k)} \otimes n_j^{(k)} \tag{2-104}$$

4、统计损伤本构模型[67]

徐卫亚等[67]考虑到岩石内部缺陷的随机分布支配，建立了合理的岩石损伤统计本构关系。他认为，由于岩石是一种非均质材料，内含大量随机分布的微裂隙、空洞、界面等缺陷，因此，在压力作用下岩石微元的破坏也应是随机的。某一岩石微元的破坏概率和应力－应变状态有关。将发生破坏的微元占微元总体的比例定义为损伤变量，其范围为 0～1。假定岩石破坏准则为

$$f(\sigma^*) = f_0 \tag{2-105}$$

式中 σ^*——有效应力；

f_0——常数。

假定岩石微单元破坏概率随 $f(\sigma^*)$ 的分布密度为 $p[f(\sigma^*)]$，则定义损伤变量为破坏概率，其表达式为

$$D = f_0 \int_0^{f(\sigma^*)} p[f(\sigma^*)]\,\mathrm{d}f(\sigma^*) \tag{2-106}$$

由名义应力 σ 和弹性应变 ε_e 表示的损伤演化方程为

$$D = w(\sigma_{ij},\ \varepsilon_e) \tag{2-107}$$

于是得到弹塑性统计损伤本构方程为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{e} + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} \tag{2-108}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{-E}{6E\mu + 4\mu - 4\mu^2 - 8\mu^3}\delta_{ij}\mathrm{d}\sigma_{kk}^* + \frac{1}{2\mu}\mathrm{d}\sigma_{ij}^* \tag{2-109}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}^*} \tag{2-110}$$

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{A}\frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{ij}^*}\mathrm{d}\sigma_{ij}^* \tag{2-111}$$

式中 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$——总应变张量增量分量；

μ——泊松比；

λ——裂隙面密度；

$d\varepsilon_{ij}^{e}$——弹性应变张量增量分量；

$d\varepsilon_{ij}^{p}$——塑性应变张量增量分量；

$d\sigma_{ij}$——名义应力张量增量分量；

σ_{ij}——名义应力张量分量；

σ_{ij}^{*}——有效应力张量分量；

g——没有损伤岩石的塑性势面函数，$g=g(\sigma_{ij}^{*}, H)$；

f——没有损伤岩石的屈服函数，$f=f(\sigma_{ij}^{*}, k)$；

H——硬化参数；

k——屈服参数；

A——硬化参数 H 的函数。

如果

$$H=\int \sigma_{ij}^{*}\, d\varepsilon_{ij}^{p} \tag{2-112}$$

则有

$$A=(-1)\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_{ij}^{*}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}^{*}} \tag{2-113}$$

2.3.4 对岩石本构关系研究的思考

岩石材料经过亿万年的地质演变和多种复杂的构造运动，使其物质结构从本质上由宏观到微观都成为极其复杂的非连续体和非均质体，它具有非线性、各向异性及随时间变化的力学属性[68]。可以说，岩石是自然界中最为复杂的材料之一，因而对其本构关系的研究具有极大的吸引力。但应用传统力学来研究岩石本构关系具有很大局限性，谢和平院士等[50]在“关于21世纪岩石力学发展战略的思考”一文中对传统的本构模型评价指出：“首先，岩石的非线性体积变化使传统固体力学中有关材料体积线性变化的假设不再成立，传统的变形全量理论与单一性曲线假设不适于岩石。其次，岩石非正交塑性流动法对现代塑性力学的基础——*Drucker* 公设提出了挑战，引起广泛的争论。因此，如何在本构理论中描述岩石非正交特性成为力学和岩石力学研究的一个热点。再次，岩石破坏后的应变软化特性以及变形失稳过程不仅是岩石力学非线性本构研究的难点，也是传统固体力学中的核心研究课题。”

到目前为止，由于岩石材料的复杂性，岩石本构关系还不能很好回答如下基本问题：

（1）岩石峰后形态的描述还不成熟。因为在一定条件下，一些岩石在软化区是稳定的，而对另一些岩石在软化区是不稳定的。即使同种岩石，在不同条件下，其软化区的稳定性也不相同。那么，软化区稳定的条件是什么？在本构关系中如何体现？

（2）流变是岩石的重要特征，目前虽然微分本构模型简单，但很难拟合各类岩石在不同应力环境下的变形规律；而积分型本构模型虽然能够有效反映岩石的流变特征，但参数有时很难获取[69]。同时，岩石介质的各向异性、非均质性及裂隙结构对岩石流变的影响至今还很难在流变本构模型中得到科学的体现。

（3）本构关系的尺度性。本构关系是为岩体稳定性的判定而服务的，但目前的本构

关系均建立在实验室小尺度事件试验的基础上，从细观尺度本构到宏观尺度本构如何统一？它们之间的桥梁如何架起？对于大尺度的岩体，目前的本构关系到底有多大的适定性？如何从根本上解决本构关系在岩体力学工程中可靠性问题？

（4）岩石或岩体的破坏是一个区域破坏，而不是点破坏，目前所构建的本构关系均以一点的应力－应变为出发点。通常用一点应力状态建立破坏准则，对岩石工程并不很合适，因为一点的破坏不是围岩塌落的充分条件，这里要着重研究的不是“点”准则，而是“区域”准则。如何从“域”破坏角度建立相应本构关系模型？

（5）岩石的本构关系大都以岩石压缩条件下的应力－应变关系建立。事实上，在岩石工程中，岩石将受到压、剪、扭等多种应力的叠加作用，对各向异性和非均质的岩石而言，这种应力环境对岩石的失稳与破坏有很大影响，如何在本构关系中体现？

因此，岩石本构关系的研究，应当充分考虑到岩石介质属性与工程的复杂性，以建立起与工程“最近距离”的岩石本构关系，这是岩石力学学科需要长期攻关的课题。这也清楚地表明，传统的岩石力学学科已经受到挑战，非线性理论等有望在岩石力学本构关系研究中有所作为，例如，分形、分叉及混沌等现代数学理论为研究复杂岩体从细观本构关系到宏观本构关系提供了新的生长点。

2.4 岩石力学数值计算的复杂性

岩石力学计算方法都是建立在岩土塑性力学、流变力学、损伤断裂力学、块体力学、分形岩石力学、渗流（耦合）力学的理论（在数学上往往是由一系列偏微分方程组构成）描述上。这些关系一旦建立，对于具体问题在给定的边界条件下如何进行求解，这便成为人们最为关心的问题，一般情形下难于通过解析的方法求出其解析解，通常必须采用数值计算的方法进行求解，数值法具有较广泛的适用性，它不仅能模拟岩体的复杂力学特性，而且还能方便地分析各种边值问题和施工过程，并对工程进行预测和预报，因此，岩石力学数值分析方法是解决岩石工程问题的有效工具[59]。

近40年来，岩石力学数值计算方法得到了迅速发展，出现了有限差分、有限元、边界元、离散元、块体元、无限元、流形元及其混合应用等各种数值模拟技术，使复杂的岩石力学与工程问题的设计成为可能。在我国有限元数值计算方法从线性发展到高度非线性和大变形问题，由二维发展到三维，同时，还可以考虑流变、渗流与应力场耦合、损伤、断裂以及动力效应。不同数值计算方法的结合，更能充分发挥各种数值方法优势互补的作用，如有限元－边界元的混合，有限元－离散元的混合、有限元－无限元和有限元－块体元的混合采用等。这些数值方法对岩石力学与工程的发展起到了很大作用。

但是，作为区别于其他材料与工程的岩体力学与工程，其复杂性在于：除了岩石本身是非连续、非均质、各向异性和流变性的介质，岩石的力学性质呈随机性、离散性以外，岩体在开挖前就受到多种应力（构造应力、温度应力、自重应力、热、地下水以及瓦斯）的作用，岩石力学问题在时间和空间问题上的广袤性[70]，实验室里取得的岩石试样的数据往往不能直接用于工程，而且岩体工程中的绝大多数问题都是三维问题。这就要求数值计算方法都能够考虑到这些复杂性。

王泳嘉教授[70]十分形象和中肯地阐述了数值方法的计算目的。他指出，不乏这样的

例子，试验报告所提供的弹性模量往往不能用，而要乘上一个修正系数，这个系数有时仅为0.1～0.2，才能和现场量测得到的位移值相一致。因此无怪乎岩石工程师要说岩石力学是“声誉高，信誉低”了。所谓声誉高是说现代的岩石力学广泛地使用了计算机，得到小数点后5、6位的精度是轻而易举的事情，而且还有各种图表，这些是以前所做不到的；所谓信誉低是说计算岩石力学所提供的数字往往不可靠，在具体的岩土工程中不能用。这不能归罪于计算岩石力学。岩石力学的计算，除了模型和方法有考究外，影响结果的主要是所输入的数据。没有正确的数据就得不到正确的结果，而岩石力学问题是数据有限的问题。美国著名数学家R. W. Hamming在他的名著《科学家和工程师用数值方法》一书中开宗明义地在书的扉页中宣称：“计算的目的是洞察内含而不是数字”。岩石力学中数值计算的目的也是如此。

对于岩石力学数值计算应当在以下几点进行把握：

（1）在岩石力学与工程中，大尺度条件下的岩石力学参数尽管实验室获取非常重要，但不能仅仅依赖于实验室所得到的数据，因为这些数据无法反映大尺度下岩体综合物理力学性质，所以采用概化方法，将微观和宏观相结合，得到数据在空间分布的平均统计特性，并打破受控于确定论的思维定式，就显得至关重要。对于计算结果要引入可靠度的概念，对于岩石工程除了要计算其极限状态外，还要计算其失效概率[70]。

（2）充分利用分形自相似特点，以便为解决岩体节理裂隙的尺度性奠定基础，因为已经查明在任何几何尺度上测量所得到的裂缝分布都具有自相似的特征。把分数维与岩石计算的物理量结合起来，会给计算岩石力学的发展带来新的生机。

（3）要充分考虑岩石的大变形特征。除了发展能够模拟不连续大变形的离散元法以外，拉格朗日元法和流形元法也是值得发展的方法。可以肯定，非线性大变形计算有可能成为21世纪岩石力学数值方法的主流。

（4）充分利用人工神经网络[71]、遗传方法[72]等非线性数学方法，拟和具体岩石的本构关系，嫁接到现代岩石力学计算方法中去，并将神经网络与矩阵算法相结合[78]是计算岩石力学发展的趋势之一。

（5）考虑岩石非均质特点，探索元胞自动机方法在岩石破裂中的模拟计算[73-77]，也许会成为岩石力学计算的新的生长点。

参 考 文 献

[1] 陈颙，黄庭芳．岩石物理学［M］．北京：北京大学出版社，2001.

[2] Yevs Guoguen V P. Introduction to the physics of rocks［M］. Princeton: Princeton press, 1994.

[3] Jumikis A R. Rock mechanics［M］. London: Trans Tech Publications, 1983.

[4] 勒热夫斯基 BB，等．岩石物理学基础［M］．何修仁，等译．徐州：中国矿业大学出版社，1989.

[5] 尤明庆，苏承东．对砂岩试样室内试验结果的分析［C］//第八届全国岩石力学与工程学术大会论文集．北京：科学出版社，2002：179－182.

[6] 杨永杰，陈绍杰．同种岩石强度离散性的实验技术研究［J］．实验技术与管理，2005，22（1）：51－53.

[7] 郭中华，朱珍德，杨志祥．岩石强度特性的单轴压缩试验研究［J］．河海大学学报，2002，30（2）：93－97.

[8] 卫宏，张玉三，李太任．岩石显微空隙粒度分布的分形特征与岩石强度的关系［J］．岩石力学与工程学报，2000，19（3）：318－320.
[9] 皮萨林科 TC，等．复杂应力状态下的材料变形与强度［M］．江明行，译．北京：科学出版社，1983.
[10] 唐春安．岩石破裂过程中的灾变［M］．北京：煤炭工业出版社，1993.
[11] Krajcinovic D. Constitutive equation for damage materials［J］. J Appl Mech，1983，50：355－360.
[12] 冯增朝，赵阳升，段康廉．岩石的细胞元特性及其非均质分布对岩石全曲线性态的影响［J］．岩石力学与工程学报，2004，23（11）：1819－1823.
[13] 马志涛，谭云亮．岩石破坏演化细观非均质物理元胞自动机模拟研究［J］．岩石力学与工程学报，2005，24（15）：2074－2078.
[14] 梁正召，杨天鸿，唐春安．非均匀性岩石破坏过程的三维损伤软化模型与数值模拟［J］．岩土工程学报，2005，27（12）：1447－1452.
[15] 席道瑛，陈林，等．砂岩变形的各向异性［J］．岩石力学与工程学报，1995，14（1）：49－58.
[16] 刘斌，席道瑛，等．不同围压下岩石泊松比的各向异性［J］．地球物理学报，2002，45（6）：880－889.
[17] 杜时贵，王思敬．岩石质量指标（RQD）的各向异性［J］．工程地质学报，1996，4（4）：48－54.
[18] 耶格 J C，库克 N G W. 岩石力学基础［M］．北京：科学出版社，1981.
[19] 周维垣．高等岩石力学［M］．北京：水利水电出版社，1990.
[20] 孙钧，李永盛．岩石流变力学及其应用．岩石力学新进展［M］．沈阳：东北工学院出版社，1989.
[21] 周培德．岩石流变形态．成都：西南交通大学博士论文，1986.
[22] 李永盛，孙钧．多组节理岩体洞室的蠕变特性及其粘弹塑性效应［J］．同济大学学报，1986，1（3）.
[23] 古德曼 R. 不连续岩体中的地质工程方法［M］．北方交通大学隧道与地质教研室译．北京：中国铁道出版社，1980.
[24] Priest，Stephen D. Discontinuity analysis for rock engineering［M］. London：Chapman Hall，1993.
[25] 张志刚，乔春生，刘勇．节理岩体强度特征研究综述［J］．煤田地质与勘探，2006，34(5)：38－41.
[26] 孔宪礼．岩体工程地质及其灾害［M］．上海：同济大学出版社，1993.
[27] Barton N R. Review of a new shear strength criterion for rock joint［J］. Engng Geol，1976（8）：287－332.
[28] Jaeger J C. Shear fracture of anisotropic rocks［J］. Geol Mag，1960，97：65－72.
[29] Jaeger J C，Rosengren K J. Friction and sliding of joints［J］. Proc. Aust Inst Min Metall，1969（229）：93－104.
[30] 张清，杜静．岩石力学基础［M］．北京：中国铁道出版社，1997.
[31] Zdenek Bazant，Er－ping Chen. Scaling of structure failure［J］. Appl Mech Rev，1997，50(10)：593－627.
[32] Leonardo Da Vinci. See Notebooks of Leonardo da Vinci［M］. London：Edward McCurdy，1945.
[33] Griffith A A. Phenomena of rupture and flow in solids［J］. Phil Trans，1921，221A：179－180.
[34] Bazant ZP. Instability，ductility，and size effect in strain－softening concrete［J］. J Eng Mech Div，1976，102（EM2）：331－344.
[35] Bazant ZP. Size effect in blunt fracture：Concrete，rock，metal［J］. J Eng，1984，110：518－535.

[36] Bazant ZP. Fracture Mechanics of Concrete Structures, Proc First Intern Conf [J]. Brechkenridge, Colorado. London: Elsevier, 1992: 1040.
[37] Durelli A J, Parks V. Relationship of size and stress gradient to brittle failure stress [J]. Proc fourth us National cong of appl Mech, 1962: 931 - 938.
[38] Evans I. The tensile strength of coal [J]. Colliery Engng, 1961, 38: 428 - 434.
[39] 孙广忠. 工程地质与地质工程 [M]. 北京: 地震出版社, 1993.
[40] 苏承东. 大理岩颗粒及试样尺寸对冲击倾向影响的试验研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (22): 3750 - 3753.
[41] Hudson J A, Crouch S L, Fairhurct C. Soft stiff and servo - controlled testing machine [J]. Eng Geol, 1972, 6 (3): 173.
[42] 杨圣奇, 苏承东, 徐卫亚. 岩石材料尺寸效应的试验和理论研究 [J]. 工程力学, 2005, 22 (4): 112 - 118.
[43] 刘宝琛, 张家生, 杜奇中, 等. 岩石抗压强度的尺寸效应 [J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17 (6): 611 - 614.
[44] 尤明庆, 华安增. 岩样单轴压缩的尺度效应和矿柱支承性能[J]. 煤炭学报, 1997, 22 (1): 37 - 41.
[45] 倪红梅, 杨圣奇. 单轴压缩下岩石材料尺寸效应的数值模拟 [J]. 煤田地质与勘探, 2005, 33 (5): 47 - 49.
[46] 谢富仁, 崔效锋, 赵建涛. 全球应力场与构造分析 [J]. 地学前缘, 2003, 10 (S): 22 - 30.
[47] Hast N. The state of stresses in the upper part of the earth's crust [J]. Tectonophysics, 1969, 8 (3): 189 - 211.
[48] 朱焕春, 陶振宇. 不同岩石中地应力分布 [J]. 地震学报, 1994, 16 (1): 49 - 63.
[49] Herget G. Stresses in Rock [M]. Rotterdam: A A Balkema, 1988.
[50] 谢和平, 刘夕才, 王金安. 关于21世纪岩石力学发展战略的思考 [J]. 岩土工程学报, 1996, 18 (4): 98 - 102.
[51] 殷有泉. 岩石类介质的本构关系. 岩石力学新进展 [M]. 沈阳: 东北工学院出版社, 1989.
[52] Duncan J M, Chang C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils [J]. J Soil Mech Found Div ASCE, 1970: 1629 - 1653.
[53] Ziebiewicz O C, et al. Visco - plasticity, plasticity and creep in solids—a numerical solution approach [J]. Int J Num Mech Eng, 1974, 8: 821 - 845.
[54] Kachanov L M. Introduction to continuum damage mechanics [M]. The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
[55] Rabotnov Yu N. On the equations of state for creep [J]. Progress in applied mechanics, 1963: 307 - 315.
[56] Lemaittre J. A course on damage mechanics [J]. Sping - verlag, 1992.
[57] Krajcinovic D. Damage mechanics. Elsevier Science Publishers, North - Holland, 1996.
[58] 秦跃平, 孙文标, 王磊. 岩石损伤力学理论模型初探 [J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22 (4): 646 - 650.
[59] Murakami S. Mechanical modeling of material damage [J]. J Appl Mech, 1988, 55: 280 - 286.
[60] 杨更社, 张长庆. 岩体损伤及检测 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1998.
[61] 孙卫军, 周维垣. 裂隙岩体弹塑性 - 损伤本构模型 [J]. 岩石力学与工程学报, 1990, 9 (2): 108 - 119.
[62] Nolen - Hoeksema R C, Gordon R B. Optical detection of crack patterns in the opening - mode fracture of

marble [J]. Int. J. Rock Mech Min Sci, 1993, 30: 343 - 350.
[63] 谢和平. 分形 - 岩石力学导论 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
[64] 谢和平, 高峰. 岩石损伤过程中的分形描述 [J]. 岩石力学与工程学报, 1991 (1): 55 - 67.
[65] Xie H. Fractals in Rock Mechanics, A A [J]. Balkema Publishers, Rotterdam, 1993.
[66] 赵永红. 岩石弹脆性分维损伤本构模型 [J]. 地质科学, 1997, 32 (4): 487 - 494.
[67] 徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21 (6): 781 - 791.
[68] 缪协兴, 钱鸣高. 采动岩体力学——21 世纪固体力学的新生长点 [J]. 现代力学与科技进步, 北京: 清华大学出版社, 1997, 18 (A08): 14 - 18.
[69] 吕爱钟. 试论我国岩石力学的研究状况及其进展 [J]. 岩土力学, 2004, 25 (S): 1 - 9.
[70] 王泳嘉. 关于计算岩石力学发展的几点思考 [J]. 岩土工程学报, 1996, 18 (4): 103 - 104.
[71] 谭云亮, 王春秋. 岩石本构关系的径向基函数神经网络快速逼近模型 [J]. 岩土工程学报, 2001, 23 (1): 4 - 7.
[72] 赵同彬, 谭云亮, 刘传孝. 基于遗传算法的巷道位移反分析研究 [J]. 岩土力学, 2004, 25 (S): 107 - 109.
[73] 谭云亮, 赵同彬, 颜伟. 非线性岩石力学问题求解的几点思考 [J]. 岩土力学, 2004, 25 (S): 10 - 13.
[74] 谭云亮, 周辉, 王泳嘉, 等. 模拟细观非均质材料破坏演化的物理元胞自动机理论 [J]. 物理学报, 2001, 50 (4): 704 - 709.
[75] Ma Zhitao, Tan Yunliang. Modelling of rock failure based on the physical cellular automata [J]. J. of Southeastern University, 2005, 21 (3): 348 - 352.
[76] 谭云亮, 颜伟, 马洪岭. 细观非均质岩石蠕变特征的物理元胞自动机模拟 [J]. 岩土力学, 2006, 27 (S): 9 - 12.
[77] 周辉, 王泳嘉, 谭云亮, 等. 岩体破坏演化的物理细胞自动机 (PCA) (Ⅰ) - 基本模型 [J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21 (4): 475 - 478.
[78] 赵启林, 卓家寿. 神经算法在施工力学中的应用 [J]. 计算力学学报, 2001, 18 (1): 108 - 110.

3 岩石力学中的混沌性

3.1 混沌及其描述方法

混沌理论与相对论、量子力学并列为20世纪的三大发现，我们的世界充满“混沌”[1,2]。

3.1.1 混沌与混沌科学的发展

1. 混沌的起源

“混沌”的概念是什么？传统上，“混沌”常常被用来描述混乱、乱七八糟、杂乱无章等状态，从这个意义上讲，它与无序的概念相同。在英语中“混沌”译为chaos，即混乱或无序的意思，日本《国语辞典》对“混沌”一词的注释为，“宇宙形成初期没有天壤之别模糊一团的状态”，“势均力敌者针锋相对，无法预料形势将如何变化的状态”。在中国古代，混沌有时又指宇宙之初物质某种原始的没有分化的状态，还可以进一步引申出人类在认识上处于浑浑噩噩的朦胧状态。如《三五历》中的“未有天地之时，混沌如鸡子，盘古生其中，……”及《易乾凿度》中的“气似质具而未相离，谓之混沌”等，表明了中国古代对混沌的最初认识。古希腊对混沌的认识与中国古代的认识相近，例如在古希腊早期的自然哲学和宇宙论中，混沌被看做是原始的混乱和不成形的物质，而宇宙的创造者就用这种物质创造出秩序井然的宇宙。总之，人们可以认为“混沌”是模糊一团的状态，是有序与无序之间的“中间”状态。

近代科学由于以研究自然界的秩序和规律为其宗旨，因此数百年来把混沌现象排除在外，使得自然界中大量的混沌现象被科学家们遗忘了。在这期间值得一提的是康德，他的星云假说认为，太阳系是由处于混沌状态的原始星云演化而来的，并指出“我在把宇宙追溯到最简单的混沌状态以后，没有用别的力，而只是用了引力和斥力这两种力来说明大自然的有序的发展”。因此，康德是考察宇宙从混沌到有序的演化的第一人[3,4]。

在人们的生活中不乏“混沌”现象，如水渠中水的流速缓慢时叫“层流”，水的分子“像引线一样”有条不紊地流动，水的阻力不大，因此比较容易计算出来。水的流速一旦加快，水中就会出现许多漩涡进而成为“乱流”，水的阻力就较大，在乱流状态下，许多有秩序的层流被打破，难以计算出水的阻力，呈现混沌状态。天气预报的不准确性经常成为人们的话题，这是由于混沌现象对外界扰动极其敏感，难以对天气做长期预报，这正是力学方面所面临的课题。同样，地震预报中，由于混沌现象的存在，才导致对地震发生的具体时刻难以做早期预报。

要从数学上解释混沌理论，往往要运用微积分方程式。在古典力学中，人们运用牛顿的运动方程式来研究各种运动状态，这就是微积分方程式，如果方程式成立，而且具备初始条件，就可以根据物理法则或定律求得唯一解。然而，人们根据确定性公式进行计算

时，会因数据微小的变化而出现大的变化结果，出现混乱现象。随着混沌理论的发展，人们越来越认识到，这种看上去“不可思议”的无秩序状态实际上并非是什么令人吃惊的现象，而是自然界普遍存在的现象，只不过被人忽视了而已。

总之，混沌在气象预报中，在人的生命中，在日常生活中，在矿山开采中都存在。它是自然界普遍存在的现象，它向统治世界已久的牛顿确定性力学提出了挑战，对我们的思维方式也提出了挑战[5]。

2. 混沌科学的发展

混沌是一种貌似无规则的运动，是指在确定性非线性系统中不需附加任何随机因素就可出现的类似随机的行为。混沌科学是随着现代科学技术的迅猛发展，尤其是在计算机技术出现和普遍应用的基础上发展起来的一门新兴交叉学科。混沌学被认为是继相对论和量子力学问世以来，20 世纪物理学的第三次革命，是非线性现象的核心问题。混沌之所以受到学术界如此广泛的重视，主要是因为在现代的物质世界中，混沌现象无处不在，大至宇宙，小至基本粒子，无不受混沌理论的支配。如气候变化会出现混沌，数学、物理、化学、生物、哲学、经济学、社会学、音乐、体育中也存在混沌现象。因此科学家们认为，在现代科学中普遍存在的混沌现象，打破了不同科学间的界限，混沌科学是涉及系统总体本质的一门新兴科学。

混沌研究提出了一些新问题，它向传统的科学提出了挑战。如“决定论非周期流”，即确定性系统中有时会表现出随机行为，这一论点打破了拉普拉斯决定论的经典理论，以至于连根深蒂固的牛顿力学也受到了它的冲击。美国数学家庞加莱（Poincare）及洛伦兹（Lorenz）的发现表明，在复杂性面前，牛顿力学也是无能为力的，从而拉开了混沌研究的序幕，使混沌的研究成果给自然科学的一些最基本概念，如确定性、随机性、统计规律等注入了新的含义，进而也给一些更普遍的哲学范畴如因果、机遇等赋予了新的含义。同时，数学中的动态系统理论、分叉理论、遍历性理论和分形几何学等都在混沌研究中起着不可替代的作用。

19 世纪中期，自然科学家首先在热力学研究中对混沌问题进行讨论，认为热力学的平衡问题实际上是一种混沌态。与此同时，科学家们还探讨了布朗运动、扩铎现象、反应体系中反应基团的无规则碰撞等微观状态，发现它们与混沌有关，都是混沌无序的状态。

19 世纪末 20 世纪初，庞加莱在研究三体问题时遇到了混沌问题，并于 1903 年在他的《科学与方法》一书中提出了庞加莱猜想。他把动力学系统和拓扑学有机地结合起来，指出三维问题中，在一定范围内，其解是随机的。实际上这是一种保守系统中的混沌，从而他成为世界上最先了解混沌存在可能性的第一人。20 世纪中后期，混沌现象得到了各领域研究者的认同，并受到了广泛的关注。各种研究成果的相继出现，为混沌学的诞生和茁壮成长奠定了坚实的基础。

20 世纪 60 年代初期，洛伦兹在著名论文“决定论非周期流”中讨论了天气预报的困难和大气湍流现象，给出了三变量的自治方程，即著名的洛伦兹方程。

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x-y) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \tag{3-1}$$

方程中有三个参数为 σ，r 和 b，如取 $b=8/3$，$\sigma=10$，改变参数 r：当 $r<1$ 时，其解

的性质趋于无对流的定态；当 $r>1$ 时，其解为非周期的，看起来很混乱。这便是在耗散系统中，一个确定的方程却能导出混沌解的一个实例，从而揭开了对混沌现象深入研究的序幕。同样，阿诺尔德（Arnold）和莫塞尔（Mose）分别证明了：在近可积的哈密顿系统中，随机成分是有限的，导致不可积性的扰动项很小。这被称为 KAM 定理，该定理讨论的是保守系统，而洛伦兹方程讨论的是耗散系统，它们分别从不同角度说明了两种不同类型的动力学系统，在长期演化过程中是怎样出现混沌态的。从此，对混沌理论的研究便进入了新的时期。

1971 年法国物理学家芦厄勒（Ruelle）和荷兰数学家塔肯斯（Takens）为耗散系统引入了“奇异吸引子”（Strange Attractor）这一概念，发现了混沌现象，提出了一个新的湍流发生机制，以揭示湍流的本质[6-8]。

1975 年美籍华人学者李天岩和美国数学家约克（Yorke）在美国《数学月刊》发表了题为“周期 3 意味着混沌”的著名文章，深刻揭示了从有序到混沌的演化过程[9]。从此“混沌”一词便在现代意义下正式出现在科学词汇之中。

1976 年美国数学生物学家梅（May）在《自然》杂志上发表的题为“具有极其复杂的动力学的简单数学模型”文章中，给出了著名的描述人口（或虫口）的方程，即逻辑斯谛（Logistic）模型；并指出，在生态学中一些非常简单的确定性的数学模型具有极为复杂的动力学行为，其中包括分叉和混沌，从而向人们表明了混沌理论的惊人信息。

1978 年和 1979 年费根包姆（Feigenbaum）等人在梅的基础上独立地发现了倍周期分叉现象中的标度性和普适常数，从而使混沌在现代科学中具有坚实的理论基础。

20 世纪 80 年代以来，混沌科学得到了迅猛发展，人们着重研究系统如何从有序进入新的混沌及其混沌的性质和特点。除此之外，借助于多标度分形理论和符号动力学，还进一步对混沌结构进行了研究和理论上的总结。如：1980 年，美国数学家 Mandelbrot 用计算机绘出了第一张 Mandelbrot 集的图像，这是一张五彩缤纷、绚丽无比的混沌图像，拓展了混沌科学的一个重要应用领域。1983 年，加拿大物理学家 Glass 在《物理学》杂志上发表著名文章“计算奇异吸引子的奇异程度”，开创了全世界计算时间序列维数的热潮。1987 年 Grassber 等人提出了重构动力系统的理论方法，揭示了产生复杂特性结构的动力学特性。通过从时间序列中提取分数维、Lyapunov 指数等混沌特征量，从而使得混沌理论进入到实际应用阶段。

到了 20 世纪 90 年代，基于混沌运动是存在于自然界中的一种普遍运动形式，所以对混沌的研究不仅推动了其他科学的发展，而且其他科学的发展又促进了对混沌的深入研究。因此，混沌科学与其他学科相互交错、渗透、促进，综合发展，使得混沌不仅在生物学、数学、物理学、化学、电子学、信息学、气象学、宇宙学、地质学，而且还在经济学、人脑科学，甚至是音乐、美术、体育等多个领域中都得到了广泛的应用，并形成了一门新的分支——混沌工程学，从而确立了混沌在现代科学技术中的重要地位。

混沌科学的研究表明，现实世界是一个有序与无序相伴、确定性与随机性统一、简单与复杂一致的世界，而那种只追求有序、精确、简单的观点是不全面的。从本质上讲，混沌是直接研究人们看得见摸得着的宇宙，以及在人类本身的尺度大小差不多的对象中发生的过程，所有日常生活经验与这个世界的真实图像都是人们研究混沌时所探索的目标。因此混沌是一种关于过程的科学而不是关于状态的科学，是关于演化的科学而不是关于存在

的科学。混沌中蕴含着有序，有序的过程也可能出现混沌。大自然就是如此纵横交错，如此复杂，包含着无穷的奥妙。因此，对混沌科学的进一步研究将使人们增加对自然界更深刻的理解，对一切复杂现象都遵循着的新规律有一个更深刻的认识。

3. 混沌科学的基本概念

混沌是非线性系统所独有且广泛存在于自然界中的一种非周期运动形式，它比有序更为普遍。现实世界中绝大部分现象不是有序的、稳定的和平衡的，而是处于无序的、变化的和涨落起伏之中的。混沌科学几乎涉及到自然科学和社会科学的每一个分支，近年来受到了各国学者的广泛重视。为了对混沌特性有一个较深的了解，需要澄清混沌科学中的各种相关定义和基本概念。

1）混沌的定义

混沌目前尚无通用、严格的定义，一般认为，在某些确定性非线性系统中，不需要附加任何随机因素，仅由其内部存在着非线性的相互作用所产生的类随机现象称为“混沌”、“内在随机性”、“自发混沌”、“动力学随机性”等等。1975 年，李天岩和约克在“周期 3 意味着混沌”的文章中第一次给出了混沌的一种数学定义：

设$f(x)$是$[a, b]$的连续自然映射，若$f(x)$有了周期性，则对任意正整数n，$f(x)$有n周期点。从此定理出发，可以这样描述混沌：

（1）$f(x)$的周期点的周期无上界；

（2）闭区间I上存在不可数子集S，满足：

①对任意x、$y\in S$，当$x\neq y$时，有

$$\limsup_{n\to\infty}|f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y)|>0 \tag{3-2}$$

②对任意x、$y\in S$，有

$$\liminf_{n\to\infty}|f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y)|>0 \tag{3-3}$$

③对任意x、$y\in S$和f的任意周期点y，有

$$\limsup_{n\to\infty}|f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y)|>0 \tag{3-4}$$

此定义只预言了存在非周期轨道，但没有涉及这些非周期点的集合是否具有非零测度及哪些周期是稳定的。因此，该定义的缺陷在于集合S的勒贝格测度有可能为零，即这时混沌是不可观测的，而人们感兴趣的则是可观测的情形，即此时S有一个正的测度。

根据 Li－Yorke 定义，1983 年 Day 认为一个混沌系统应具有如下性质：存在所有的周期轨道；存在一个不可数集合，该集合只含有混沌轨道，且任意两个轨道既不趋向远离也不趋向接近，而是两种状态交替出现，同时任一轨道不趋于任一周期轨道，即该集合不存在渐近周期轨道；混沌轨道具有高度的不稳定性。

同样 1989 年 Devaner 给出了混沌的又一定义。

设X是一个量度空间，一个连续映射f，$X\to X$称为X上的混沌，如果满足：

（1）f是拓扑传递的；

（2）f的周期点在X中稠密；

（3）f具有对初始条件的敏感依赖性。

简而言之，此定义反映了混沌的映射具有不可预测与不可分解性，但仍有一种规律性。

除上述定义外，还有诸如：Smale 马蹄、横截同宿点、拓扑混合以及符号动力系统等关于混沌的定义。然而迄今为止，混沌一词还没有一个公认的普遍适用的数学定义，甚至有人认为“混沌”一词不可能有严格的数学定义。因此，从事不同领域研究的学者都是基于各自对混沌的理解进行研究并谋求各自的应用[10,11]。

2）混沌科学中的基本概念

（1）相空间。在连续动力学系统中，用一组一阶微分方程描述运动，以状态变量（或状态向量）为坐标轴的空间构成系统的相空间。系统的一个状态用相空间的一个点表示，通过该点有唯一的一条积分曲线。

（2）流和映射。动力学系统随时间变化，当发生在连续时间中时，将其称之为流，其对应于相空间的一条连续轨线；当发生在离散时间中时，将其称之为映射，对应于相空间中的一些离散的相点。

（3）不动点。又称平衡点，定态不动点是系统状态变量所取的一组值，对于这些值系统不随时间变化。在连续动力学系统中，相空间中有一个点 x_0，若满足 $t\to\infty$ 时，轨迹 $x(t)\to x_0$，则称 x_0 为不动点。

（4）吸引子。指相空间的这样的一个点集 S（或一个子空间），对邻域的几乎任意一点，当 $t\to\infty$ 时，所有轨迹线均趋于 S，吸引子是稳定的不动点集。

（5）奇异吸引子。又称混沌吸引子，指相空间中具有分数维的吸引子的集合。该吸引子由永不重复自身的一系列点组成，并且无论如何也不表现出任何周期性。混沌运行轨迹在此集合之中。

（6）分叉和分叉点。指在某个参数或某组参数发生变化时，长时间动力学运动的类型也发生变化。这个参数值（或某组参数值）称为分叉点，在分叉点处参数的微小变化会产生不同性质的动力学特性，故系统在分叉点处是不稳定的。

（7）周期解。对于系统 $x_{n+1}=f(x_n)$，当 $n\to\infty$ 时，若存在 $\xi=x_{n+1}=x_n$，则称该系统有周期 1 解 ξ。不动点可以看做是周期 1 解，因为它满足 $x_{n+1}=x_n$。

（8）分形和分维。分形是一个崭新的科学名词。这一概念的产生源于人们对一类用传统的数学方法已经无法描述的变化无穷的曲线，如：起伏不平的山脉，曲曲弯弯的海岸线等几何形状，虽然它们处处连续，但并非处处可微。这时分形理论往往会运用自如，特别是越混乱、越无规则、越复杂的领域，分形理论越能显示出其有效性。

分维又称分形维数、分数维（本书统称为分数维），是分形的一种定量表征，用于描述具有分形特性的几何对象的内部特征。分数维突破了经典维数必须为整数的局限性，为准确地描述自然界中广泛存在的一些极不规则极不光滑的研究对象，在其存在形式的维数计算上提供了一种新的方法。

（9）李亚普诺夫指数。用于量度在相空间中初始条件不同的两条相邻轨迹随时间按指数律收敛或发散的程度，这种轨迹收敛或发散的比率，称为李亚普诺夫指数。正的李亚普诺夫指数意味着存在混沌运动。

3.1.2 混沌特征及其描述方法

1. 混沌的基本特征

“混沌”理论的诞生使人们对许多复杂的现象有了更深的了解，也为人类认识自然、改造自然提供了新的方法和途径。以一维非线性动态系统中最具有典型意义的逻辑斯蒂映

射为研究对象，定性地分析通过倍周期分叉进入混沌的机理，为混沌科学的应用奠定基础[12]。

1）Logistic 映射

在生态学中，研究动植物群体与环境之间的相互作用关系非常重要。通常群体的数目多少取决于食物来源、竞争者、捕食者等因素。如用 n 表示时间，用 x_0 表示第 n 代的动植物出生数，用 x_{n+1} 表示第 $n+1$ 代的动植物出生数，则可用迭代函数：

$$x_{n+1}=f(x_n,\ u) \tag{3-5}$$

表示群体规模的世代变化情况，式中参数 u 反映了各种因素对群体数目的综合影响情况，将其称为“系统的结构参数”或“控制参数”。为了讨论问题方便，一般将式中的变量 x_n 归一化，即 $x_n\in[0,\ 1]$。建立的一维生态模型为典型的 Logistic 模型，其 Logistic 映射为

$$x_{n+1}=f(x_n,\ u)=ux_n(1-x_n) \tag{3-6}$$

式中，由于 $x_n\in[0,\ 1]$，故 u 不得大于 4，所以其取值范围为 $u\in[0,\ 4]$。

映射的不动点是指满足方程 $x=f(x)$ 的那些点，不动点反映了系统的动态行为。对不动点而言，当不动点处的映射 $Y=f(x)$ 的斜率 $|f'(x)|$ 大于 1 时，不动点稳定，反之不稳定。当参数 u 从零开始变化，并逐渐增大时，Logistic 映射的迭代过程表现出很复杂的动态行为。

当 $0<u<1$ 时，在 $x\in[0,\ 1]$ 范围内任选一初值 x_0 进行迭代，则序列 $\{x_n\}$ 迅速趋向一个稳定的不动点 0，说明群体数目在逐渐减小，最终导致种族灭绝。

当 $u=1$ 时，$f'(0)=1$，发生跨临界分叉。

当 $1<u\leqslant 3$ 时，有一个稳定不动点和一个不稳定不动点，因此由初值 x_0 出发的迭代过程总是离开不稳定不动点而趋于稳定不动点，这种情况被称为周期 1 解。

当 $u=3$ 时，发生叉型分叉。

当 $3<u\leqslant 1+\sqrt{6}$ 时，稳定不动点变为不稳定不动点。但经过不长过渡阶段后，又分叉出一对新的稳定不动点。即变量 x_0 在两个值上来回跳动，这种现象称为周期 2 解。

若进一步增加 u 值，则会观察到周期 2 的两个值又不稳定，各自又产生一对新的不动点，从而形成周期 4 解，接下来周期 4 解又分叉形成周期 8 解……随着 u 值的逐渐增加，周期解按 2^r 进行分叉，直到当 u 达到极限值 $u_\infty=3.576448\cdots$ 时，系统的稳态解是 200，系统进入了混沌状态，这种现象被称做倍周期分叉现象，如图 3-1 所示。

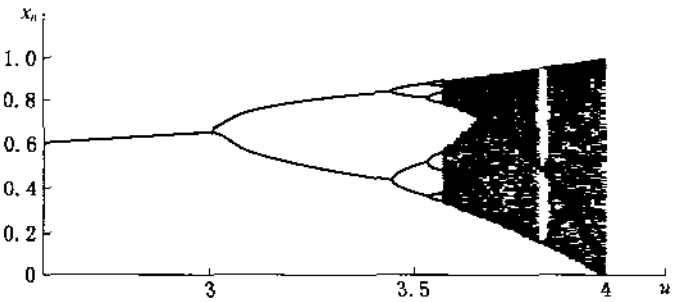


图 3-1　Logistic 映射分叉图

2）特征分析

（1）非线性。混沌是非线性系统所特有的属性，任何一个线性系统都不可能产生混沌。在数学上，线性问题只是非线性问题的特殊情况，在物理上，真实的系统总是非线性的。从特征上来看，线性系统同非线性系统存在以下三个方面的不同。

①运动本身的形式是不同的。线性系统典型地在空间和时间上表现为光滑、规则运动，而非线性系统往往会表现出从光滑变为混沌运动，看上去像随机行为。混沌的定量描述是非线性科学的一大成功。

②对于线性系统来说，当它的参数有微小变化时，其响应曲线仍然是光滑的。而对于非线性系统来说，参数的变化可能产生运动轨迹巨大量的差异。

③线性系统中孤立的脉冲通常会随着时间而传播、衰减，在非线性系统中，由于可以存在高度相当稳定的局部结构，因而可以长时间维持下去。

正是以上三点的不同，决定了混沌系统的其他重要特征，因此，系统的非线性是产生混沌的本质原因。

（2）随机性。非线性系统处于混沌状态时，其长时间的动态行为将显现为随机性。如 $u=4$ 时的 Logistic 映射：

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n) \tag{3-7}$$

在区间（0，1）内任意取一初值 x_0，进行迭代运算，会得到一时间序列 $|x_n|=|x_0, x_1, \cdots, x_n|$，序列 $|x_n|$ 表示系统的运动轨迹，此时该轨迹既不收敛也不呈周期运动状态，而是表现出一种“杂乱无章”、“混乱”的形式。进一步对该序列的频谱特性及自相关特性进行分析将会发现，混沌信号时域上表现出很强的随机性，频域上表现为宽带谱，同“白噪声”很相似，因此人们又将混沌的这一性质称为“似噪声特性”或“广谱性”。需要说明的是，尽管混沌信号呈现出随机的性质，但它不同于随机信号，它是由确定性函数产生的，理论上，当初值确定后，系统的运动轨迹是唯一确定的。因此，混沌是随机性同规律性相结合的产物。

（3）遍历性。混沌运动的遍历性是指混沌信号能在一定范围内，按自身规律不重复地遍历所有状态。

（4）敏感性。混沌的敏感性表现在两个方面，即初值敏感性和系统结构参数敏感性。初值敏感性是指初值 x_0 发生非常微小的变化，将导致其运动行为产生巨大的差异；系统结构参数敏感性是指系统的运动状态依赖于结构参数的变化。如 Logistic 映射中，系统结构参数 u 的变化决定了系统处于周期区还是混沌区，在周期区内，周期解值（2^n）同样与 u 的取值有关，这说明了系统运动轨迹状态依赖于结构参数的大小。

（5）普适性。是指混沌系统中存在着一些普遍适用的常数。以通过倍周期分叉进入混沌的一类非线性映射为例，其在分叉的速度及分叉的高度两个方面均存在着下面两个常数。

①Feiglbaumδ 常数。在倍周期分叉过程中，令 u_1 代表周期 1 分为周期 2 的分叉值，令 u_2 代表周期 2 分为周期 4 的分叉值……u_n 代表周期 2^{n-1} 分为周期 2^n 的分叉值，并计算分叉间距比值：

$$\delta_n=\frac{u_n-u_{n-1}}{u_{n+1}-u_n},\ n=2,3,4,\cdots \tag{3-8}$$

表 3－1　Logistic 映射各分叉点的参数值及其间距比值

分叉情况	分叉值 u_n	间距比值 δ_n
1→2	3	
2→4	3.449487743	4.751466
4→8	3.544090359	4.656251
8→16	3.564407266	4.668242
16→32	3.568759420	4.66874
32→64	3.569691610	4.6691
64→128	3.569891259	4.669
128→256	3.569934019	4.669
…	…	…
周期解→混沌	3.569945672	4.669201661

Feiglbaum 对这个序列做过观察和研究，他指出 δ_n 序列会很快收敛到一个常数 $\delta=4.66920\cdots$。表 3－1 关于 Logistic 映射各分叉点的参数值及其间距比值也验证了这一点。因此将 $\delta=4.66920\cdots$ 称为 Feiglbaumδ 常数，δ 值与函数的形式无关。

δ 的存在意味着倍周期分叉通向混沌的速度是呈几何级数规律增长的。若令 u_∞ 表示系统进入混沌时结构参数 u 的最小值，则可以估计 u_∞。Logistic 映射的 $u_\infty=3.571448\cdots$ 表明，当 $u\in[3.571448,4]$ 时，系统处于混沌状态，通常人们将 $u=4$ 时的 Logistic 映射称为全混沌状态。δ的存在也说明参数大约再改变 u_2-u_1 的 15%，就可预期发生混沌，为混沌系统设计提供参考。

②Feiglbaumα 常数。描述的是在倍周期分叉现象中，分叉高度（或宽度）不断缩小的变化规律。图 3－2 所示为 Logistic 映射的倍周期分叉示意图。图中示出了周期 2^n 解中接近于 $x=0.5$ 处的各 x 值之间的距离 Δ_1，Δ_2，Δ_3，…，Δ_n，Δ_{n+1}，Δ_n 称为分叉高度，对分叉高度比取极限有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}=\alpha=2.50290787 \tag{3-9}$$

式中 α 为 Feiglbaum 常数，表明分叉高度的缩小比例趋于一个极限。同时，由于超稳定点夹在两个相邻的分叉点之间，图 3－2 中还给出了各 Δ_n 所对应的参数 R_n，且有

$$R_1-R_\infty=c\delta^{-n}$$

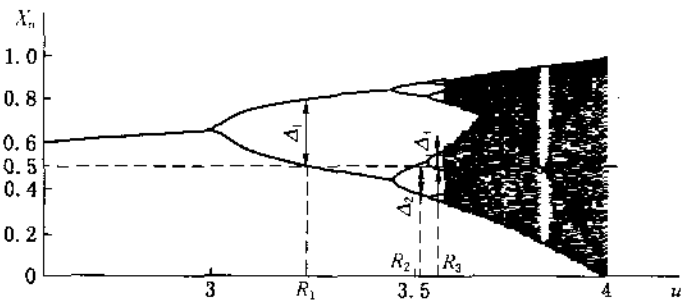


图 3－2　α 常数示意图

α 和 δ 常数在倍周期分叉现象中具有普遍意义，对于一类迭代过程都可以得到这两个常数，它们同圆周率 π 及自然对数的底 e 等常数一样，是一个普适常数，与函数形式无关。从而说明了倍周期分叉进入混沌是一种相当普遍的自然现象，不论什么系统都遵循此共同的规律，为混沌的应用提供了理论基础。

（6）分数维性。混沌同分形的起源不同，发展过程也不相同。但二者的研究内容，

从本质上讲，存在着极大的相似性。混沌学研究的是无序中的有序，许多现象虽然遵循严格的确定性规则，但大体上仍是无法预测的。例如，大气中的湍流，人的心脏跳动等等。混沌事件在不同的时间标度下表现出相似的变化模式，这与分形在空间标度下表现的相似性十分相像。混沌主要讨论非线性动力学系统的不稳定的发散过程，但系统状态在相空间中总是收敛于一定的吸引子，这与分形的生成过程十分相似。分形与混沌间表现出上述的一致性，是因为由非平衡、非线性过程所产生的混沌是一种奇异吸引子，它具有不规则的、非周期的、错综复杂的、自相似性结构的特性，是分形集（动力学系统中那些不稳定轨迹的初始点的集合），所以可用分数维来描述。

2. 混沌的描述方法

混沌的科学描述方法是混沌工程应用的基础。尽管混沌有不同的定义，但如果根据混沌的定义来判断混沌会有许多不便，因此从混沌理论出现以来，便有许多学者致力于研究混沌的识别问题[13]。

1）观察法

所谓观察法是指仅通过对被分析信号的时域或频域特征曲线的观察，来确定混沌存在与否。该类方法是基于从理论上对混沌的认识，采用实验的手段来观察混沌现象，相对简单、直观，不需复杂的计算。通常在判断一个已知的非线性系统是否出现混沌现象时，用该类方法。

2）时间历程法

又称波形图法，即画出信号的时间曲线图，该图形反映了运动轨迹随时间的变化规律。为了准确反映“定常”运动状态行为，取系统的稳定状态，通常先舍掉前面不稳定运动状态的数值后再作图。由于混沌运动是由确定性系统产生的，具有局部不稳定、整体稳定等特征，因此决定了其时间历程曲线通常表现出以下特征：

（1）“杂乱”但蕴涵着规律。

（2）具有一定的重复性。表现在对于系统的同一个输出变量，取任意的初始值都可以得到几乎完全相同的长时间定常运动状态行为。

3）相轨迹图法

相轨迹图又称相图，即系统的解（输出）曲线在相空间中的投影，此投影曲线称为相轨迹。混沌系统的相轨迹图与时间曲线图有相似的特征，即不论系统的初值点如何变化，其相轨迹图的形状（吸引子）是不发生变化的，且表现出分形的特征，如图 3－3 所示。

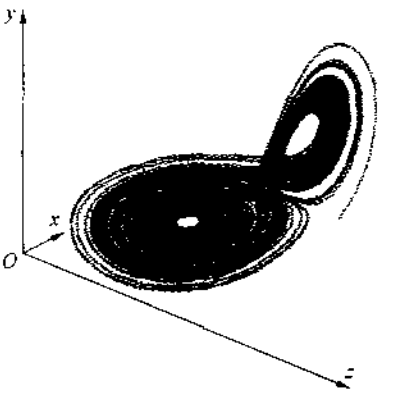


图 3－3　洛伦兹吸引子

4）庞加莱截面法

利用相图的方法可以把复杂运动简化。但是对于有些复杂运动，研究其轨道是极其困难的。例如，有些倍周期运动的倍数是很高的，其轨道看起来似乎很乱，很难与非周期运动相区别，这时就要用庞加莱截面方法研究，它不仅很容易区别周期与非周期，而且也能清楚地反映出动力系统在庞加莱截面上的相应结构。对于高维吸引子，人们也可以通过

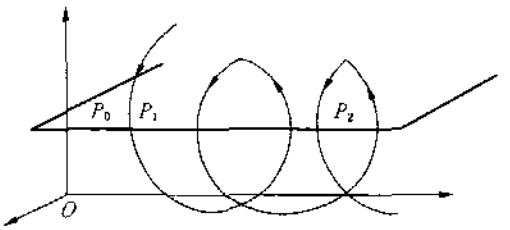


图3-4 庞加莱截面示意图

Poincare 截面方法，把吸引子变换为具有较低维相空间的映射。庞加莱截面方法的特点是将动力系统的轨线转化成轨迹与一个横截面的交点来研究，该横截面通常通过一个不稳定的不动点，从而可以在庞加莱截面上观察到系统形态随时间的演化，通过其演化现象可以推出埋藏在三维相空间中的吸引子。庞加莱截面法描述的是吸引子空间结构的一种方法，这个截面称为庞加莱截面，相空间的连续轨线通过庞加莱截面时留下的交点称为截点。通过观察截点的情况可以判断系统的动力学行为。图 3-4 就是这种方法的示意图，由图可以看出三维空间的轨线以一定演化的方向 $z<0$ 与 z 为常数的横截面 S 依次相交于 P_0 点、P_1 点、P_2 点……，这些离散点形成了一个庞加莱映射：

$$P_{k+1}=T(P_k)=T(T(P_{k-1}))=T^2(P_{k-1})=\cdots \tag{3-10}$$

如此，就将原动力系统所决定的随时间的连续运动转变为在庞加莱截面上的一个离散映射。这不仅给研究带来了很大方便，而且还使映射保持了原连续动力系统的拓扑性质。例如，若原来的动力系统是耗散的，则表明其在相空间上的体积是收缩的，那么通过映射 T，同样也表明其在庞加莱截面 S 上要收缩面积。除此之外，由于庞加莱截面将相空间的维数减少了一个，其映射 T 又是差分方程，很易求解，并且它能将必要的资料量大大减少，因此，庞加莱截面方法被广泛地应用于非线性动力学的研究中。

对于周期吸引子，若相空间只有一条周期轨道，则在庞加莱截面上只有一个点 P_0 穿过，显然庞加莱截面化为一个 P_0 点。对于拟周期吸引子，则会出现一个闭合曲线 C，该曲线或是简单的无自交的点，或是连续的曲线。而对于非周期的混沌吸引子，其庞加莱截面是沿一条线段或一曲线弧的分布点集。即这些离散点反映了吸引子的性质。

当庞加莱截面上具有一个或少数个离散点时，表明相空间中有一条或几条周期轨道，此时存在周期吸引子，运动是周期的。

当庞加莱截面上出现一条封闭曲线时，表明运动是拟周期的。

当庞加莱截面上出现一些成片的具有分形结构的密集点时，表明运动是混沌的。

5）功率谱法

功率谱反映了能量按频率的分布情况。通过对时间序列进行 Fourier 分析求出功率谱，可以区分该时间序列表征的动力系统的规则性态（不动点、周期、拟周期）与不规则性态（混沌，噪声）。对具有混沌特征的序列，其功率谱具有连续性、噪声背景和宽峰特征；对于周期性的确定性系统运动，其功率谱是离散的，仅包括基频和其谐波或分频；而对准周期运动，包含有各式各样的频率，其功率谱也是分离的，但谱线并不像周期运动那样以某间隔的频率分离，典型吸引子的功率谱，如图 3-5 所示。根据这些特征，可以将周期运动、准周期运动和白噪声的随机运动与混沌运动区分开。但在实际工作中，由于噪声（尤其是色噪声）影响，以及对于周期很长但数据有限的序列，则很难从谱特征上区分其运动模式。

从时间序列中计算功率谱的一般方法如下：

对 n 个采样值加上周期条件 $x_{n+j}=x_j$，计算自相关函数：

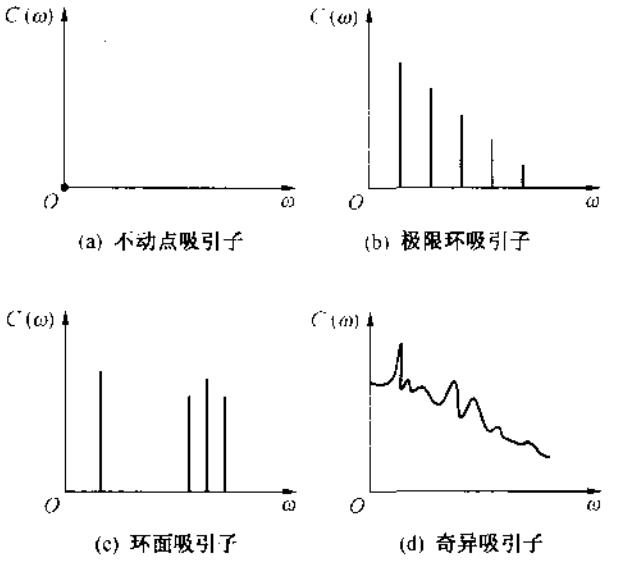


图 3-5 典型吸引子的功率谱

$$C_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+j} \tag{3-11}$$

然后对 C_j 完成离散 Fourier 变换，计算功率谱：

$$P_k = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\frac{2\pi jk}{n}} \tag{3-12}$$

1965 年美国 Cooley 和 Tukey 提出快速 Fourier 变换（FFT）。应用快速 Fourier 变换，可以直接由 x_i 做快速 Fourier 变换，得到系数：

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cos\dfrac{x_i k}{n} \\ b_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sin\dfrac{x_i k}{n} \end{cases} \tag{3-13}$$

然后计算 $P_k' = a_k^2 + b_k^2$，由许多组 $\{x_i\}$ 即可得到一批 $\{P_k'\}$，求平均后即趋近于前面定义的功率谱 P_k。

周期信号的功率谱由许多离散的谱线组成，每根谱线的高度表征相应频率的强度。而混沌信号的功率谱主要是位于低频段宽的连续谱，具有可重现性及噪声谱的特性。

而对于通过倍周期分叉进入混沌状态的混沌信号，其功率谱不但具有可重现性及噪声谱的特性，同时还具有一定的标度性。

6）自相关函数法

设一信号 $x(t)$ 的时间平均值为 $<x>$：

$$<x> = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \tag{3-14}$$

以 $\zeta(t) = x(t) - <x>$ 表示信号对时间平均值的偏离，则信号的自相关函数 $C(\tau)$ 定义为

$$C(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)\zeta(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{3-15}$$

$C(\tau)$是相隔时间τ的信号之间关联的量度。对于周期信号，$C(\tau)$不随τ的变化而变化，或者随τ做周期振荡。如果信号是混沌的，则意味着会失掉以往的信息，经一定时间后，自相关趋于零。即$C(\tau)$会随τ的衰减而趋于零。由于信号的功率谱$P(\omega)$与自相关函数$C(\tau)$的傅里叶变换是等价的，即

$$P(\omega)=|\bar{x}(\omega)|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{3-16}$$

因而这两个量包含信号的同一个信息。

7）数值计算法

对于由未知系统产生的混沌信号，往往采用数值计算的方法能够更准确地识别混沌，揭示系统的运动本质。如在判断金融市场波动、太阳黑子运动、冰川活动等现象是否呈现混沌现象时，人们就根据已有的数据，利用混沌识别的方法来检测混沌。

因此，关于混沌检测方法的研究一直是许多学者关注的热点问题，相继出现了基于关联维数、估计熵、最大 Lyapunov 指数、非线性预测等多种通过数值计算来检测混沌的方法。

8）相空间重构法

相空间重构法是根据有限的数据来重构吸引子以研究系统动力学行为的方法，其基本思想是：由于系统的任一分量的演化是由与之相互作用的其他分量所确定，因此这些相关分量的信息就隐含在任一分量的发展过程中。于是只需考察一个分量，并将在某些固定的时间延迟点上的观测值作为新维数来处理，就可以重构出一个等价的相空间。原动力系统中的任何微分或拓扑不变量可以在重构的相空间中计算，重构的相空间具有与实际的动力学系统相同的几何性质与信息特征，且不依赖于重构过程的具体细节。因此，在这个等价的相空间中就可以恢复原有动力学系统，初步确定系统的真实相空间维数，研究吸引子的性质。

在实际问题中，人们往往可以得到一个等时间间隔的单变量的时间序列。传统的做法是直接从这个序列去分析它的时间演变，这有很大的局限性。因为时间序列是许多物理因子相互作用的综合反映，它蕴藏着运动的全部变量的痕迹。而且，从形式上看，序列似乎是随机的，但实际可能包含混沌运动的信息，而混沌运动至少要在三维自治动力系统中才能出现。因此，人们只有把时间序列扩展到三维或更高维的相空间中去，才能把时间序列的混沌信息充分地显露出来，这就是时间序列的相空间重构。

1980 年，Packard 等人提出了由一维可观察量重构一个“等价的”相空间来重现系统动态特性的方法。Takens 则从数学上为其奠定了可靠的基础。他的基本观点是：相空间重构法虽然是用一个变量在不同时刻的值构成相空间，但动力系统的一个变量的变化自然跟此变量与系统的其他变量的相互作用有关，即此变量随时间的变化隐含着整个系统的动力学规律。因此，重构的相空间的轨线也反映系统状态的演化规律。其原理如下：

系统的非线性特征信息蕴涵在实际的时间序列中，重构相空间可以再现系统的原始信息，对动力系统有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{3-17}$$

可变换为 n 阶非线性微分方程：

$$x^{(n)}=f\left[x,\ x',\ x'',\ \cdots,\ x^{(n-1)'}\right] \tag{3-18}$$

则系统的新轨迹为

$$\vec{x}=f\left[x(t),\ x'(t),\ x''(t),\ \cdots,\ x^{(n-1)'}(t)\right] \tag{3-19}$$

式（3-19）描述了同样的动力学行为，系统在由坐标 x（t）及其（$n-1$）阶导数所张成的相空间中演变。实际面对的多数为离散时间序列，考虑（$n-1$）时的滞位移，则有

$$\vec{x}=\{x(t),\ x(t+\tau),\ x(t+2\tau),\ \cdots,\ x[t+(n-1)\ \tau]\} \tag{3-20}$$

式（3-20）表明，动力系统的原始演化信息可以被重现于具有滞后坐标的新的相空间中，因此可将单变量时间序列（$\{x_i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）延拓成相空间中一个包含$[n-(m-1)]$个相点的相型分布：

	$X(t_1)$，	$X(t_2)$ ，	$\cdots$，$X(t_i)$，	$\cdots$，$X[t_n-(m-1)\tau]$
第 1 维：	$x(t_1)$，	$x(t_2)$，	$\cdots$，$x(t_i)$，	$\cdots$，$x[t_n-(m-1)\tau]$
第 2 维：	$x(t_1+\tau)$，	$x(t_2+\tau)$，	$\cdots$，$x(t_i+\tau)$，	$\cdots$，$x[t_n-(m-2)\tau]$
第 3 维：	$x(t_1+2\tau)$，	$x(t_2+2\tau)$，	$\cdots$，$x(t_i+2\tau)$，	$\cdots$，$x[t_n-(m-3)\tau]$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮
第 m 维：	$x[t_1+(m-1)\tau]$，	$x[t_2+(m-1)\tau]$，	$\cdots$，$x[t_i+(m-1)\tau]$，	$\cdots$，$x(t_n)$

相点之间的连线描述了系统在 m 维相空间中的演化轨迹。

在 Takens 研究的基础上，Sauer 等又把延迟嵌入定理推广到了具有噪声的情况；同时许多文献又进一步研究讨论了延迟时间τ和嵌入维数 m 在相空间重构中的作用和影响，并提出了许多确定最佳延迟时间τ_0 和嵌入维数 m_e 的方法。

由于在实际观测的时间序列中，噪声的存在削弱了信号中的确定性特征，且其在 R^m 中具有不同特征的基底上，影响也不一样，加之嵌入空间通常是一个多维空间，难以用几何的方法把吸引子画出来，因此可采用将吸引子投影到两主轴平面的吸引子重现方法，将吸引子画出来，即由于在该面上吸引子几何形状最大，而噪声在这两个特征向量上的影响较小，因而使得重构的吸引子包含了所研究系统的最主要动力学特征。具体步骤如下：

（1）确定嵌入相空间的维数 m 和延迟间隔τ，产生 N_0 个 m 维向量 X_n。

（2）构造轨道矩阵 X 如下：

$$X=N_0^{-\frac{1}{2}}\left[X_1^{\mathrm{T}},\ X_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ X_{N_0}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3-21}$$

（3）构造协方差矩阵 A：

$$A=X^{\mathrm{T}}X=\frac{1}{N_0}\sum_{n=1}^{N_0}X_nX_n^{\mathrm{T}} \tag{3-22}$$

A 是一个（$m\times m$）实对称矩阵，对应于一个二次型。

（4）通过变量的满秩线性变换，将矩阵 A 转化为标准型，其特征向量可确定出嵌入空间 R^m 的一组完全正交基。取其中最大的两个特征值（λ_1，λ_2），并将所得到的轨迹投影到（λ_1，λ_2）所构成的平面上，则吸引子在该平面上的形状反映了原始信号吸引子的特性，因此可通过观察吸引子的特征或计算吸引子的分数维等特征量来判断混沌。在实际应用时，为使计算量尽量少，一般总是先假设一较大的嵌入空间维数，通过计算不同嵌入维时重构的协方差矩阵的特征谱，确定出一较小的 m 值，然后再从步骤（1）开始进行上

述的重构过程。

9）关联维数法

按照第4章关联维数的计算方法，求得分数维 D，在此不再重复介绍。对于一个非线性系统而言，定常运动的分数维 D 为0，周期运动的分数维 D 为1，准周期运动的分数维 D 为2或3，随机运动的分数维 D 为无穷大，混沌运动的分数维 D 为正分数（维数为分数的系统未必是混沌系统）。维数为分数的物理意义在于，可以定量描述动力学系统几何结构和物理空间结构的破碎度，分数维是定量评价系统复杂程度的重要指标。

10）计算最大 Lyapunov 指数法

Lyapunov 指数的重要作用之一是判断系统是否具有混沌行为。在一般的非线性系统中，相互靠近的轨迹要么指数地迅速收敛，要么指数地发散（最坏的情况），至少在理论上，长期预测是可能的。而在混沌系统中，由于初始状态的微小不确定性将会迅速地按指数速度扩大，因此预测能力也将随之迅速丧失。这种轨迹收敛或发散的比率，称为 Lyapunov 指数。混沌动力学方法是解决定量评价非线性复杂系统稳定性的有效手段，其评价指标具有整体概念。最大 Lyapunov 指数（LE_1）表示两条初始无限小分开的轨迹之间的相对距离，在单位时间内的平均指数增长因子。对于确定性系统，LE_1 为正，说明该系统是混沌的。反之，则表明该时间系列是有序系统，也就是说是周期的或准周期的。LE_1 与系统运动特性之间的对应关系为：$LE_1<0$ 时系统为定常运动；$LE_1=0$ 时系统为（准）周期运动；$LE_1>0$ 时意味着初始状态相接近的不同轨迹总体上会指数发散，即系统出现了混沌运动；LE_1 趋于无穷大时系统为随机运动。考虑一个最简单的线性常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax \tag{3-23}$$

其解为 $x=x_0\mathrm{e}^{at}$，它是以指数规律增减的。设有初始时刻相邻的两条轨道：当 $a>0$ 时，其距离按指数 e^{at} 分离；当 $a<0$ 时，其距离按指数 e^{at} 收缩；当 $a=0$ 时，其距离永远保持不变。

对于一般的情况，x 是矢量，a 是雅可比矩阵，且依赖于所给定的线性化点。该矩阵的特征值则决定了两个相邻点之间的伸长或压缩，其速率可能在相空间中各点不同，只有对运动轨道各点的伸长或压缩的速率进行长期平均，才能刻画动力系统的整体效果，这就是 Lyapunov 指数的概念。对于一个 n 维的动力系统，一定存在一个有 n 个 Lyapunov 指数的 Lyapunov 指数谱，若该动力系统为一个混沌动力系统，则这 n 个 Lyapunov 指数的和一定为负（代表吸引子总体积不断减小），且至少有一个指数为正。

Lyapunov 指数是刻画耗散体系相空间中相体积收缩过程中的几何特征变化的物理量。考察以 x_0 为中心的 m 维无穷小球面的长时间演变，由于局域变化球面变为 m 维椭球面，以 t 时刻按长度排在第 i 位的椭球轴长度 $w_i(t)$ 相对初始球半径 $w_i(0)$ 的平均变化，采用 Lyapunov 指数来表示其增长率为

$$LE_i=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log_2\frac{w_i(t)}{w_i(0)} \tag{3-24}$$

此时椭球的线度以 $2^{LE_i t}$ 的速度增长或收缩。

Wolf 给出了在一维时间数据中提取 Lyapunov 指数的方法：

（1）应用时间序列选取延滞时间 τ，根据观测样本的总数 N，构造 m 维嵌入相空间，以及相应的轨道点集 $\{X(t_i)\}$。

（2）如图3－6所示，在延拓的 m 维相空间里，取初始相点 $A(t_1)$ 为参考点，在其余的相点中求得与初始点 $A(t_1)$ 的最临近点 $B(t_1)$：

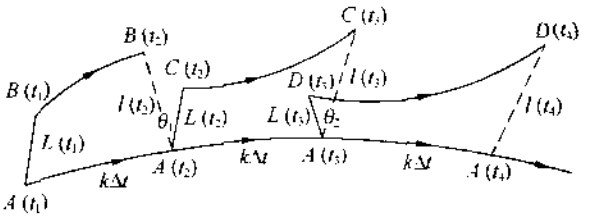


图3－6　相轨线辐散示意图

$$L_{nbt} = \min_{i \neq j} \| X_i - Y_j \| \tag{3-25}$$

L_{nbt} 表示欧氏距离，记 $L_{nbt} = L(t_1)$。设 $t_2 = t_1 + k\Delta t$ 时，$A(t_1)$ 点演化到 $A(t_2)$ 点，而同时 $B(t_1)$ 点演化到 $B(t_2)$ 点，其间距 $\overline{A(t_2)\ B(t_2)} = \overline{l(t_2)}$。若用 λ_1 表示在此时间内线段的指数增长率，则

$$l(t_2) = L(t_1)2^{\lambda_1 k} \tag{3-26}$$

即

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}\log_2 \frac{l(t_2)}{L(t_1)} = \frac{1}{k}\log_2 \frac{l(t_2)}{L(t_1)} \tag{3-27}$$

（3）在 $A(t_2)$ 的若干个最近临点中找出一个满足 θ_1 角很小的近邻点 $C(t_2)$（如果找不到，仍然取 $B(t_1)$），当时间 $t_3 = t_2 + k\Delta t = t_1 + 2k\Delta t$，$A(t_2)$ 点演化到 $A(t_3)$ 点，同时 $C(t_2)$ 发展到 $C(t_3)$，且 $\overline{A(t_3)C(t_3)} = l(t_3)$ 时，得

$$\lambda_2 = \frac{1}{k}\log_2 \frac{l(t_3)}{L(t_2)} \tag{3-28}$$

将上述过程一直进行到点集 $\{X(t_i)\}$ 的终点，然后取指数增长率 λ_n 的平均值为最大的 Lyapunov 指数的估计值，即

$$LE_1(m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k}\log_2 \frac{l(t_i)}{L(t_{i-1})} \tag{3-29}$$

式中　N——演化的总步数；

　　k——步长。

（4）增加嵌入维数，重复（1）～（3）的步数，直至指数估计值 $LE_1(m)$ 保持平稳为止，记：

$$LE_1(m_0) = LE_1(m_0 + 1) = \cdots = LE_1 \tag{3-30}$$

此时得到的 LE_1，便是所谓的最大 Lyapunov 指数。

这就是计算 Lapunov 指数的基本思想，而在实际求解过程中，可采用更多的方法，如雅可比矩阵法，最小均方差确定法等等。

11）非线性预测法

混沌的非线性预测方法，即著名的逐段线性预测方法，是由 Casdagli 于 1991 年提出来的。其基于 Takens 的嵌入定理，即当嵌入维数和延迟时间选择恰当时，嵌入后存在着

形如 $X_{n+T}=f(x_n)$ 的光滑图形，其中 X_n 是重构后的向量（点）。于是，可以通过使用一变量 k（k 表示 X_n 周围相临近点的数目）来进行逐段逼近。当 k 较小时，最好的模型是确定的；当 k 很大时，最恰当的模型是随机线性自回归模型；而当 k 取值为中等大小时，则最适合用非线性随机模型。因此可通过预测对相临点误差数目的曲线确定所给信号的性质。若在较小的 k 值处获得最佳的预测误差，则信号是非线性和确定的；而当最佳的预测误差在 k 很大处得到时，信号就是线性随机的；显然，在两者之间的情况表明信号是非线性随机的。序列在相空间重构后，则可以计算预测误差。但该算法不容易区分出高维混沌和噪声，且对噪声强度及数据量的鲁棒性差，例如当数据量小于 5000 点时，该算法无法用于混沌的识别。

除上述介绍的典型混沌识别方法之外，还存在许多由上述方法演生、改进及用其他不同思路来判别混沌的方法。但这些方法在使用过程中，不同程度地存在观测噪声、数据量鲁棒性差，计算较复杂等缺陷。而在实际的工程应用系统中，被分析的数据又往往由于观测手段或实际系统参数的微扰而存在许多噪声，同时由于某些客观条件的限制决定了被分析数据的长度有限。因此，如何判断小数量、强噪声的信号是确定性的混沌还是随机信号，具有非常重要的工程应用价值，已成为目前混沌检测的主要方向。到目前为止，由于混沌状态的高度复杂性，还缺乏一个普适性的混沌科学的描述方法。随着数字信号处理技术的飞速发展，人们在研究混沌时现已通常采用数值法[14]。

3.1.3 混沌工程学

工程是指制造一种能产生某种现象或实现某种功能的物理系统。它能稳定地工作，并且能很好地对系统进行控制，使它按人们的要求工作。因此，按照这一原则，用工程手段来处理混沌问题或利用混沌去解决实际工程问题，首先应能制造出实现混沌现象的物理系统，使其能够有效的被控制，稳定地工作，以满足系统功能要求。

混沌工程学（Engineering Chaos）是混沌学在工程上的应用。它是将混沌理论研究成果投入到实际工程应用的一个体现，是混沌理论同其他学科相互促进，相互渗透，综合发展而形成的一门新的分支。在混沌工程学中，产生混沌、识别混沌是充分利用混沌的前提。

由于混沌工程学注重的是混沌的应用[15]，因此，混沌工程学的研究方法、手段及内容与侧重于对混沌理论进行研究的混沌学相比具有很大的差异，如作为科学的混沌学，注重“混沌”的确切定义，总希望在定义比较清楚的情况下展开研究，因而在判断是否出现混沌现象方面较苛刻，通常需要同时采用计算机模拟、观察解的表现、计算奇异吸引子的分数维、Lyapunov 指数等多种方法。而着重于应用的混沌工程学往往是超前应用，以至于为了活跃混沌的应用研究，先不考虑混沌的定义，仅根据混沌的基本特征，通过实验观察来判断混沌的存在。实际上，有许多研究工作已经超出了混沌定义所规定的框架。但混沌工程学的发展是离不开混沌学理论的，混沌理论是基础，混沌工程学则是混沌理论发展的必然结果，二者相辅相成使得混沌科学更加多姿多彩。

3.2 坚硬岩层运动过程中的混沌性

矿山开采中的坚硬顶板问题一直是困扰安全生产的主要矛盾，尤其是坚硬顶板厚度较大时，其长时间大面积悬跨不落始终威胁着现场。坚硬顶板的剧烈运动具有突发性，是冲

击地压的一种成因，分析其运动机理，研究其可预测问题，为及时有效地控制风险提供依据，具有重要的理论和实际意义。长期以来，国内外的众多学者对坚硬顶板的运动规律及预测方法和控制措施进行了大量卓有成效的研究工作。基于对坚硬顶板系统的基本力学分析，根据能量余原理建立坚硬顶板的运动方程，为进一步研究坚硬顶板运动系统的稳定性状态，以及实现坚硬顶板的垮落预测与主动控制提供了理论参考。

矿山采场的坚硬顶板一般具有整体性强、硬度高、裂隙不发育、采后不易垮落及垮落具有强烈冲击性等特点，大面积悬顶将使工作面四周煤体及巷道形成应力集中区。坚硬顶板的突然运动，经常成为冲击地压发生的根本原因。研究坚硬顶板随其悬跨面积逐渐扩大的运动规律，对有计划的选择实施强制放顶等防冲击措施的时机，促使坚硬顶板从冲击性整体运动向周期性分段运动转化，具有实际意义。

3.2.1 坚硬顶板运动方程的建立

建立包含“施加周期性影响因素”的坚硬顶板运动二维二阶微分方程，求解运动方程的解析解，采用解析混沌法讨论其正 LE、正测度熵等指标，以探讨坚硬顶板运动方程的稳定性。周期性影响因素是循环采煤活动对坚硬顶板施加的支护与卸载作用的简化，主要指工作面内的采煤活动，通过改变坚硬顶板运动方程中的振幅 P，研究系统演化行为或实现其稳定性的混沌控制。从断裂力学角度对坚硬顶板系统状态失稳的机理进行基本力学分析，根据能量原理建立坚硬顶板的运动方程，以作为研究坚硬顶板运动系统的稳定性状态，实现坚硬顶板的垮落预测与主动控制的理论参考。

1. 坚硬顶板应力边界条件假设

如图 3－7 所示，在自然的原岩应力状态下，坚硬顶板的顶边界承受上覆岩层的垂直均布载荷：

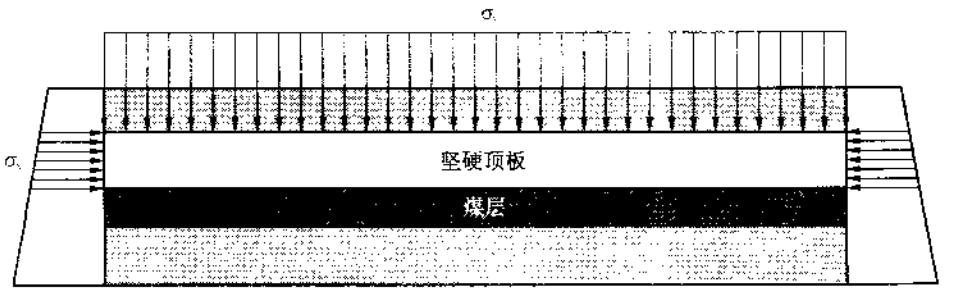


图 3－7 坚硬顶板应力边界条件

$$\sigma_v = \gamma D \tag{3-31}$$

式中 γ——坚硬顶板上覆岩层的平均重力密度；

D——坚硬顶板赋存深度。

坚硬顶板底边界承受煤层的支撑力，两侧为无限体，简化为自重水平应力。在矿山，由于坚硬顶板的赋存深度一般达数百米，远大于坚硬顶板的高度，因此可假设两侧为均布水平压应力边界：

$$\sigma_x = \lambda \gamma D \tag{3-32}$$

式中 λ——水平侧压力系数。

2. 煤层开挖后坚硬顶板的力学模型建立及受力分析

在原岩应力状态下的坚硬顶板模型中，采出宽度为 L，高度为 H（明显小于其悬跨宽度 L）的煤层，以固支梁形式模拟现场煤层开挖后的坚硬顶板。建立坚硬顶板的力学模型，如图3－8所示。在坚硬顶板的自重 G 及上覆岩层垂直应力 σ_y 作用下，其两侧的边界 AB 和 CD 处于拉应力状态，假设拉应力呈三角形分布，P_1 和 P_2 分别为 A 点和 D 点处坚硬顶板所受的拉力。B 点和 C 点承受来自煤层底板岩层的支撑力 F_1 和 F_2。AD 为坚硬顶板与其上覆岩层间的交界面，在坚硬顶板弯曲断裂前，上覆岩层将通过滑动面 AD 对坚硬顶板施加切应力 τ。在坚硬顶板的中心断面 MN 上将产生轴向内力，假设呈中心对称三角形分布，坚硬顶板底界中心 M 点处的拉力为 P_3。在自重 G 及上覆岩层的垂直应力 σ_y 作用下，坚硬顶板运动为平面应力问题。假设坚硬顶板的失稳判据为 A 点、M 点、D 点处拉断裂的发生，由于在这三个位置发生断裂后相应的力即已消失，因此断裂的发展为恒位移加载情形。

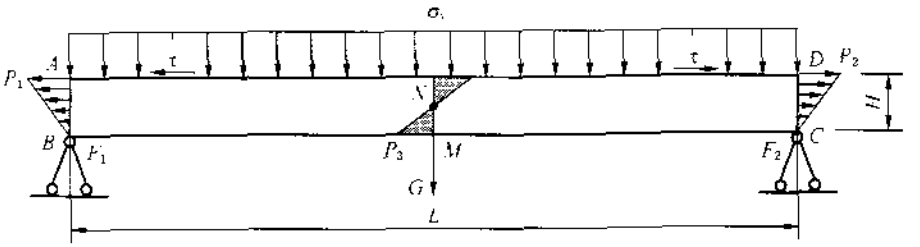


图3－8 坚硬顶板力学模型

从能量平衡的观点出发，应用阻力曲线法研究该平面应力断裂问题。断裂扩展的瞬间满足能量平衡方程，考虑外力输入功率、外界输入的热功率、动能、表面能、弹性应变能和塑性应变能等，能量率的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U_p}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} \tag{3-33}$$

式中 W——外力输入功；

Q——外界输入的热能；

K——系统动能；

U_e——弹性应变能；

U_p——塑性应变能；

Γ——表面能。

为简化问题，不考虑系统与外界的热交换并略去动能。按照 Griffith 脆断理论，对脆性的坚硬顶板材料而言，也同样可以不把塑性应变能作为重点。因此式（3－33）可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}t}=2\rho\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \tag{3-34}$$

式中 ρ——裂纹扩展单位面积能；

A——裂纹扩展面积。

考虑$\frac{dA}{dt}>0$，得促使裂纹扩展所需的能量，即裂纹扩展阻力 R 为

$$R=\frac{\partial W}{\partial A}-\frac{\partial U_e}{\partial A}=2\rho \tag{3-35}$$

即外力做功的一部分形成了坚硬顶板系统可储备的弹性应变能，另一部分形成断裂表面，在此基础上进行坚硬顶板断裂分系统的能量研究[16-18]。

3. 坚硬顶板运动失稳的数学模型

1）坚硬顶板断裂分系统的能量分析

将前述坚硬顶板易于拉断失稳的 A 点、M 点、D 点三处，设定为三个分系统进行能量分析，其受力条件相似，力学模型如图 3-9 所示。

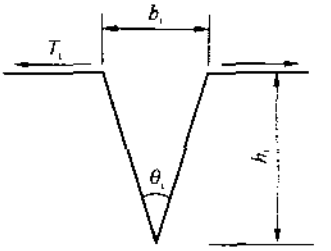


图 3-9　坚硬顶板断裂的力学模型

对 A 点处和 D 点处的断裂系统而言，促使裂纹扩展的作用力大小相等、方向相反，即

$$|T_1|=|T_2|=P_1-\tau\frac{L}{2}=P_2-\tau\frac{L}{2} \tag{3-36}$$

式中　τ——AD 面剪切强度，据 Columb-Mohr 应力准则，$\tau=C+\sigma_y\tan\varphi$，其中 C、φ 分别为 AD 面的黏结强度和内摩擦角。

对 M 处的断裂系统而言，促使裂纹扩展的拉力 $T_3=P_3$。

图 3-10 所示为坚硬顶板断裂后的状态，由此可得 A 点、M 点、D 点三处开裂角、断裂深度、开裂宽度及剪切内位移 u' 之间的关系为

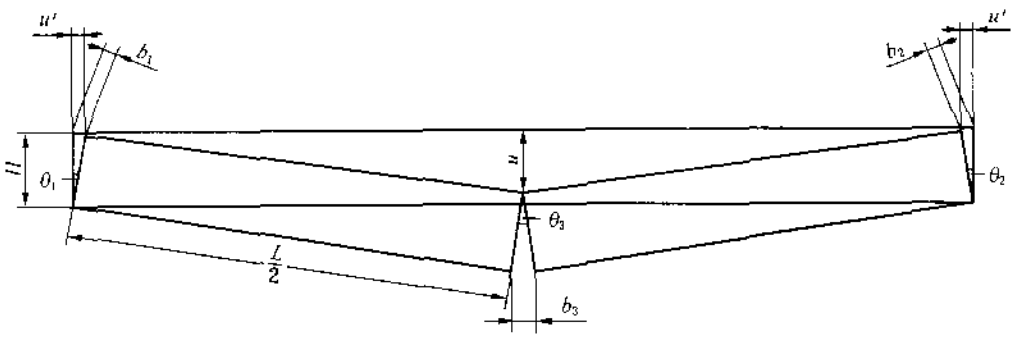


图 3-10　坚硬顶板断裂状态示意图

$$\theta_1=\theta_2=\frac{\theta_3}{2} \tag{3-37}$$

$$h_1=h_2=h_3=h \tag{3-38}$$

$$b_1=b_2 \tag{3-39}$$

$$h=\frac{b_3}{2}\cot\frac{\theta_3}{2}=u'\cot\frac{\theta_3}{2} \tag{3-40}$$

查《应力强度因子手册》，该类裂纹属边缘作用有集中力的边缘型裂纹情形（对应于文献［20］中 $Q=0$、$\theta=0$ 的情况），在平面应力状态下，其应力强度因子分别为[19,20]：

$$K_{\mathrm{II}}=K_{\mathrm{I2}}=\frac{2.6}{\sqrt{\pi h}}T_1=\frac{2.6}{\sqrt{\pi h}}\left(P_1-\tau\frac{L}{2}\right)=\frac{2.6}{\sqrt{\pi h}}\left[P_1-(C+\sigma_y\tan\varphi)\frac{L}{2}\right] \tag{3-41}$$

$$K_{\mathrm{I3}}=\frac{2.6}{\sqrt{\pi h}}T_3=\frac{2.6}{\sqrt{\pi h}}P_3 \tag{3-42}$$

坚硬顶板近似处于线弹性状态或小屈服状态，据 Riel 的 J 积分理论，本文平面应力状态下 A 点、M 点、D 点三处裂纹分系统的裂纹扩展能量释放率与其应力强度因子之间的关系分别为

$$G_{\mathrm{II}}=G_{\mathrm{I2}}=\frac{1}{E}K_{\mathrm{I2}}^2=\frac{6.76}{E\pi h}\left[P_1-(C+\sigma_y\tan\varphi)\frac{L}{2}\right]^2 \tag{3-43}$$

$$G_{\mathrm{I3}}=\frac{1}{E}K_{\mathrm{I3}}^2=\frac{6.76}{E\pi h}P_3^2 \tag{3-44}$$

式中 E——坚硬顶板岩石材料的弹性模量。

因此，A 点、M 点、D 点三处断裂分系统的应变能释放量分别为［将式（3-40）代入］：

$$\begin{aligned}E_1&=E_2=\int(-G_{\mathrm{II}})\mathrm{d}h=\int\left\{-\frac{6.76}{E\pi h}\left[P_1-(C+\sigma_y\tan\varphi)\frac{L}{2}\right]^2\right\}\mathrm{d}h\\&=-\frac{6.76}{E\pi}\left[P_1-(C+\sigma_y\tan\varphi)\frac{L}{2}\right]^2\ln h+f_1\\&=-\frac{6.76}{E\pi}\left[P_1-(C+\sigma_y\tan\varphi)\frac{L}{2}\right]^2\ln\left(u'\cot\frac{\theta_3}{2}\right)+f_1\end{aligned} \tag{3-45}$$

$$\begin{aligned}E_3&=\int(-G_{\mathrm{I3}})\mathrm{d}h=\int\left(-\frac{6.76}{E\pi h}P_3^2\right)\mathrm{d}h\\&=-\frac{6.76}{E\pi}P_3^2\ln h+f_2=-\frac{6.76}{E\pi}P_3^2\ln\left(u'\cot\frac{\theta_3}{2}\right)+f_2\end{aligned} \tag{3-46}$$

式中 f_1——待定系数；

f_2——待定系数。

2）坚硬顶板系统的总能量

坚硬顶板在图 3-8 所示的力场作用下，将沿滑面 AD 产生朝向悬跨中心 N 的内位移 u'，同时发生垂直位移 u。简化坚硬顶板体力及其覆岩均布载荷的作用位移为 u，假设 AD 层面滑动服从下述切应力-切位移关系：

$$\tau=\begin{cases}\mu\dfrac{u'}{\frac{L}{2}}=\dfrac{2\mu u'}{L},\ (u'\leqslant u'^*)\\ \tau^*,\ (u'>u'^*)\end{cases} \tag{3-47}$$

式中 μ——AD 层面的剪切模量；

u'^*——AD 层面滑动失稳时的切位移；

τ^*——AD 层面滑动后残余剪切强度。

坚硬顶板系统的总能量为

$$
\begin{aligned}
U &= -Gu-\sigma_y Lu-E_1-E_2-E_3+2\times\frac{1}{2}\tau u'\frac{L}{2}\\
&=-mgu-\sigma_y Lu-2\left\{-\frac{6.76}{E\pi}\left[P_1-(C+\sigma_y\tan\varphi)\frac{L}{2}\right]^2\ln\left(u'\cot\frac{\theta_3}{2}\right)+f_1\right\}\\
&\quad-\left[-\frac{6.76}{E\pi}P_3^2\ln\left(u'\cot\frac{\theta_3}{2}\right)+f_2\right]+\mu u'^2\\
&=-(mg+\sigma_y L)u+\mu u'^2+\frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\ln\left(u'\cot\frac{\theta_3}{2}\right)\\
&\quad-(2f_1+f_2)
\end{aligned}
\tag{3-48}
$$

式中 m——坚硬顶板的质量；

g——重力加速度。

由图3-10建立如下方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{u'}{H}=\sin\theta_1\\
u=u'\tan\theta_1+\dfrac{L}{2}\sin\theta_1\approx u'\sin\theta_1+\dfrac{L}{2}\sin\theta_1
\end{cases}
\tag{3-49}
$$

解得 u' 及 u 之间的关系为

$$
\begin{cases}
u=\dfrac{u'^2}{H}+\dfrac{u'L}{2H}\\
u'=\dfrac{\sqrt{L^2+16Hu}-L}{4}
\end{cases}
\tag{3-50}
$$

将式（3-50）中的 u 代入式（3-48）并整理，得坚硬顶板系统的总能量表达式为

$$
\begin{aligned}
U&=-(mg+\sigma_y L)\left(\frac{1}{H}u'^2+\frac{L}{2H}u'\right)+\mu u'^2\\
&\quad+\frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\ln\left(u'\cot\frac{\theta_3}{2}\right)-(2f_1+f_2)
\end{aligned}
\tag{3-51}
$$

促使坚硬顶板失稳的综合不平衡力可由式（3-52）求得

$$
\begin{aligned}
F&=-\frac{\partial U}{\partial u'}=\frac{2(mg+\sigma_y L-\mu H)}{H}u'-\frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\frac{1}{u'}\\
&\quad+\frac{L(mg+\sigma_y L)}{2H}
\end{aligned}
\tag{3-52}
$$

在点（u'^*，τ^*）处将式（3-52）按 Taylor 级数展开，由于（$u'-u'^*$）为小值，略去高次项得

$$
\begin{aligned}
F(u')&\approx F(u'^*)+F'(u'^*)(u'-u'^*)+\frac{F''(u'^*)}{2}(u'-u'^*)^2\\
&=\frac{2(mg+\sigma_y L-\mu H)}{H}u'^*-\frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\frac{1}{u'^*}+\frac{L(mg+\sigma_y L)}{2H}\\
&\quad+\left\{\frac{2(mg+\sigma_y L-\mu H)}{H}+\frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\frac{1}{u'^{*2}}\right\}(u'-u'^*)\\
&\quad-\frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\frac{1}{u'^{*3}}(u'-u'^*)^2
\end{aligned}
$$

$$= \left\{ \frac{2(mg+\sigma_y L-\mu H)}{H} + \frac{10.14\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\frac{1}{u'^{*2}} \right\} u'$$

$$- \frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\pi E}\frac{1}{u'^{*3}}u'^2$$

$$+ \left\{ \frac{3.38\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right](2-u'^*)}{\pi E u'^*} + \frac{L(mg+\sigma_y L)}{2H} \right\} \tag{3-53}$$

4. 坚硬顶板系统的运动方程

坚硬顶板的初次垮落运动虽然具有突发性，但仍然是其在时间和空间上能量积蓄到一定程度的结果。坚硬顶板的运动是剧烈的、瞬态的，与其位移速度和加速度密切相关。除了前述对坚硬顶板发生作用的力场，外界施加或系统内蕴的阻尼因素也是影响坚硬顶板系统演化的关键。在矿山地下的现场，坚硬顶板系统还经受着震动、温度升降、湿度变化等环境因素的影响，尤其是周期性的资源开采活动，不停地对坚硬顶板产生扰动，这些影响应以周期性信号的方式输入坚硬顶板运动系统。因此坚硬顶板的失稳合力又可以表示为

$$F = m\ddot{u} + \eta\dot{u} - P\cos\omega t \tag{3-54}$$

式中 η——坚硬顶板系统阻尼损耗因子；

P——周期性影响因素的振幅；

ω——周期性因素的影响频率。

强迫扰动项 $P\cos\omega t$ 的加入，使得坚硬顶板运动由自治动力系统转变为非自治动力系统[21-23]。为简化微分方程求解，近似将 u 与 u' 关系式中的一次项代入式（3-54）得

$$F = m\ddot{u}'\frac{L}{2H} + \eta\dot{u}'\frac{L}{2H} - P\cos\omega t \tag{3-55}$$

综合式（3-53）和式（3-55），考虑单位厚度坚硬顶板的质量表达式为 $m=\gamma HL$（γ 为坚硬顶板容重），代入并化简得坚硬顶板系统的运动方程为

$$\ddot{u}' + d\dot{u}' - \left\{ \frac{4g}{L} + \frac{4(\sigma_y L-\mu H)}{\gamma HL^2} + \frac{20.28\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\gamma L^2\pi E}\frac{1}{u'^{*2}} \right\} u'$$

$$+ \frac{6.76\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right]}{\gamma L^2\pi E}\frac{1}{u'^{*3}}u'^2$$

$$= \frac{2H}{L}P\cos\omega t + \left\{ \frac{6.76\left[(2P_1-LC-L\sigma_y\tan\varphi)^2+2P_3^2\right](2-u'^*)}{\gamma L^2\pi E u'^*} + g + \frac{\sigma_y}{\gamma H} \right\} \tag{3-56}$$

式中 d——坚硬顶板的系统阻尼，$d=\frac{\eta}{m}$；

P——外部周期输入信号的系统振幅，$P=\frac{p}{m}$。

该方程为二阶非自治非线性微分方程，根据现场条件进行参数取值且考虑边值条件，可以对坚硬顶板的运动方程求解，并讨论其稳定性问题。

3.2.2 坚硬顶板运动方程扰动失稳的混沌理论分析

运用非线性动力学方法分析坚硬顶板动力学方程的稳定性，是坚硬顶板运移规律研究

的新途径。研究坚硬顶板系统演化的混沌动力学特征，评价指标为 LE_1 和 K 熵。

根据北京矿务局木城涧煤矿坚硬顶板的现场条件和工程类比进行参数取值：$\mu=2\times10^6$Pa，$\gamma=2.8\times10^4$N/m^3，$L=100$m，$H=35$m，$C=1\times10^6$Pa，$\sigma_y=1.5\times10^7$Pa（坚硬顶板赋存深度约为600m），$\varphi=40°$，$E=3\times10^{10}$Pa，$g=9.81$m/s^2；P_1 和 P_3 分别取 3×10^8N 和 6×10^8N；u'' 设定为 0.1m，d 取 0.05bit/cycle；ω 取 2 次/d，以体现三班制采煤活动对坚硬顶板一日二次的扰动，此时假设采煤循环进尺相对于坚硬顶板悬跨长度为小量，否则应对坚硬顶板运动特征进行分阶段研究。将上述参数代入式（3-56），可得到木城涧煤矿坚硬顶板系统仅包含未知系数 P（系统振幅）的动力学方程，解该微分方程，得其通解为

$$u'(t)=-\frac{3.1\times10^5}{3.05\times10^5}-\frac{3.775\times10^7}{1.86\times10^9}P\cos2t+\frac{1.094\times10^5}{1.86\times10^9}P\sin2t+C_1e^{\frac{-5+\sqrt{1220729}}{200}t}+C_2e^{-\frac{5+\sqrt{1220729}}{200}t}\tag{3-57}$$

坚硬顶板动力学系统显然具有边值条件：$t=0$ 时，$u'=0$ 且 $(u')'=0$。将边值条件代入式（3-57），求得待定系数 C_1、C_2，得木城涧煤矿坚硬顶板系统动力学方程的解为

$$\begin{aligned}u'(P,t)=&-\frac{3.1\times10^5}{3.05\times10^5}-\frac{3.775\times10^7}{1.86\times10^9}P\cos2t+\frac{1.094\times10^5}{1.86\times10^9}P\sin2t\\&+\frac{2.21\times10^{13}P+1.44\times10^{15}+2.89\times10^{14}\sqrt{1220729}+5.76\times10^{12}\sqrt{1220729}P}{6.935\times10^{20}}\\&\times\sqrt{1220729}e^{\frac{-5+\sqrt{1220729}}{50000}t}+\left(\frac{3.1\times10^5}{6.1\times10^5}+\frac{3.775\times10^7P}{3.72\times10^9}\right.\\&\left.-\frac{1.48\times10^8\sqrt{1220729}P}{4.545\times10^{15}}-\frac{1.55\times10^6\sqrt{1220729}}{7.45\times10^{11}}\right)e^{-\frac{5+\sqrt{1220729}}{50000}t}\end{aligned}\tag{3-58}$$

解中包含外部周期输入信号的系统振幅 P，体现了资源开采活动对坚硬顶板的扰动作用与悬跨坚硬顶板质量之间的相对比例关系。在 0.0001%～20% 范围内不均匀取 P 值 50 组，分别在两个自然周期（$0\sim4\pi$）内以 0.01 间隔变化 t 值，得到解随时间演化的规律。编程求解，得到每个方程解的时间序列长度为 651，共 50 组。研究坚硬顶板系统状态随 P 值变化而改变的特征，可以得到资源开采活动对坚硬顶板稳定性的扰动规律。

对上述 50 组方程解的时间序列分别提取混沌指标 LE_1 和 K，见表 3-2。将 LE_1 和 K 随 P 值演化的规律分段表示，如图 3-11 所示。

可见，随 P 值的增加，LE_1 值包含正、负和 0 三种情形，表明坚硬顶板运动系统经历了定常运动、（准）周期运动和混沌运动。随 P 值的增加，K 值为 0 和正值，且正值段波动较大，表明坚硬顶板运动系统的演化是有序系统和混沌系统的交替，系统处于混沌状态时的混沌程度不同。P 值反映了资源开采活动对坚硬顶板的扰动作用与悬跨坚硬顶板质量之间的相对比例关系，P 值由 0.0001% 增加到 0.9225%，LE_1 为负，K 为 0，坚硬顶板处于有序的定常态，系统是稳定的，表明微小的扰动作用影响很小；P 值由 0.93% 增加到 2.85%，LE_1 为正，K 为正，坚硬顶板处于混沌态，虽然该阶段系统仍然是稳定的，但系统的复杂程度及其内部各因素之间的相互作用在增强，该阶段 K 值波动剧烈并在 $P=2\%$ 时取最大值，表明坚硬顶板系统的混沌程度在 $P=2\%$ 时最高，据此可以预测系统承受扰动作用的能力；P 值由 2.9% 增加到 7.95%，LE_1 为负，K 为 0，坚硬顶板处于有序的定

表 3-2　动力方程解的混沌指标

P	LE_1	K	P	LE_1	K	P	LE_1	K	P	LE_1	K	P	LE_1	K
0.01	-0.110472	0	9	-0.000794	0	93	0.000624	1.070593	400	-0.006288	0	1000	0.00029	1.743084
0.1	-0.110231	0	10	-0.003885	0	95	0.002827	1.084618	500	-0.003955	0	1500	0.000503	1.618642
1	-0.108977	0	20	-0.016789	0	100	0.004399	2.378375	600	-0.002376	0	1502	0.000503	1.61863
2	-0.108338	0	30	-0.029224	0	200	0.022761	4.644814	700	-0.001353	0	1505	0.001224	2.819151
3	-0.10793	0	50	-0.048767	0	250	0.007918	4.323571	750	-0.000185	0	1510	0.001282	2.844226
4	-0.10763	0	70	-0.058819	0	275	0.008956	2.676025	775	-0.002365	0	1520	0.001436	2.884622
5	-0.107393	0	80	-0.045254	0	285	0.009979	2.852456	790	-0.000696	0	1550	0.001242	2.766767
6	-0.107196	0	90	-0.001192	0	290	-0.008079	0	795	-0.000697	0	1600	0.00085	2.639186
7	-0.107028	0	92	-0.000151	0	295	-0.007956	0	800	0.000036	2.371203	1700	0.000934	2.715395
8	-0.106882	0	92.25	-0.000171	0	300	-0.008161	0	900	0.000998	2.614188	2000	0.000749	1.868404

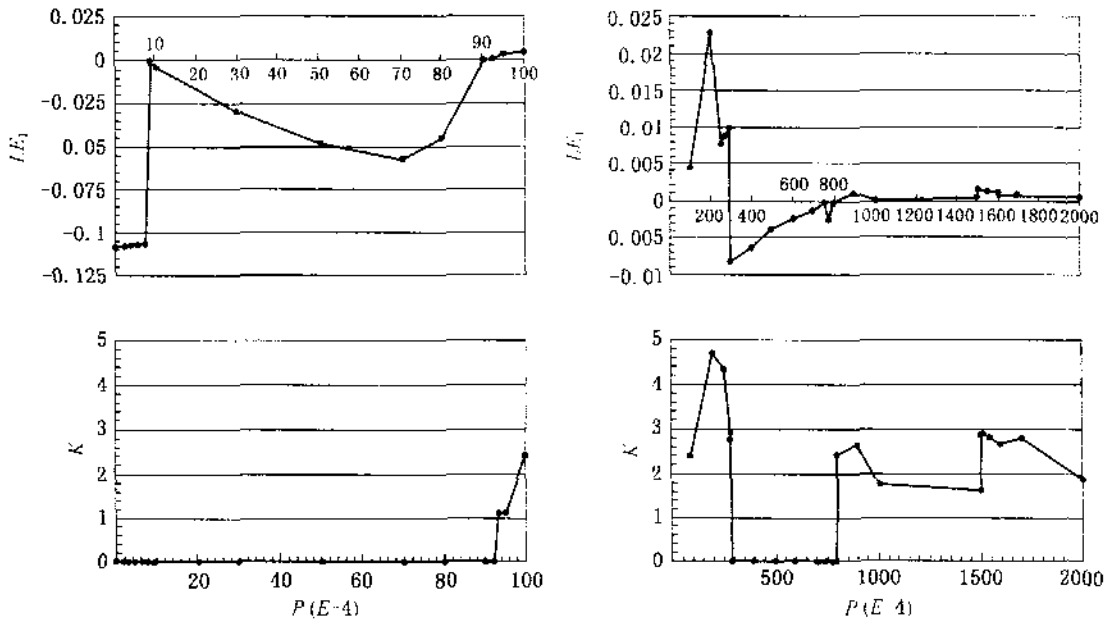


图 3-11　LE_1 及 K 随 P 值演化的规律

常态，系统失稳，即 2.85% 是系统可承受的扰动作用的极限，扰动强度超过 2.8% 后，坚硬顶板系统将失稳而进入有序定常态；P 值超过 8% 甚至达到 20%，LE_1 为正，K 为正，且呈一定的波动性，坚硬顶板处于混沌态，如果资源开采活动对坚硬顶板的作用达到如此高的程度，其将控制系统的运动行为，亦不可再称之为扰动。运用混沌动力学方法研究方程解的稳定性是坚硬顶板运移规律研究的新途径，得到了给定条件下资源开采活动对坚硬

顶板的扰动作用具有规律性：P 值不大于 0.9225%，坚硬顶板受微扰作用，状态稳定；P 值在 0.93% ~2.85% 范围内时的坚硬顶板处于混沌态，系统即将失稳；坚硬顶板系统的混沌程度 K 在 $P=2\%$ 时最高，是预测系统承受扰动能力的量化指标，P 值达 2.85% 时系统失稳；P 值超过 8% 后，资源开采活动将控制坚硬顶板系统的运动行为。该研究成果为坚硬顶板运动系统的稳定性状态预测与主动控制提供了理论参考和可操作的量化指标，具有一定的理论意义和实用价值。

运动方程的解析解的特征为上述结论。运动方程的数值解均为近似解，下面讨论坚硬顶板运动阶段特征的三维离散单元法数值模拟。

3.2.3 坚硬顶板运动阶段特征的反演建模与混沌动力学分析

岩石力学参数的合理确定是数值模拟计算结果可靠与否的关键。但是，由于岩体性质及地质条件的复杂性，使得数值计算参数的选取十分困难，是制约数值分析手段应用于工程决策的重要因素。反分析的目的不仅是为了得到模型参数，更重要的是要应用这些参数进行相应的时间序列值分析，从参数估计发展到模型识别，进而建立新的模型，以对工程效果做出更合理的评价与有依据的预测。现场监测—反演分析—工程实践检验—正演分析及预测，是一个完整的循环系统，对岩石力学与工程的设计及施工是一种行之有效的手段。根据反演理论，对现场实测资料进行数值模拟计算参数的反演是研究基础，之后建立模型计算。

坚硬顶板运动系统是非线性的、开放的、耗散的系统，适于选用非线性动力学方法进行研究。对采场坚硬顶板运动的数值模拟，可以得到若干模拟材料力学参数随计算时步演化的时间序列，模型中某一位置某一参数的变化同样是系统整体信息的综合反映，采用混沌动力学方法对力学指标随时步变化的时间序列等计算结果进行分析是可行的。

1. 三维离散单元法原理

离散单元法单元划分的形状是任意的，单元在任意时刻与其他单元之间可以是接触的或分离的，块体本身有刚性和可变形两种选择，单元接触关系多样化，单元间作用关系为力－位移关系。离散单元法充分考虑结构不连续性，可分析变形连续和不连续的多个物体间相互作用的问题、断裂问题、大位移和大转动问题，可处理范围广泛的材料本构关系、相互作用准则和任意形状，可模拟应力传播、振动和阻尼动力效应显著等问题。矿床开采活动形成的采空区坚硬顶板岩体系统，包含复杂的节理裂隙、变形块体、富含阻尼，在形态和结构上均呈现出强烈的不连续性，其演化过程是几何或材料非线性的结果，适于选用离散单元法进行模拟研究。选择从美国 ITASCA 公司引进的三维离散元软件 3DEC（three Dimensional Distinct Element Code）进行理论研究。

1）三维块体模型力和位移的计算

三维离散单元法是在时间域内采用动态松弛法解决块体的运动方程，在每个时步内应用牛顿运动定律和本构方程，求解块体之间的相互作用力。计算循环如图 3－12 所示。

A 和 B 为两个接触块体，n_i 是接触点的单位法向矢量，且方向由块体 A 指向块体 B。接触面上的参考点 C_i 可以确定法向接触力的作用点，力的方向为 n_i。接触处块体 B 相对于块体 A 的运动速度为

$$v_i = \dot{X}_i^{\mathrm{B}} + \varepsilon_{ijk}\overline{\omega}_j^{\mathrm{B}}(C_k - B_k) - \dot{X}_i^{\mathrm{A}} - \varepsilon_{ijk}\overline{\omega}_j^{\mathrm{A}}(C_k - A_k) \tag{3-59}$$

式中 A_k，B_k——块体 A 和 B 的形心位置矢量；

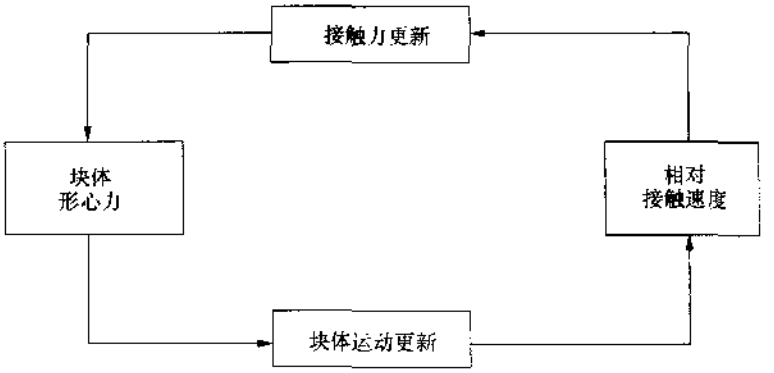


图 3-12 计算循环

$\dot{X}_i^A$，$\dot{X}_i^B$——块体 A 和 B 形心的平移速度矢量；

$\overline{\omega}_j^A$，$\overline{\omega}_j^B$——块体 A 和 B 的转动速度矢量；

ε_{ijk}——三阶置换张量（i，j，$k=1$，2，3）。

由式（3-59）可得接触点在一个时步 Δt 内的位移增量矢量为

$$\Delta u_i = v_i \Delta t \tag{3-60}$$

将 Δu_i 沿公共面的法向和切向分解，可得法向和切向位移增量为

$$\Delta u_n = \Delta u_i n_i \tag{3-61}$$

$$\Delta u_i^s = \Delta u_i - \Delta u_j n_i n_j \tag{3-62}$$

在每个计算时步内，由于公共面的转动，其单位法向矢量 n_i 也随之转动，应该调整切向力。考虑上述影响，在整体坐标系下，切向力矢量 F_i^s 应写成

$$F_i^s := F_i^s - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}F_j^s n_m n_n \tag{3-63}$$

式中 n_m——公共面上一时步的单位法向矢量。

根据力-位移关系，由式（3-61）和式（3-62）可得力增量。法向力矢量增量（取压力为正）为

$$\Delta F_n = -k_n \Delta u_n A_c \tag{3-64}$$

切向力矢量增量为

$$\Delta F_i^s = -k_s \Delta u_i^s A_c \tag{3-65}$$

式中 k_n，k_s——节理刚度，应力/位移；

A_c——接触面积。

接触应力可直接由接触力和接触面积计算。总的法向力矢量 F_n 和切向力矢量 F_i^s 为

$$F_n := F_n + \Delta F_n \tag{3-66}$$

$$F_i^s := F_i^s + \Delta F_i^s \tag{3-67}$$

法向力矢量和切向力矢量可根据一定的接触本构关系（如允许有一定拉应力的库仑摩擦定律）进行调整。设节理的抗拉强度为 T，若 $F_n < -TA_c$，则切向力和法向力同时解除。否则，最大切向力用式（3-68）计算：

$$F_{\max}^s = CA_c + F^n \tan\varphi \tag{3-68}$$

式中 C，φ——节理的黏聚力（应力）和内摩擦角。

若切向力的绝对值 $F_s = (F_i^s \cdot F_i^s)^{1/2}$ 大于 $F_{\max}^s$，则切向力减小到极限值：

$$F_i^s := F_i^s [(F_{\max}^s)/F_s] \tag{3-69}$$

然后把上面算出的接触力累加到作用于块体形心的力和力矩上。例如，块体 B 作用于块体 A 上的接触力矢量为

$$F_i = F_n \cdot n_i + F_i^s \tag{3-70}$$

从而可得块体 A 上的合作用力和合力矩：

$$F_i^A := F_i^A + F_i \tag{3-71}$$

$$M_i^A := M_i^A + \varepsilon_{ijk}(C_j - A_j)F_k \tag{3-72}$$

同样，对于块体 B 有

$$F_i^B := F_i^B - F_i \tag{3-73}$$

$$M_i^B := M_i^B - \varepsilon_{ijk}(C_j - B_j)F_k \tag{3-74}$$

一个块体的平移方程为

$$\ddot{X}_i + a\dot{X}_i = (F_i)/m + g_i \tag{3-75}$$

式中 $\dot{X}_i$——块体形心的运动速度；

a——质量比例黏性阻尼系数；

F_i——作用于块体形心上的合力；

m——块体的质量；

g_i——重力加速度。

无阻尼的刚体相对于惯性主轴的转动，可由欧拉方程表示为

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = M_3 \end{cases} \tag{3-76}$$

式中 I_1，I_2，I_3——块体的主惯性矩；

ω_1，ω_2，ω_3——相对于主轴的角速度；

M_1，M_2，M_3——施加在块体主轴上的三个转矩分量。

用刚体模型解准静问题时，转动方程可以简化。由于速度一般很小，式（3-76）中的非线性项可以略去，因此式子变成不耦合方程。另一方面，惯性力比块体上所施加的力小，不必精确地计算惯性量，因此可以近似计算惯性矩 I。

这样，在加入黏性阻尼项后，在整体坐标系下，式（3-76）变成

$$\dot{\omega}_i + a\omega_i = M_i/I \tag{3-77}$$

式中的速度 ω_i 和总转矩 M_i 都是相对于整体坐标轴计算的。

块体的运动方程可按中心差分法进行迭代求解。例如，$(t + \Delta t/2)$ 时刻的块体平移和转动增量为

$$\begin{cases} \Delta X_i = \dot{X}_i(t + \Delta t/2)\Delta t \\ \Delta\theta = \omega_i(t + \Delta t/2)\Delta t \end{cases} \tag{3-78}$$

$(t + \Delta t)$ 时刻的块体形心位置为

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) + \Delta X_i \tag{3-79}$$

块体的角位置为

$$X_i^V(t+\Delta t)=X_i^V(t)+\Delta X_i+\varepsilon_{ijk}\Delta\theta_j[X_k^V(t)-X_k(t)] \tag{3-80}$$

对于已划分成母块体和子块体的块体，只需对其母块体进行计算，此时，母块体的质量、惯性矩和形心位置等应等价于原来的块体。一旦母块体的位置确定后，其子块体的形心和角位置可以由类似于式（3-80）的式子计算[24-28]。

2）3DEC 动力学分析原理

3DEC 可以应用于地震、爆炸冲击、煤矿冲击地压和重力作用下的颗粒流动等地质力学问题的动力学分析，它们均具有能量瞬时释放的共同特点，3DEC 运用考虑阻尼的动力学算法求解。阻尼是由系统内块体间接触面滑动造成的能量损失，接触材料间的内摩擦消耗和外界空气或液体对结构的抑制作用产生的。动力系统包含一定程度的振动阻尼，在外界驱动力的作用下，系统终将失稳。3DEC 用于解决准静定力学和动力学两类经典问题，准静定力学问题需要更大的阻尼。3DEC 设定了质量比阻尼和刚度比阻尼两种阻尼，质量比阻尼是通过施加反速度方向的力来实现，力的大小与最终的速度及质量成比例；刚度比阻尼通过向区域接触面或应力上施加力来实现，力的大小与相对速度或应变率形成的增量刚度矩阵成比例。质量比阻尼和刚度比阻尼既可单独使用又可混合使用，定义混合使用的阻尼为瑞利阻尼，运用有限差分法的准静定力学问题求解仅适用于质量比阻尼，而地质力学问题的动力分析则适用于质量比阻尼、刚度比阻尼和瑞利阻尼。

对物理系统进行动力分析时必须统计其能量损失，以确定采用的阻尼类型与阻尼比数值。一般情况下，强弹性系统应用较低的阻尼，黏滞系统应用较高的阻尼。在结构动力分析中，经常应用瑞利阻尼模式克服系统的自然振动，构建阻尼矩阵 C：

$$C=\alpha M+\beta K \tag{3-81}$$

式中 α——质量比阻尼常数；

β——刚度比阻尼常数；

M——质量矩阵；

K——刚度矩阵。

对一多自由度系统而言，任意角频率 ω_i 对应的系统临界阻尼比可由式（3-82）求得

$$\xi_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_i}+\beta\omega_i\right) \tag{3-82}$$

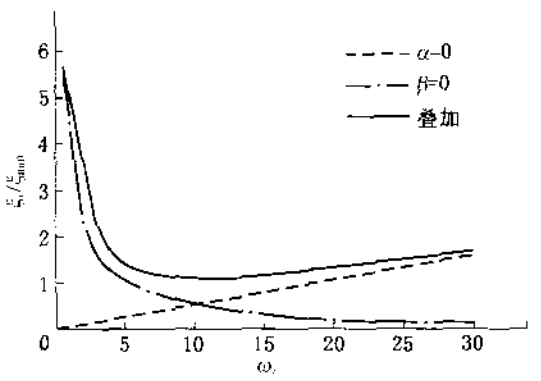


图 3-13 常态化了的临界阻尼比与系统角频率之间的关系

常态化了的临界阻尼比与系统角频率之间的关系如图 3-13 所示。

可见质量比阻尼在低角频率范围内起主导作用，而刚度比阻尼在高角频率范围内起主导作用。叠加后的曲线表明其最小值出现在式（3-83）所表述的位置，即

$$\begin{cases}\xi_{min}=\sqrt{\alpha\beta}\\ \omega_{min}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\end{cases} \tag{3-83}$$

或者

$$\begin{cases}\alpha = \xi_{\min}\omega_{\min} \\ \beta = \dfrac{\xi_{\min}}{\omega_{\min}}\end{cases} \tag{3-84}$$

定义基频f_{min}为

$$f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} \tag{3-85}$$

3DEC 为识别瑞利阻尼所需要的输入参数f_{min}和ξ_{min}即已求得。

2. 坚硬顶板矿压监测结果与参数反演

北京矿务局木城涧煤矿的三槽五壁两相邻无人工作面开采区段，于 2004 年 3 月 7 日发生了坚硬顶板初次冲击性垮落，当时两区段的采场面积约为 8000m^2。三槽五壁上下两个区段的开采采用了新型扒装工艺，采用沿空留巷技术不留区段煤柱，不留三角煤柱。图 3－14 所示为三槽五壁上下两个区段的开采时间顺序，反映了坚硬顶板各时期悬露的平面几何形态。图 3－14 中的虚线为矿压资料分析结合实际观测得到的坚硬顶板垮落边界线，据此可以保守的推算，坚硬顶板悬跨部分的约 2/3 已垮落，扭转了后续相邻区段开采时顶板控制的被动局面。坚硬顶板的初次垮落大致发生于倾斜方向第二区段。

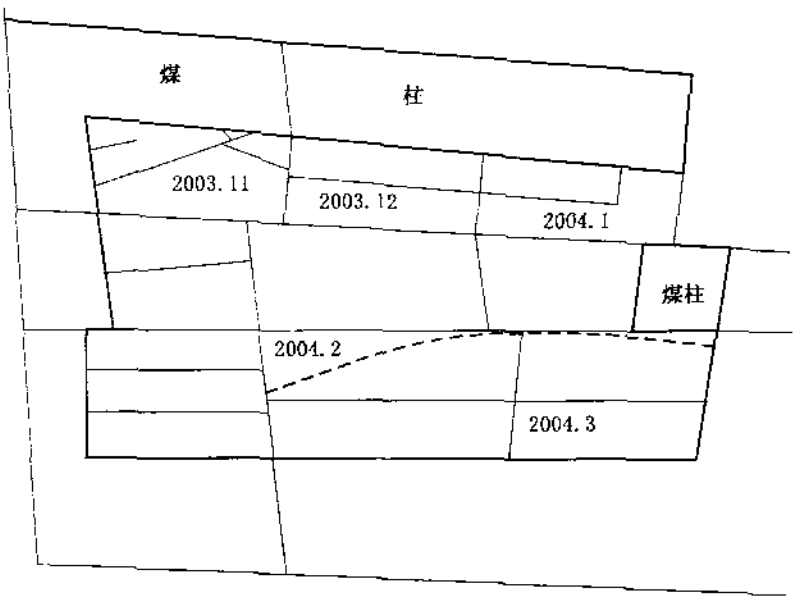


图 3－14　开采顺序及坚硬顶板垮落边界示意图

建立可变形块体的三维离散元数值计算模型，选择材料塑性应变软化本构关系，并输入最小频率 10rad/s，最小阻尼比为 1，以使 3DEC 识别瑞利阻尼，模拟坚硬顶板的动力机制。根据现场实测矿压资料及观测结论调整岩石力学性质等数值模拟参数，反演得到符合实际的岩体物理力学计算参数等，用于坚硬顶板运动非线性动力学分析的数值模型建立，材料的物理力学参数反演结果见表 3－3。

3. 数值模型建立

表 3-3　数值模拟材料物理力学参数的反演结果

岩　性	厚度/m	弹模 E/MPa	泊松比 μ	单位体积质量 γ/(kg·m^{-3})	单向抗压强度 σ_c/MPa	抗拉强度 σ_t/MPa	黏结强度 C/MPa	内摩擦角 φ/(°)
砂　岩		45000	0.24	2650	13	4.5	11.5	48
细砂岩	35	48000	0.22	2700	17	5.5	13	50
粉砂岩	2	46000	0.23	2600	15	5	12.5	48
炭粉砂岩	0~0.2	30000	0.3	2650	7	2.4	6	45
煤	4	2000	0.45	1800	2	0.1	3	25
粉砂岩	13	46000	0.23	2600	15	5	12.5	48
细砂岩	20	48000	0.22	2700	17	5.5	13	50
砂　岩		45000	0.24	2650	13	4.5	11.5	48

所研究的工作面为北京矿务局木城涧煤矿坚硬顶板无人开采工作面，位于+450水平的三槽五壁，煤层厚度为4m、倾角为7°，工作面标高为+462m~+520m，地面标高为+1102m。根据现场条件建立4个数值模型，分别对采场由倾斜长40m（走向长100m）逐渐扩大到倾斜长160m进行模拟研究。

根据节理裂隙分布（条数）情况进行网格划分。煤层底板层面上 x 方向模型长240m，区段倾斜长40m为一个开挖梯度，近似在模型内部垂直于 x 方向平均设计5条节理；煤层底板层面上 z 方向模型长200m，开挖区段走向长100m，设计研究尺度为25m，近似在模型内部垂直于 z 方向设计5条节理，但两端单元宽50m，中间100m均匀切割；模型 y 方向按照现场实际地层的厚度及倾角进行网格划分。在此基础上3DEC将其离散成更多的四面体进行计算。

三维数值模型示意图如图3-15所示。采场开挖四阶段示意图如图3-16所示，其为图3-15的 $A-A$ 剖面图。

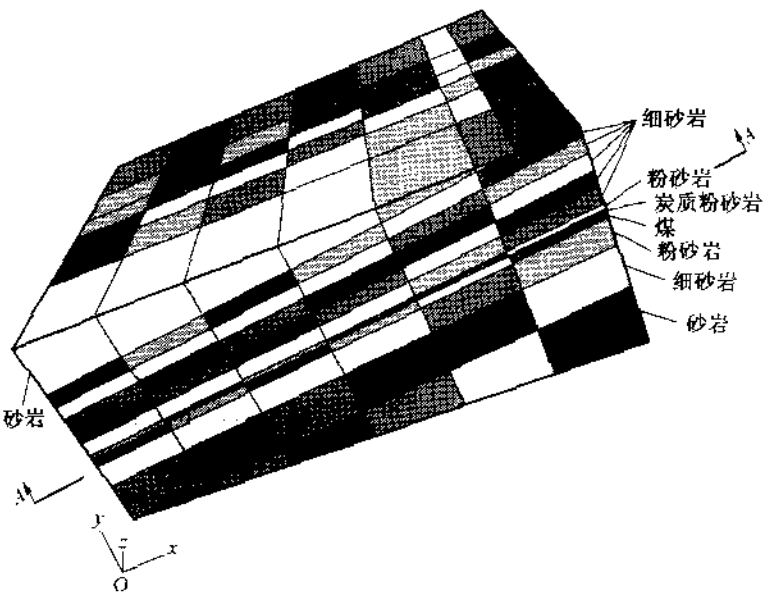


图3-15　三维数值模型示意图

4个数值模型的边界条件相同，分别具有6个边界：边界 $x=0$ 和 $x=238.2$ 限制 x 方向的位移；边界 $y=0$ 为固定边界；边界 $y=100$ 为载荷边界，模拟532m深度载荷；边界 $z=0$ 和 $z=200$ 限制 z 方向的位移。根据前述3DEC的反演结果选取工作面顶底板模拟岩体的物理力学参数。

相应于采场坚硬顶板悬跨面积逐渐扩大的4个开采阶段，在计算中全程跟踪记录各阶段采场顶板中心位置的垂直应力，以分析坚硬顶板的运动规律。4个阶段被跟踪点的坐标分别为（190，63，100）、（170,60,100）、（150，57，100）和（130，54，100），它们在 $A-A$ 剖面上的投影标于图3-16中。

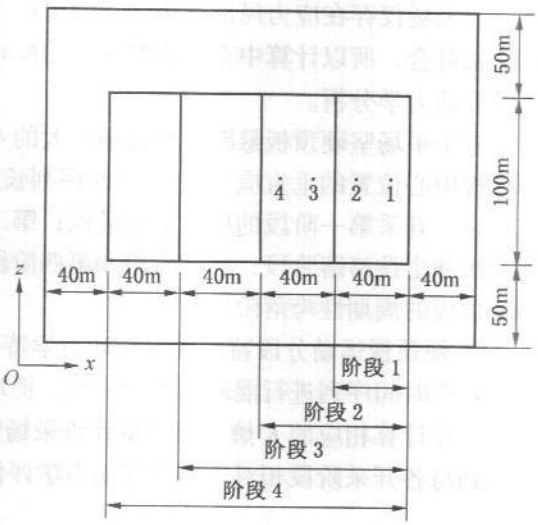


图3-16　采场开挖四阶段示意图

4. 数值模拟计算结果

图3-17所示为4个开采阶段 $A-A$ 剖面上的垂直应力分布区域图。可见，开采第一阶段的坚硬顶板悬而未落，是下一区段无煤柱开采的隐患；第二阶段结束时的开采范围已达到8000m^2，坚硬顶板的初次垮落致使采场中央区域应力集中，同时缩小了采场四周应力集中的区域和程度，表明坚硬顶板的初次垮落具有冲击性；第三阶段和第四阶段的开采范围继续扩大到12000m^2 和16000m^2，采场低应力区逐步扩大，坚硬顶板呈现周期性垮落

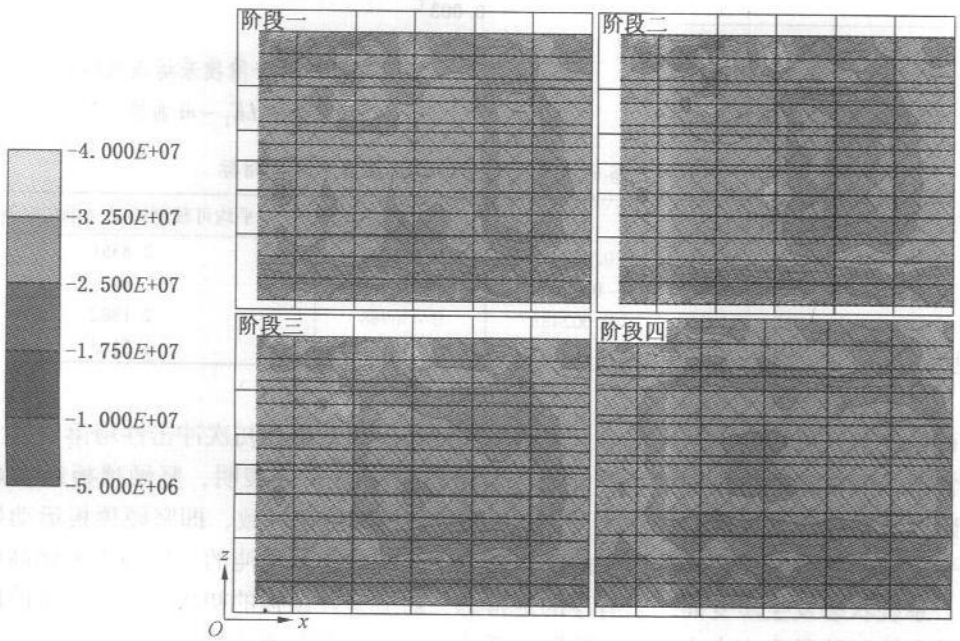


图3-17　4个开采阶段 $A-A$ 剖面上垂直应力分布区域图

的特点，采场仅存在应力局部集中区，对生产不再构成巨大威胁。数值模拟结果与现场实测结论相符合，所以计算中全程跟踪记录的反映坚硬顶板运动特性的时间序列，可以应用于非线性动力学分析。

相应于采场坚硬顶板悬跨面积逐渐扩大的4个开采阶段，在计算中全程跟踪记录到了采场顶板中心位置的垂直应力 S_{yy}，时间序列长度均为1500，其演化规律如图3-18所示。

可见，开采第一阶段的应力水平最低；第二阶段的应力水平明显最高，对应的是坚硬顶板初次冲击性垮落阶段；第三阶段和第四阶段的应力水平较第二阶段明显降低，对应的是坚硬顶板的周期性垮落阶段[29]。

5. 坚硬顶板运动分段特征的混沌动力学特征

对4个时间序列进行混沌动力学分析，提取 LE_1 以定性评价采场坚硬顶板运动系统的稳定性，并计算相应的 K 熵，以定量评价采场坚硬顶板运动系统混沌的程度。由图3-19可以得到与各开采阶段相对应的混沌动力学评价指标，列于表3-4。

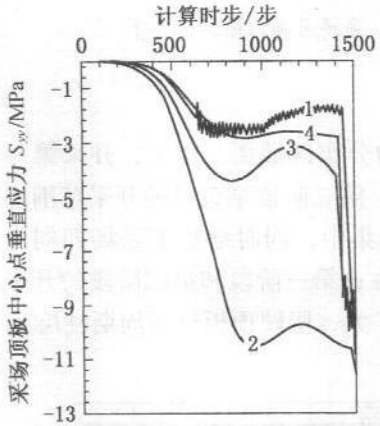


图3-18 4个阶段采场顶板中心的 $S_{yy}-\Delta t$ 曲线

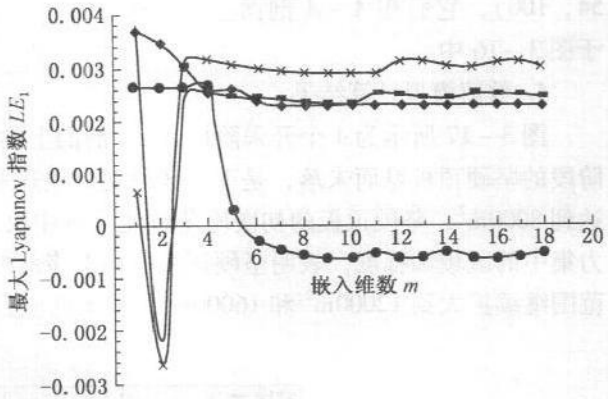


图3-19 4个阶段采场顶板运动系统的 LE_1-m 曲线

表3-4 各开采阶段对应的混沌动力学评价指标

阶段	饱和嵌入维数 m_c	LE_1	K	平均可预测尺度（单位时间）
一	7	0.002283	0.352726	2.8351
二	9	-0.000637	0	∞
三	11	0.002488	0.456988	2.1882
四	12	0.003111	0.763155	1.3103

可见仅第二阶段的 LE_1 为负值，表明坚硬顶板运动系统在初次冲击性垮落阶段为有序的定常态，而在其他阶段均处于混沌态。各阶段对应的 K 熵表明，坚硬顶板运动系统在第四阶段时混沌程度最高。该结论与3DEC的数值模拟结论一致，即坚硬顶板运动处于应力水平较低的阶段时，在多种因素的综合影响下系统状态是混沌的；应力水平增高到一定程度，系统状态发生质变而趋于有序的定常态，对应坚硬顶板的初次冲击性垮落阶段；第三阶段和第四阶段为应力水平降低阶段，系统复又进入孕育着变化的混沌态，对应坚硬顶板的周期性运动阶段。若将研究条件下实施防冲措施的最佳时机放在第二阶段开采活动结

束之前，则可促使坚硬顶板从冲击性整体运动向周期性分段运动转化。

坚硬顶板运动规律的混沌动力学预测：K 熵的倒数近似为系统的平均可预报时间尺度，可见坚硬顶板运动系统对应的每个阶段可预测尺度不同。由表 3－4 知，第二开采阶段的坚硬顶板运动系统为有序的定常态，是可以长时预测的；处于混沌态的另外三个阶段，系统状态的可预测尺度分别为 2.8351，2.1882 和 1.3103，表明在坚硬顶板这一复杂非线性系统中，只能实现系统状态的短时预测，长期预测是不可能的。结合现场生产实际，对坚硬顶板运动规律的预测与预报，需要时时跟踪记录反映顶板运动特征的指标，并及时分析，适时判断，以实现短时预测[30]。

3.2.4 坚硬顶板运动过程中声发射 Lyapunov 指数特征分析

在实际的矿山压力监测中，人们所得到的信息往往是一个随时间变化的数据列，通常用它来认识坚硬顶板运动的状态。为了寻找实测信息所表现出的规律性，通常用数字滤波等方法对其改造，以消除外界干扰或噪声的影响，这在有干扰的实测信息处理中的确收到了良好效果。但这往往也会歪曲了坚硬顶板运动内在非线性机制所导致的动力学性态，从而失去对岩层运动真实、可靠的反映。通过对实测到的声发射序列所呈现的混沌特征进行分析，来认识坚硬顶板运动所处的状态及动力学行为，可以为可靠预测岩层运动提供依据。

1. Lyapunov 指数与顶板运动性态的关系

Lyapunov 指数 LE_i 是量度相空间中两条相邻轨迹随时间按指数律吸引或分离的程度，这两条轨迹有不同的初始条件。一个正的 Lyapunov 指数说明，在一个有界轨迹的动力系统中，存在着混沌运动，因为它表征相空间体积的膨胀。坚硬顶板运动系统是一典型的耗散系统，其相空间总体是收缩的，即 $\sum LE_i < 0$。在 $LE_i < 0$ 的方向上，运动是稳定的；在 $LE_i > 0$ 的方向上，系统不断膨胀，混沌吸引子的局部不稳定对应着某个方向的指数辐散或膨胀，所以耗散混沌系统中至少有一个正的 Lyapunov 指数。系统运动特性与 Lyapunov 指数之间的关系[31－37]，见表 3－5。

表 3－5 系统运动特性与 Lyapunov 指数关系

定　常	周　期	准 周 期	混　沌
$LE_i < 0$	$LE_1 = 0$	$LE_1 = LE_2 = 0$	$LE_1 > 0$
$(i = 1, 2, \cdots, m)$	$LE_i < 0$	$LE_i < 0$	LE_i 符号无限制
	$(i = 2, 3, \cdots, m)$	$(i = 3, 4, \cdots, m)$	$(i = 2, 3, \cdots, m)$

例如，对于三维系统，其 Lyapunov 指数的符号有如下关系：定常运动（－，－，－）；周期运动（0，－，－）；准周期运动（0，0，－）；混沌运动（＋，0，－）。

因此，对矿山坚硬顶板运动这一典型耗散系统，利用 Lyapunov 指数变化可以衡量其非线性动力学特性。

2. 坚硬顶板运动过程中声发射 Lyapunov 指数特征

“DKJ－1”型顶板计算机监测系统在北京矿务局木城涧矿千军台坑进行了近一年的工业性试验，其中声发射子系统在 741003 工作面和 741004 工作面进行。工作面走向长

220m，斜长70m，采深407m。属高档普采面，煤厚2.6m，顶板由层状的细砂岩及粉砂岩组成，坚硬呈脆性，单向抗压强度在100MPa以上。直接顶总厚度为5m，为粉砂岩；老顶总厚为7～10m，为细粉砂岩。声发射子系统每0.5h自动采集一次数据，包括大事件数、总事件数和平均能率数。根据Wolf从实测数据列中重构相空间并计算Lyapunov指数的方法，对典型的老顶周期运动中声发射大事件数、总事件数及平均能率数的Lyapunov指数进行计算，表明饱和相空间维数 $m_c=9$，相空间元素最小的延滞时间为 $\tau=3$。为了分析坚硬顶板运动过程中声发射大事件数 N_L、总事件数 N 及平均能率数 N_E 随时间变化过程中的Lyapunov指数的变化特点，每隔9次观测数据便计算一次相应的Lyapunov指数，其结果如图3－20所示。

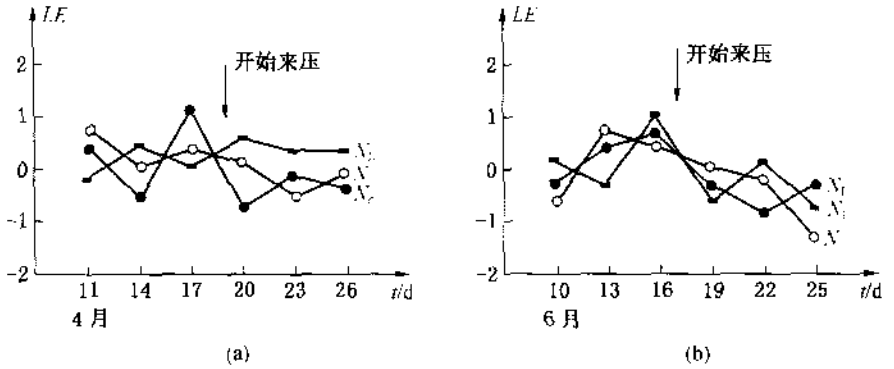


图3－20　坚硬顶板运动中Lyapunov指数变化曲线

从图3－20中可以看出，坚硬顶板运动过程中 N_E，N 的Lyapunov指数曲线，表现出了以下较强的规律性：

（1）老顶开始来压前，首先经历了一个比的Lyapunov指数的高峰区，亦即老顶来压运动开始是处于Lyapunov指数值下降段，老顶来压期间常对应Lyapunov指数负值区域或下降区。如图3－20a所示，4月17日 N_E，N 的Lyapunov指数分别为1.2、0.4，4月19日开始来压，4月20日 N_E，N 的Lyapunov指数为－0.7和0.1，这说明顶板在显著运动前，在宏观裂缝与微观裂纹的扩展、贯通过程中，无序化程序增强，即表现为声发射的混沌性增强；老顶来压的开始是指宏观破断贯通后导致顶板由回转来压向着有序化方向演化，以达到新的平衡状态。

（2）在坚硬顶板运动过程中，其声发射Lyapunov指数呈现出了“＋”、“－”相间的变化特征，这说明顶板经历了周期运动、准周期运动与混沌运动相互交替进行的复杂动力学性态。

（3）在 N_L，N，N_E 三个变量的Lyapunov指数变化中，N_E 和 N 的变化规律较明显，能够反映坚硬顶板运动的非线性动力学特点，而 N_L 的变化规律不强，因为总事件数 N 可以作为主宰坚硬顶板运动演化的慢变量，而 N_L 不是主宰系统演化的变量（快变量）。

3. 坚硬顶板运动声发射时间序列的Lyapunov指数分析

对坚硬顶板运动过程中声发射时间序列Lyapunov指数进行计算分析表明，坚硬顶板

运动经历了由周期运动、准周期运动与混沌运动的过程，这对通过实测信息来认知岩层运动的非线性动力学机制，具有重要意义。坚硬顶板运动将是周期运动、准周期运动与混沌运动交替进行的复杂非线性动力学过程，不能简单地用牛顿确定论的观点来讨论其动力学机制。老顶来压前将经历一显著的混沌运动期，而这一期间，由于对初始条件的敏感性，对坚硬顶板运动演化的预测，往往是不可靠的，应避开这一混沌运动期，这为选择合理的预测时刻提供了依据。不同围岩物理力学特性对岩层运动混沌性的影响及混沌工程控制的途径等问题，尚有待进一步研究。

3.3 节理岩体系统的混沌特征

3.3.1 岩石（体）力学行为的本质特征

系统复杂性与其各部分之间的非线性相互作用密切相关，输出与输入不成正比的系统为非线性系统，由非线性而导致的系统不稳定性和对初始条件的极度敏感依赖性是形成复杂性的根源之一。岩石内部含有大量不同阶次，形状极不规则的微孔隙、微裂纹等缺陷，是造成岩石宏观非弹性变形和各向异性的根本原因。岩石力学与工程系统复杂，原始条件和环境信息不确定，岩体的变形、损伤、破坏和演化包含着相互耦合的多种非线性过程，致使决定论和平衡态的传统力学方法难以描述系统的力学行为；岩石材料的高度无序分布，岩体内应力随时空的变化，岩石的成分与构造的复杂性、多相性，岩体工程开挖和施工工艺的影响等，构成了岩石（体）力学的高度非线性；岩体的变形、损伤、破坏过程是一个动态的非线性不可逆演化过程，各种参数处于变化之中。可见，岩石（体）力学行为的非线性和动态演化的特征是比较显著和强烈的，非线性是岩石（体）力学行为的本质特征，建立岩石非线性静力和动力系统理论，必须借助现代非线性科学。基于岩石（体）力学行为的非线性动态本质特征，可将岩石（体）系统视为一非线性动力系统，系统的宏观稳定与不稳定行为即为平稳解的稳定性问题[38-43]。

3.3.2 岩石（体）力学问题非线性基础

非线性科学理论是研究岩石等非线性复杂大系统问题的数理基础，总体研究思路是：以现代非线性科学为基础，结合岩体自身特点和工程特点，建立相应的非线性力学分析和数值模型，达到定性与定量相结合的目标。动力学理论以研究动力系统的演化行为为主要任务，源于19世纪末Poincare的工作，动力系统可视为微分方程，即常微分方程和差分方程可看作有限维连续和离散的动力系统，偏微分方程及其差分方程可看作无穷维连续和离散的动力系统，拓扑和几何中微分流形上的方程可看作微分流形上的动力系统。动力学系统按照对初始条件是否敏感分为两类：对初始条件不敏感的系统，其初始条件的微量变化只导致相应轨道的微量变化，不改变系统的主要特征；对初始条件极其敏感的系统，其初始条件的微量变化将导致相应轨道的截然不同。以是否可积为标准，动力学系统分为可积、不可积和弱不可积三类，其中后两类尤其是不可积动力学系统，其运动轨道对初始条件十分敏感。混沌、分形、模式形成、孤立子、元胞自动机和复杂系统等是非线性科学的6个主要研究领域，非线性科学可能使现实世界中那些杂乱无章的空间形态和似乎毫无规律的时间序列成为研究的对象，并从中发现它们的“复杂”规律性。分形几何理论用分数维定量刻画复杂系统的复杂程度。分形与岩石（体）力学相结合，将可以在微、细、

宏观不同层次上揭示岩石（体）的力学机理、行为和演化过程，在理论上将岩石（体）微、细、宏观理论研究统一在新体系中。目前分形在岩石（体）力学方面的研究已上升到岩石（体）分形的物理机制和演化规律的研究，在分形空间中有关力学量的定义和力学定律的普适性问题仍处于探讨之中，需要研究岩石（体）破坏机理的无标度区及无标度区内破坏机理的普适性问题。在岩土工程失稳的研究中，尚存在一些从理论到实践均未彻底解决的问题，如失稳与破坏的多样性及非唯一性等问题。本质上，岩土工程失稳是一复杂过程，属非线性科学问题，需要引入适用的非线性科学研究的原理与方法。混沌理论为岩土工程失稳分析提供了全新的理论与方法，不仅能正确解释岩土工程失稳与破坏形式的多样性与非唯一性，还可以解释对初始条件极其敏感的混沌现象，为岩土工程稳定性状态评价提供科学依据。岩体破坏失稳是一个过程，系统由稳定到非稳定状态的转化具有前兆信息，深入研究系统状态转变的前兆信息并建立判断岩体失稳的力学准则，有赖于信息论、控制论、内蕴时理论、灰色系统理论、专家系统、分形、混沌、分岔、突变理论等现代数学的发展、运用和不断完善。

混沌理论的出现，为解决岩石材料的随机性及稳定性状态的非唯一性问题提供了新的方法。混沌理论的初值敏感依赖性观点，解释了许多确定性非线性动力学系统在受微扰后长期运动行为大的变化，以及呈现出的貌似随机的混沌状态。混沌理论的关键在于提供了将复杂或貌似随机的行为理解为有目的或有结构的行为的方法。然而，由于材料结构的复杂性，难以建立符合岩土工程实际的动力系统微分方程组，混沌理论需求的数学知识比较高深且可操作性差等原因，阻碍了混沌理论在岩土工程领域的深入应用，致使混沌理论对岩石材料破坏失稳非唯一性问题的研究，多数仍然停留在定性描述层次上。混沌理论在岩土工程领域的应用重点包括：对分数维、功率谱、熵及 Lyapunov 指数等混沌数字特征的新算法研究；对现场采集时间序列进行分析，建立描述岩土工程实际运动规律的混沌理论模型，以期在混沌短时预测方面有所收获[44,45]。

3.3.3 节理岩体微、细、宏观破坏机理

材料本构和破坏理论是固体力学的核心，外载作用下材料经变形、损伤到失稳或破坏的过程是一直努力而尚未解决的难题，原因在于破坏过程的跨学科性、多层次性和状态方程不清。固体的宏观破坏同缺陷和微结构形态紧密相关，不仅对材料细观结构和损伤形态敏感，而且对固态物质的原子结构和原子缺陷也敏感，甚至对固态物质电子云的缺陷也敏感。宏、细、微观的结合为此研究注入了新的生机，20 世纪 90 年代以来，以宏、细、微观力学为核心的力学与物理科学的结合使力学的研究层次和精确性上升到一个新水平。将扫描电镜、现代光测技术与图像处理技术相结合，可获得大量的细微观变形信息，以实现计算机辅助下实验研究、理论研究和数值计算相结合的一体化实验—计算力学方法，是实验力学发展的趋势。岩石的本构关系即应力应变关系，而应力应变的概念只在连续介质条件下成立，所以岩石的本构关系是建立在连续介质力学假设基础上的[46-49]。岩体结构模型按照其非连续面的发育程度可简化为碎块体、裂隙介质和连续介质。“虽然岩石在细观尺度上同样表现为非连续性特征，但在其受力变形过程中的宏观表现为连续介质的力学特性，因此岩石力学本构关系可以应用。”这种观点是对岩石（细观）非连续性却应用建立在连续介质力学假设基础上的应力应变本构关系的普遍解释。

1. 节理岩体微观（Microlevel）破坏机理

Paterson 依据微裂隙观测指出，与应力峰值相关联的破坏，首先是通过局部裂隙分布的发展使试件普遍弱化，而不是宏观破裂的发生，从微观角度，局部剪切破坏只是在峰值后才变得明显。组成岩石的矿物晶体颗粒通过晶界分子作用力或胶结物胶结力结合，即岩石的结构、构造与矿物成分对其物理力学性质有重要影响，材料的强度和韧性等性能对其微结构涨落的非线性具有较强的依赖性，因此采用传统的宏观力学分析方法（如断裂力学方法）解释岩石的微观现象是不恰当的。许江等对单轴应力状态下砂岩微观断裂发展过程的实验观测表明，虽然在砂岩试件内部形成的微裂隙有少量产生于矿物颗粒内部的一些原生缺陷，但绝大部分产生于晶粒边界及其胶结物中，且砂岩试件的断裂破坏正是这些晶粒边界及其胶结物中的微裂隙发展为微断层，进而相互串联贯通的作用结果。并且近年来对微裂隙的微观观察表明，大多数裂隙呈张性扩展。砂岩 MTS 实验断口是岩石断裂后留下的关于断裂过程的记录，蕴涵着丰富的断裂机理信息，可以应用于研究岩石的微观破坏机理。

通过扫描电镜分析，对节理裂隙微观破坏机理的认识：微观层次上砂岩在外荷作用下的断裂破坏分为微裂纹形成、裂纹稳定扩展和失稳破坏三个阶段，砂岩的断裂破坏是非平衡条件下的非线性不可逆过程。组成砂岩的矿物晶体颗粒通过晶界分子作用力或胶结物胶结力结合，因此砂岩的结构、构造与矿物成分对其物理力学性质有重要影响。观察表明，砂岩内部形成的微裂隙有少量产生于矿物颗粒内部的一些原生缺陷，绝大部分产生于晶粒边界及其胶结物中，砂岩试件的断裂破坏是晶粒边界及其胶结物中的微裂隙发展、串联、贯通的结果。即从微观角度出发，砂岩宏观破坏是通过局部裂隙分布的发展使试件普遍弱化后的产物，而其局部明显的剪切破坏主要发生在应力峰值之后。实验观察表明，在微观层次上的砂岩断口形貌中，其边缘痕迹主要产生于解理、沿晶、穿晶等多种脆性断裂方式。

2. 节理岩体细观（Mecrolevel）破坏机理

细观力学借助于连续介质力学的方法，考虑细观尺度固体变形过程的本构关系，以材料破坏过程中的不均匀性为研究重点。组成岩石的矿物晶体颗粒的力学行为符合经典连续介质力学理论，颗粒性质的不同和晶界的存在是岩石不均匀性的原因。岩石细观力学研究将实验、理论分析和数值计算相结合，需要实验结果提供岩石细观力学研究的实测数据和判断标准，需要理论研究总结出岩石细观力学的基本原理和理论模型，需要数值模拟计算手段进行岩石细观力学的辅助研究。作为宏观断裂的先兆，材料的细观微孔洞损伤与汇合研究包括孔洞聚集形态的识别、演化规律、所致裂尖形貌等内容；细观微裂纹损伤研究包括加载引起的各向异性、加载路径相关性及平行于微裂纹面的压缩应力亦可引发非线性变形的耦联效应等内容；材料的细观界面损伤研究包括近程与远程孔洞损伤等内容；局部化带状损伤研究包括细观剪切带与带内损伤、细观屈曲带及沿带损伤等内容。

对节理裂隙细观破坏机理的认识：组成岩石的矿物晶体颗粒的力学行为符合经典连续介质力学理论，颗粒性质的不同和晶界的存在是岩石不均匀性的原因，因而需要重点研究材料破坏过程中的不均匀性。在细观层次上，岩石内部的孔隙、界面等细观结构使岩石构成了多相复合材料，细观内部结构或构造的发展是岩石宏观力学性能的重要影响因素。岩石为脆性材料，其细观损伤的主要表现形式是单重或多重弥散分布的微裂纹，对岩石试件宏观破坏行为的研究，必须基于对其细观结构和细观本构关系的分析，非线性力学理论与

计算力学方法的相互结合，是研究岩石细观破坏机理并预测岩石宏观力学性质和破坏本构关系的有效途径。

3. 节理岩体宏观（Macrolevel）破坏机理

岩体的非连续性、非均质性、各向异性及含水性等使工程岩体与岩石试件的力学性能差异颇大。因此一般视宏观岩体为裂隙介质，结构面特别发育时甚至可视为碎块体或散体介质，仅坚硬岩体的局部宜视为连续介质。岩石强度理论包括库仑准则、摩尔强度准则、单切应力类强度理论、双切应力强度理论、八面体切应力类强度理论、节理岩体的切应力类经验性强度准则等几十种，绝大多数是以材料的均匀性和连续性假设为前提，没有考虑到岩石的非连续性和断裂破坏过程。工程断裂力学发展于20世纪50年代之后，其研究对象是高强度脆性材料。在细观上岩石是一种非均质材料，在宏观的工程尺度上更是非均质的，岩石的破坏往往呈由结构面引发的脆性破坏特征。岩石的非均质性和非连续性结构特征，决定了其断裂力学属性。岩石断裂力学是20世纪80年代发展起来的现代岩石力学，压、切应力状态下闭合裂纹的扩展判据是岩石断裂力学研究的主要问题之一。Griffith在研究脆性材料的破坏时发现，在微裂隙尖端形成的应力集中是引起裂纹扩展、连接和贯通并导致破坏的重要原因，即裂尖有效应力达到形成新裂纹所需能量时裂纹开始扩展。对远场为压应力的情况，裂隙将发生压密闭合，裂隙面上作用有压应力和切应力，剪切力大于剪切强度时，裂隙将继续破裂。

对节理裂隙宏观破坏机理的认识：岩体的非连续性、非均质性、各向异性及含水性等，致使工程岩体与岩石试件的力学性能差异特别大。因此一般视宏观岩体为裂隙介质，结构面特别发育时甚至可视为碎块体或散体介质，仅坚硬岩体的局部宜视为连续介质。

1）传统的宏观力学分析方法

绝大多数岩石强度理论是以材料的均匀性和连续性假设为前提，没有考虑到岩石的非连续性和断裂破坏过程。工程断裂力学的研究对象是高强度脆性材料。在宏观的工程尺度上岩石是一种非均质材料，岩石的破坏往往呈由结构面引发的脆性破坏特征，在工程宏观尺度上表现为岩体的大型非连续地质界面和小型的节理裂隙等非连续结构面。岩石的非均质性和非连续性结构特征，决定了其断裂力学属性。岩石断裂力学研究的主要问题之一是压、切应力状态下闭合裂纹的扩展判据，Griffith通过研究脆性材料的破坏发现，当裂尖有效应力达到形成新裂纹所需能量时裂纹开始扩展，得到裂纹扩展判据。对远场为压应力的情况，裂隙将发生压密闭合，裂隙面上作用有压应力和切应力，剪切力大于剪切强度时，裂隙将继续破裂，Meclintok和Walsh据此得到了修正的岩石强度Griffith准则（直线型Mohr包络线）。

2）损伤力学研究方法

损伤力学研究方法是多裂隙岩体力学性质研究的新途径，依据材料连续性的基本假设，把材料中微裂纹或微结构的演化视为材料力学性能的劣化，其理论基础是连续介质力学和热力学。Kachanov、Hult和Robotov较早的提出并发展了损伤力学，根据材料宏观力学性能劣化的主要原因是微空洞和微裂纹导致的有效承载面积减小的观点，定义了损伤变量和有效应力，Lemaitre于1971年提出了损伤力学的等效应变假设。表明材料应变响应与无损材料的差别可由有效应力反映，将无损材料本构方程中的表观应力替代以有效应力，即可用于表述损伤材料。

岩石材料是一种自然地质体，其内部各种节理、裂隙和微缺陷的存在是不可避免的。损伤力学的发展为合理考虑岩石材料各种分布缺陷的研究提供了有力的手段，是多裂隙岩体力学性质研究的新途径，损伤理论是研究成组分布节理裂隙对岩体力学性质影响的有效工具。20 世纪 80 年代末，损伤力学在岩石力学中的应用在国内受到极大关注，岩石损伤力学研究的重点是建立损伤变量（张量）和损伤扩展本构关系，这就涉及到岩石材料的损伤检测与识别问题。自从 Spruntbrace（1974）将扫描电镜技术引入岩石断裂研究以来，中国学者在这方面进行了大量的研究工作：许江等（1986）采用带有加载装置的光学显微镜进行了砂岩在不同加载阶段的损伤裂纹分析；谢和平（1989）对岩石在各种加载条件下破坏断口进行分析；孙钧（1992）、赵永红（1993）分别采用带有微型加载装置的扫描电镜对岩石的微损伤扩展进行研究，并用于三峡船闸高边坡闪云斜长花岗岩的损伤扩展分析（1997）。这些研究有力地推动了岩体损伤力学的发展，特别是在岩石损伤机理的解释方面起到了积极作用。近年来，杨更社等（1996，1997，1998）在岩石损伤的 CT 识别方面进行了较深入的研究，CT 识别岩石损伤不但可以无扰动岩样损伤检测，更重要的是通过 CT 图像、CT 数大小和 CT 数定量地与岩石损伤变量和损伤扩展联系起来，为建立岩石损伤扩展本构关系奠定了基础。杨更社等（1998）还将这一技术应用于三峡船闸高边坡闪云斜长花岗岩的损伤检测。

3.3.4 节理岩体系统破坏机理的混沌特征评价

岩体工程具有不确定性：岩体是一种地质体，在漫长的地质年代中经历了长时期多循环的地质作用，作用强度不一，作用形式错综复杂，再加上人工因素影响，致使岩体的地质特征呈现强烈的空间变化性，不能准确构造岩体的工程力学模型；岩体工程的不确定性因素很多且难以定量估计，大量的统计分析只能减小量测“噪声”，岩体工程地质性质的固有变化性是永远存在的；岩体结构特征、强度和变形等参数的物理变化性可以通过考察样本数据实现定量化，但样本容量是关键的制约因素。岩体结构又具有非均质性：在漫长的地质历史中，形成结构面的力学条件及其他物理环境条件非常复杂，结构面是在岩体内部经地应力作用形成的，结构面的尺度是指面积的大小，在多数自然条件下结构面处于压、切应力作用下，故而多数是闭合的。岩体结构的非均质性和岩体工程的不确定性，导致岩石节理裂隙系统具有强烈的非线性特征，且为复杂系统。复杂系统具有系统开放、远离平衡、自组织、内部非线性、演化过程不可逆、初值敏感、涨落和对称破缺等共性，复杂现象产生的主要原因包括系统演化过程的不可逆性、局部不稳定性和演变过程的非线性等。然而，经典科学以稳定、有序、单一、对称与平衡为主要特征，不涉及复杂性问题，因此需要寻找更适合的理论与方法，以解决岩石节理裂隙这一复杂系统的稳定性评价问题。

耗散结构理论由比利时科学家 Prigogine 于 1969 年提出，解决了 Clausius 热力学与 Darwin 进化论之间的矛盾问题。耗散结构是指在远离平衡条件下，系统借助外界物质流和能流而维持的一种在空间及时间上的有序现象，其形成须具备系统为开放系统、远离平衡、内部各要素之间存在非线性作用和涨落导致有序 4 个条件。耗散结构理论的一个核心概念是熵，与外界环境无物质交换和能量交换等任何联系的系统为孤立系统，其熵增加并趋于极大值；在给定温度下，与外界环境只有能量交换而无物质交换的系统为封闭系统，其自由能减小并趋于极小值；与外界环境既有能量交换又有物质交换的系统为开放系统，即熵交换的存在是开放系统和孤立系统的本质区别，远离平衡态的开放系统的研究有赖于

非线性动力学理论。地质系统演化过程的不可逆、非线性动力学机制所演化出的多样化自组织（或耗散结构）行为和混沌状态，是其复杂性的主要体现。因此，远离平衡条件下的非线性动力学机制是地质系统的内蕴特性，耗散结构理论是研究地质学的普适性原理，而非线性动力学及与之相关的数学专门学科（动力系统），则是揭示复杂现象动力学机制的主要方法[50-53]。

岩石节理裂隙系统显然是开放的、不可逆的、初值敏感的、非线性的、耗散的和复杂的，选择非线性动力学理论研究其破坏机理是科学的。混沌动力学是非线性动力学理论的重要组成部分，其基本原理是：一个参数随时间而演化的序列不是孤立的，它受系统中多因素的综合影响，融合了复杂的、全面的系统信息，通过适合的相空间重构技术，对一个参数时间序列的分析可以再现系统的原始信息，可以对复杂的、貌似无序的时间序列提取一个宏观指标（如 Lyapunov 指数）进行定性评价，这是非线性动力学理论应用于岩石节理裂隙系统稳定性分析的基础。

3.3.5 节理岩体系统破坏的混沌机制

Lyapunov 指数不是局部，而是系统宏观、整体特性的表示，最大 Lyapunov 指数 LE_1 的数值或符号可以反映出系统所处的状态是混沌的、随机的、有序的还是临界的，对定性评价一个系统的稳定性具有实用价值。Kolmogorov（K）熵是一个系统被确定处于混沌状态后混沌程度的量度，该指标是系统稳定性程度定量评价的关键，实际应用中与 LE_1 的确定关系密切。同时 Renyi 二阶熵的倒数是一个系统的平均可预报时间尺度，是系统稳定性状态混沌预测的关键指标。在时间序列的实际计算中，应用前述 Wolf 方法提取最大 LE_1，取 K 熵的倒数近似为平均可预报时间尺度。

1. Kolmogorov 熵理论

经典物理学中，熵是描述复杂系统无序程度（不确定性）的物理量，其概念的提出已有 150 年时间，Clausius 及 Boltzmann 提出熵作为热力学系统的状态函数 $S = KBL_nW$，在宏观（宏观量 S）与微观（微观状态数 W）之间架设了一座桥梁。之后统计物理和热力学成为了一门定量演化科学，而熵理论被广泛应用于其他领域并因此成为科学中的基本概念。Boltzmann 1898 年提出熵可以作为系统无序性的量度，在此基础上，布鲁塞尔学派的 Prigogine 创立的非线性非平衡热力学进行了拓展，把一个非平衡开放系统的熵变 dS 分解为熵交换项 deS 和熵产生项 diS，建立了熵交换与物质流、能流，熵产生与系统内各种不可逆过程的明确关系；Shannon 1948 年在通信问题研究中提出信息熵概念；20 世纪 50 年代末，Kolmogorov 为处理 Bernoulli 移位的同构问题而在遍历理论中引入了测度熵概念，并在 Sinai 和 Orstein 等的发展下成为测度动力系统中卓有成效的理论；20 世纪 60 年代中期，Adler、Konheim 与 McAndrew 为研究拓扑动力系统引入了拓扑熵概念。这些都是有关不确定性的数学量度，在现代动力系统的研究中发挥着重要作用。

系统精度足够小时，系统信息在足够长时间内的平均变化率为信息流率，即称之为熵，是系统的状态函数。设系统在 t_1 时刻的信息量为 $I_1(t_1)$，在 t_2 时刻时信息量变为 $I_2(t_2, t_1)$，则

$$K = \frac{I_2(t_2, t_1) - I_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t)}{\Delta t} \quad (\text{bit/时间}) \tag{3-86}$$

式（3-86）即为 Kolmogorov 熵，亦称 Kolmogorov-Sinai 熵、测度熵或信息流率，是

描述非线性系统产生信息量多少和快慢程度的物理量。在实用中，K 熵为所有正的 Lyapunov 指数之和，是一个系统被确定处于混沌状态后混沌程度的量度，是系统稳定性程度定量评价的关键指标。处于定常运动、周期运动和准周期运动状态的系统为有序系统，是完全可以预测的，所以其信息量不随时间发生任何变化，故 K 熵为 0；而随机系统的状态是完全不可预测的，因此 K 熵趋向无穷大；对混沌系统，因其初值敏感性而导致的某方向轨道的指数发散，任一初值的不确定性均将按指数规律放大，故 K 熵为一正值。熵增大的过程是系统无序度（混乱度）增加的过程：熵小则系统混乱度低，熵大则系统混乱度高。即熵是系统混乱度的量度，相应地可将负熵理解为系统有序度的量度[54-56]。

2. RMTS 电液伺服岩石力学实验

实验在美国 MTS 公司研制的具有计算机精确控制加载路径的 MTS815.03 电液伺服岩石实验系统（Electro - hydraulic Servo - controlled Rock Mechanics Testing System）上进行，实验系统如图 3-21 所示，包括试件及传感器的安装方式、系统的主要技术指标见表 3-6。

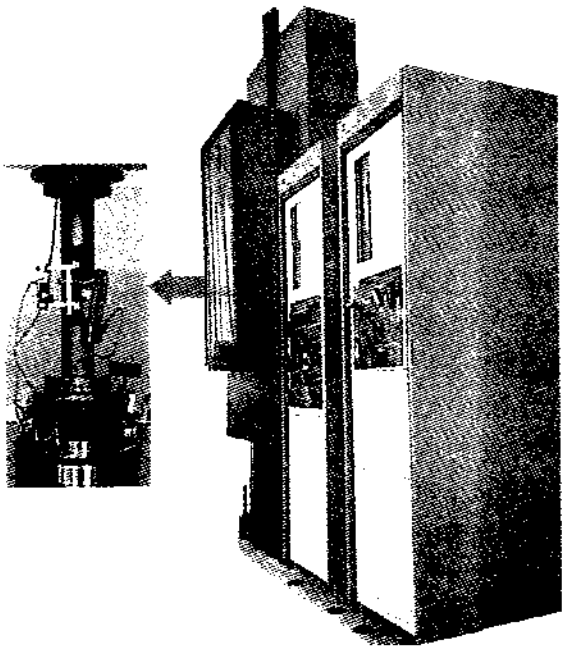


图 3-21　MTS815.03 电液伺服岩石材料实验系统示意图

表 3-6　MTS815.03 岩石伺服实验系统主要技术指标

类　别	指　标	类　别	指　标
型　号	MTS815.03	液压源流量	31.8L/min
轴　压	≤460kN	伺服阀灵敏度	290Hz
围　压	≤140MPa	数采通道数	10chans
孔隙水压	≤70MPa	最小采样间隔	50μs
水渗透压差	2MPa	输出波形	直线波、正弦波、三角波、方池等
机架刚度	10.5×10^9N/m	单轴、三轴实验试件最大直径	100mm

系统的主要特点是与试件直接接触的引伸仪可在高温（200℃）、高压（140MPa）油中工作，可对岩石破坏前后的应力应变进行最精确测量。实心钢制荷重架只储存很小的弹性能，机架刚度为 10.5×10^{9}N/m，可实现刚性压力实验，可充分满足岩石压缩实验要求。MTS815.03 电液伺服岩石实验系统能够自动控制实验过程，其关键在于控制变量的选择，可供选择的控制变量一般有三个，可分别以载荷、轴向应变和环向应变作为主控变量。主控变量应根据岩石类型和实验类型的不同来选择：岩石试件蠕变实验的目的是观察长期载荷（恒定载荷），对岩石变形和破坏的影响只能选择载荷作为主控变量；岩石的 $\sigma-\varepsilon$ 全程曲线实验不能选择载荷作为主控变量，因为载荷超过抗压强度后，随着应变的增加，载荷无法上升，只能造成岩石试件的崩裂，这与一般压力实验机相同；岩石材料一般都具有不同程度的扩容现象，即在一定变形以后，环向应变的总和要超过轴向应变，岩石破坏后尤其如此，因此采用应变控制能得到 $\sigma-\varepsilon$ 全程曲线；比较坚硬的脆性岩石，破坏前轴向变形很小且极易发生脆性破坏，但在试件破坏前后，轴向应变有微小的变化即可使环向应变有较大的变化，因此采用环向应变作为主控变量，可以微小地控制载荷和轴向应变的变化，从而作出完整的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线；强度不是很高的沉积岩（如砂岩、煤、泥岩等），采用轴向应变作为主控变量即可得出完整的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线，但由于岩石破坏前后应变速度差别较大，因此峰值前的实验应采用较小的应变速度，峰值后的实验应采用较大的应变速度，既节约机时，又可保证实验效果。砂岩试件全应力－应变曲线是其破坏机理全过程的综合反映，实质是其节理裂隙的演化过程。抽象出轴向应力时间序列进行适当的相空间重构，可以再现系统的原始信息，对定性和定量评价砂岩裂隙系统的稳定性具有重要意义。

实验以赋存于地下 400m 深度的同一种砂岩为研究对象。在地下空间中现场打钻取岩心后立即封蜡，以保证试件与现场条件具有相同的湿度，运抵实验室的砂岩经过切、磨加工成标准岩石试件。标准砂岩试件为圆柱形，直径和高度分别为 50mm 和 100mm，其平整度、垂直度等均能达到岩石实验规范标准。MTS815.03 系统对 40 个砂岩试件进行单轴和三轴压缩实验，采用轴向应变作为主控变量，峰前加载速度采用 0.0001mm/s，峰后加载速度采用 0.0002mm/s。得到砂岩试件的单轴全应力－应变曲线共 20 条，砂岩试件的三轴全应力－应变曲线共 20 条，对每一单轴或三轴砂岩试件全应力－应变曲线所反映的轴向应力时间序列进行混沌动力学研究。

3. 岩石全应力－应变实验曲线四分法

如图 3－22 所示，岩石的全应力－应变实验曲线分为 4 个阶段[57－60]。

oa 段称原生裂隙的压缩闭合阶段，岩石的应力－轴向应变曲线微呈上凹特征，载荷卸除后变形可完全恢复，岩石的应力－横向应变曲线较陡，体积随压力的增加而压缩，对致密岩石或有围压作用时，该区段范围很小甚至不存在；*ab* 段称线弹性变形阶段，岩石的应力－轴向应变曲线近似呈直线特征，载荷卸除后变形可完全恢复，直线斜率为岩石的弹性模量 E，*b* 点称为比例极限或弹性极限；*bc* 段称弹塑性变形阶段，岩石的应力－轴向应变曲线由 *b* 点开始偏离直线而呈下凹特征，载荷卸除后变形不可完全恢复，残留变形为塑性应变（*oq*），到 *c* 点处时，即使在岩石试件的表面上也可见到宏观破裂迹线，若压力保持不变或减小不及时，岩石试件将突然碎裂破坏，因此可以认为该阶段裂隙已贯通；*cd* 段称应变软化阶段，岩石的应力－轴向应变曲线呈先下凹再上凹的特征，为裂隙不稳定扩展阶段。

4. 岩石全应力－应变实验曲线的二分法

图 3－23 所示为适于时间序列研究的应力－应变曲线分段方法。

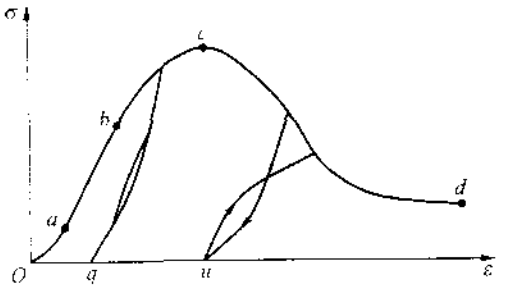


图 3－22 岩石全应力－应变曲线

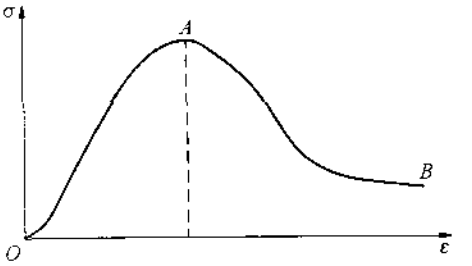


图 3－23 岩石全应力－应变曲线的二分法

这种二分法将全应力－应变曲线以峰值点 A 为标记简单地分为两段，即 OA 段和 AB 段，分段原则是基于前述理论与实验统计分析。实验中岩石类脆性材料断裂破坏的突发性表明，A 点是岩石试件节理裂隙是否已贯通的分界，以从混沌动力学角度分析 OA、AB 和 OAB 段时间序列，研究岩石全应力－应变实验曲线新的分段特征。

5. 岩石节理裂隙贯通的 Kolmogorov 熵定量判别法

根据岩体受结构面分割的程度不同，已有其适用理论与研究方法的分类，见表 3－7。

表 3－7 岩体结构类型及其适用的理论与研究方法

介质类型	结构特征	适用的理论与研究方法
完整	节理裂隙不发育，少量小尺度结构面不影响整体强度，无贯通结构面	连续介质力学
层状	分层厚度薄，层面鲜明，相邻岩层岩性差异明显	连续介质力学、复合材料力学、横观各向同性
裂隙	整体连续，因受几组节理裂隙或大构造面切割，其强度和变形决定于结构面的力学性质，节理裂隙贯通	目前的损伤力学和断裂力学尚不足以解决裂隙介质岩体的力学问题
块裂	碎裂为块状，完全丧失了整体性	碎块体力学

连续介质力学方法的损伤断裂理论用于研究岩石节理裂隙未贯通时的破坏机理，非连续介质力学方法的块体理论（离散单元法）用于研究岩石节理裂隙贯通时的破坏机理。由此可见，岩石节理裂隙贯通的定量判别方法研究具有重要价值。从非线性力学角度出发，岩石节理裂隙的贯通可能用分形几何理论解决，但是由未贯通节理裂隙过渡到贯通节理裂隙的分形维数取值标准问题有待进一步的研究，因而需要探讨适用的定量判别新方法。

根据砂岩全应力－应变曲线的二分法原则，将全应力－应变曲线分为两段，峰前阶段对应岩石节理裂隙未贯通情形，峰后阶段对应岩石节理裂隙的贯通情形，以进行岩石节理裂隙贯通与否的定量判别[61-67]。

K 熵是对混沌系统的混沌程度进行定量评价的指标，通过研究，无论单轴实验还是三轴实验，所有应力应变实验曲线峰前段的 LE_1 符号均为正，系统在峰值前均处于混沌状

态。应用混沌准则对砂岩全应力－应变曲线峰前段时序进行混沌动力学分析，提取 K 熵，见表 3－8。

表 3－8　砂岩全应力－应变实验曲线峰前段 K 熵值

单轴 MTS 实验曲线	σ_c/MPa	LE_1	K 熵	三轴 MTS 实验曲线	σ_3/MPa	LE_1	K 熵
砂岩试件 1 峰前	45.49447	0.001454	0.837836	砂岩试件 11 峰前	167.2904	0.044251	0.16219
砂岩试件 2 峰前	69.683876	0.000809	0.962537	砂岩试件 12 峰前	151.22699	0.022228	0.326442
砂岩试件 3 峰前	87.52547	0.019732	1.84225	砂岩试件 13 峰前	77.88358	0.038912	0.097849
砂岩试件 4 峰前	49.27306	0.039988	0.16779	砂岩试件 14 峰前	109.18695	0.038373	0.132775
砂岩试件 5 峰前	85.50938	0.01876	1.24869	砂岩试件 15 峰前	34.94004	0.022396	0.036930
砂岩试件 6 峰前	41.08149	0.046126	0.124101	砂岩试件 16 峰前	73.21043	0.014614	0.053212
砂岩试件 7 峰前	26.33889	0.01324	0.301248	砂岩试件 17 峰前	82.40369	0.02049	0.071295
砂岩试件 8 峰前	36.18198	0.02435	0.208699	砂岩试件 18 峰前	154.82603	0.047717	0.15061
砂岩试件 9 峰前	26.32457	0.016583	0.04886	砂岩试件 19 峰前	83.293236	0.014761	0.053212
砂岩试件 10 峰前	19.79788	0.040059	0.137947	砂岩试件 20 峰前	35.593857	0.004606	0.12143
砂岩试件 31 峰前	36.0472	0.025312	0.448291	砂岩试件 21 峰前	76.888756	0.021326	0.09805
砂岩试件 32 峰前	51.987133	0.021189	0.580418	砂岩试件 22 峰前	79.504326	0.033876	0.080335
砂岩试件 33 峰前	42.291565	0.015327	0.326117	砂岩试件 23 峰前	105.35903	0.031563	0.103475
砂岩试件 34 峰前	46.397707	0.019302	0.474283	砂岩试件 24 峰前	202.0292	0.030664	0.31777
砂岩试件 35 峰前	54.931263	0.025656	0.867451	砂岩试件 25 峰前	88.60461	0.009809	0.133627
砂岩试件 36 峰前	66.410509	0.023863	0.915647	砂岩试件 26 峰前	109.8668	0.045664	0.16621
砂岩试件 37 峰前	58.592854	0.002725	1.29814	砂岩试件 27 峰前	128.4243	0.023338	0.095317
砂岩试件 38 峰前	39.990784	0.001093	0.788124	砂岩试件 28 峰前	75.15091	0.014643	0.238315
砂岩试件 39 峰前	68.70002	0.00109	1.523849	砂岩试件 29 峰前	99.30045	0.013751	0.176297
砂岩试件 40 峰前	63.628891	0.001637	1.829409	砂岩试件 30 峰前	102.5683	0.017601	0.070655

对表 3－8 中的数据进行回归计算，建立单轴实验 K 熵与单向抗压强度 σ_c 之间的关系为

$$K = -0.53 + 0.03\sigma_c \tag{3-87}$$

因三轴实验时的围压（油压）均选定为 10MPa，故 $\sigma_2 = \sigma_3 = 10\text{MPa}$，实验结果得到的仅是不同的 σ_1。对表 3－8 中的数据分别回归，并分别建立三轴实验 K 熵、σ_1 与主应力差（$\sigma_1 - \sigma_3$）之间的关系为

$$K = -0.0256 + 0.0014\sigma_1 \tag{3-88}$$

$$K = -0.0119 + 0.0014(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{3-89}$$

绘制 K 熵随砂岩实验强度而变化的散点图及分类回归曲线如图 3－24 所示。

式（3－87）、式（3－88）、式（3－89）即为对应条件下砂岩节理裂隙贯通与否的 K 熵定量判据。应用于岩石强度准则研究[68-73]。将式（3－87）变换后代入库仑准则的主应力表达式 $\sigma_1 = \sigma_c + \sigma_3\tan^2\theta$，得到基于 K 熵的岩石单轴压缩库仑准则为

$$\sigma_1 = 39.84K + 21.06 \qquad (3-90)$$

相同压力作用下，单轴全应力－应变曲线的峰前段进程明显快于三轴，因此单轴 K 熵大于三轴，即单轴全应力－应变曲线峰前段的混沌程度普遍高于三轴。切应变能强度理论从能量的观点出发研究材料强度条件，认为三向应力作用下材料单位体积的形变能与材料单纯受拉（压）破坏时的形变能相等时，便引起材料的屈服或破裂。八面体应力理论从应力观点出发研究材料的强度条件，认为材料的破坏是由于八面体上切应力值达到临界值所引起，属于切应力强度理论之一。实验证明，用切应变能强度理论与八面体应力理论对以延性破坏为主的岩石进行分析，所得结论与实验结果符合较好，而且二者具有相同的表达形式：

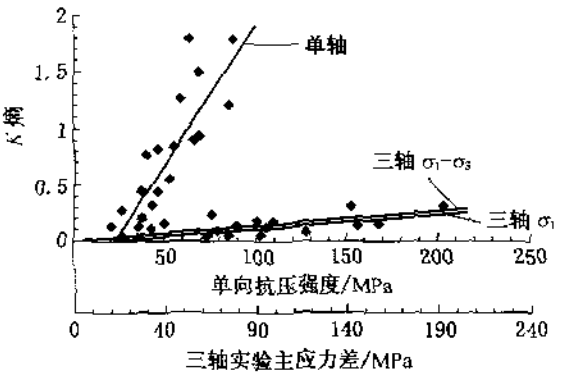


图 3－24　K 熵随实验强度变化散点图及分类回归曲线

$$\tau_8 = \sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}} \qquad (3-91)$$

对本次常规三轴压缩实验而言，$\sigma_2 = \sigma_3 = 10\text{MPa}$。将式(3－89)变换后代入式(3－91)，得到基于 K 熵的岩石八面体切应力强度准则为

$$\tau_8 = 714.29K + 8.5 \qquad (3-92)$$

Griffith 强度理论考虑到岩石材料的非连续性及其断裂破坏过程，认为微小裂纹的存在是岩石材料宏观断裂破坏的原因。以最大、最小主应力表示的裂纹开始扩展时的 Griffith 强度准则为（条件 $\sigma_1 + 3\sigma_3 \geqslant 0$）：

$$\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\sigma_1+\sigma_3} \geqslant -8\sigma_t \qquad (3-93)$$

式中　σ_t——切向拉应力临界值，指材料受单轴拉伸至破坏时的抗拉强度。

将式（3－88）、式（3－89）的变换项及 $\sigma_3 = 10\text{MPa}$ 代入式（3－93），得到基于 K 熵的 Griffith 岩石强度准则为

$$\sigma_1 \geqslant \frac{-625(K+0.012)^2}{7K+0.277} \qquad (3-94)$$

运用 Kolmogorov 熵理论实现了岩石节理裂隙贯通与否的定量判别，并尝试应用于岩石强度准则的研究，初步建立了 K 熵这一微观特征量与宏观力学量之间的关系。

3.3.6　节理岩体块体滑落过程中的混沌性

节理岩体是一种性质复杂的地质材料，它经受长期的地质构造作用，在一定的地质环境中形成一定的结构，其最大特点是结构上的不连续性，多为层面和节理面所切割，形成块状结构。因此，各岩块的失稳、滑移等是岩层破坏的直接表现，对其动力学性态的认识一直是研究热点之一。1967 年 Burrige 和 Knopoff[74] 提出了描述断层性态的简单弹簧滑块模型，在模型中，弹簧的拉伸比拟断层的弹性应变，而滑动的发生比拟发生于断层上的地震。1978 年 Byerlee[75]、1981 年 Dieterich[76] 等用单滑块模型研究了具有复杂摩擦定律的动力失稳现象，1987 年 Nussbaum 和 Ruina[77,78] 用双滑块模型模拟断层活动时，发现了典

型的混沌现象。1996 年牛志仁、陈觉民[79]研究了单自由度弹性摩擦系统中的倍周期分岔和混沌现象。但当滑块模型增多，且几何形状和力学参数不同时，用解析方法描述滑块模型将变得很困难。为此，用离散元法[26]对岩层块体滑落过程中的混沌性进行模拟，在选择应力、速度等不同变量来描述节理岩体系统失稳演化时发现，系统将呈现出不同程度的混沌性态。岩体不同类型的物理力学参数对岩层块体滑落演化过程中混沌性的影响程度不同，即岩体的剪切模量、体积模量及节理的刚度越大，混沌程度就越低；反之，混沌程度就越高，而块体本身的刚度对混沌性的影响很小。对如何选择变量来定量描述节理岩体系统的失稳演化和可预测性具有重要参考意义。

1. 岩层块体失稳滑落的离散元模拟原理

离散单元法是将所研究的区域划分为一个个分离的多边形体单元，单元之间可以看做是角－角接触、角－边接触或边－边接触，而且随着单元的平移和转动，允许调整各个单元之间的接触关系。块体单元可能达到平衡状态，也可能一直运动下去。离散元的运动方程是结合不同本构关系的牛顿第二定律，物理方程是力和位移之间的关系，可表示为

$$\begin{cases} F_n = K_n U_n \\ \Delta F_s = K_s \Delta U_s \end{cases} \tag{3-95}$$

式中 K_n，K_s——法向刚度和切向刚度；

F_n，U_n——法向力和法向位移；

ΔF_s，ΔU_s——剪切力增量和剪切位移增量。

对节理面破坏，当岩块受到张力分离时，作用在岩块表面上的法向力和剪切力即消失；对于塑性剪切破坏，块体间滑动符合 F_s 是否超过 $C + F_n\tan\psi$，这里 C 为黏结力，ψ 为内摩擦角。离散单元法的基本运动方程为

$$m\ddot{u} + a\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \tag{3-96}$$

式中 m——单元的质量；

u——位移；

t——时间；

a——黏性阻力系数；

K——刚度；

f——单元所受外载。

离散元方法利用中心差分法按时步对力和位移进行求解迭代。对于式（3－96），假定 $t+\Delta t$ 时刻以前的 $f(t)$，$\ddot{u}(t)$，$u(t-\Delta t)$，$u(t+\Delta t)$ 及 $\dot{u}(t)$ 已知，利用中心差分法可求得平动位移为

$$u(t+\Delta t) = \left\{(\Delta t)^2 f(t) + \left(\frac{c}{2}\Delta t - m\right)u(t-\Delta t) + [2m - k(\Delta t)^2]u(t)\right\} \Big/ \left(m + \frac{c}{2}\Delta t\right) \tag{3-97}$$

进一步求得 t 时刻的速度 $\dot{u}(t)$ 及加速度 $\ddot{u}(t)$ 为

$$\dot{u}(t) = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{3-98}$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{3-99}$$

对于块体转动方程的求解过程可按式（3－97）、式（3－98）、式（3－99）的差分形

式进行类似迭代。

2. 顶板岩块滑落过程中混沌性模拟

1）模拟条件

如图3－25所示，模型中的煤层厚2m，直接顶厚5m，被节理切割为5m长的块体结构，基本顶为10m厚的完整顶板，开采的跨度为14m，悬露顶板为1、2、3块。

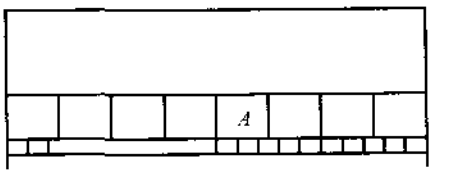


图3－25　顶板滑落模型图

其主要力学参数为块体剪切模量 G = 3000MPa，体积模量 K = 4000MPa，法向刚度 K_n = 4000MPa/m，节理切向刚度 Jk_s = 8000MPa/m，节理法向刚度 Jk_n = 8000MPa/m，节理摩擦因数 J_{fric} = 0.15，节理的黏聚力 J_{coh} = 0.5MPa。垂直层面有均匀分布载荷 q = －10MPa，模拟埋深为400m。现考察煤壁前方直接顶 A 处的动力学特性。

2）各物理量的混沌性

图3－26a～图3－26d显示了 A 点在离散元迭代计算中垂直速度、水平应力、切应力和垂直应力随时步呈现的动力学性态变化情形。

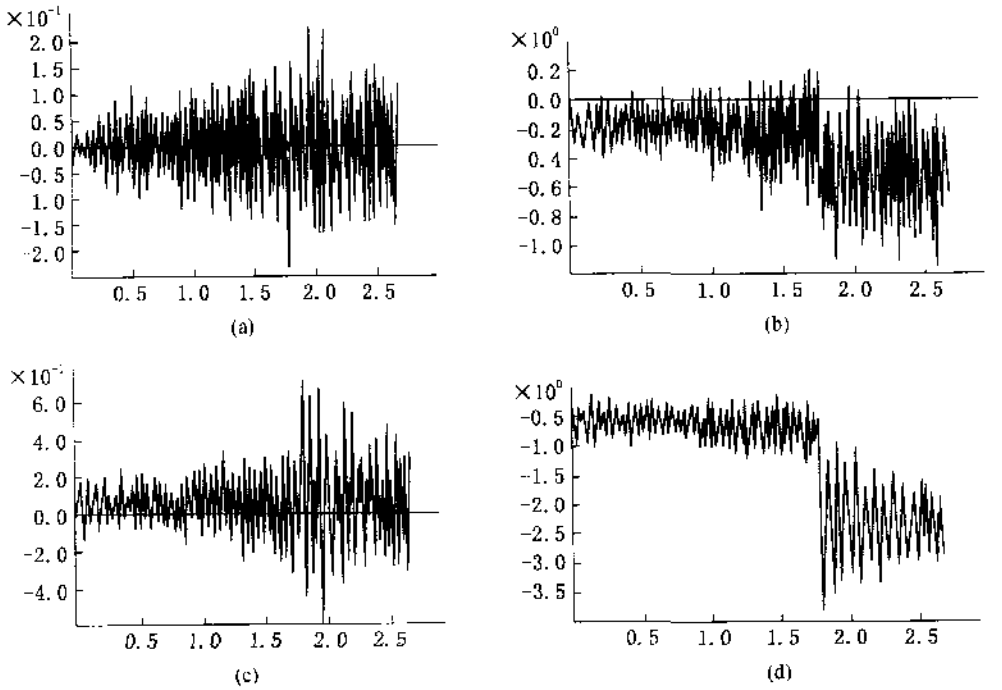


图3－26　A 点动力学性态模拟结果

各变量变化有如下特点：

（1）垂直速度 Y_{rel} 和切应力 S_{xy} 随着时步呈现出极不规则波动状，经计算其 Lyapunov 指数分别为2.17和2.08，即呈现出强混沌性态。

（2）水平应力 S_{xx} 和垂直应力 S_{yy} 随着时步呈现出阶梯状不规则波动状，经计算其 Lya-

punov 指数分别为 1.26 和 0.92，即呈现出相对较弱混沌性态。

从上面模拟结果可以看出，在多块体耦合滑动过程中，当利用不同变量来描述其动力学性态时，将会得出不同的结论，这一点对人们选择怎样的变量来建立岩石力学工程中失稳模型是非常重要的。

3. 不同岩体物理力学参数对混沌性的影响

在现场工程中，往往选用围岩变形速度作为监测岩层失稳运动的指标，如在超前巷道内通过监测顶板下沉速度变化可预测回采工作面顶板的垮落来压。因此，下面就 A 点的垂直速度 Y_{vel} 在不同顶板力学参数条件下所呈现的动力学性态进行讨论。

1）岩块模量 G、K 的影响

岩块本身力学性质的不同，将对其动力学性态产生不同的影响。图 3-27 显示了不同 G、K 条件下 A 点垂直速度的变化情况。

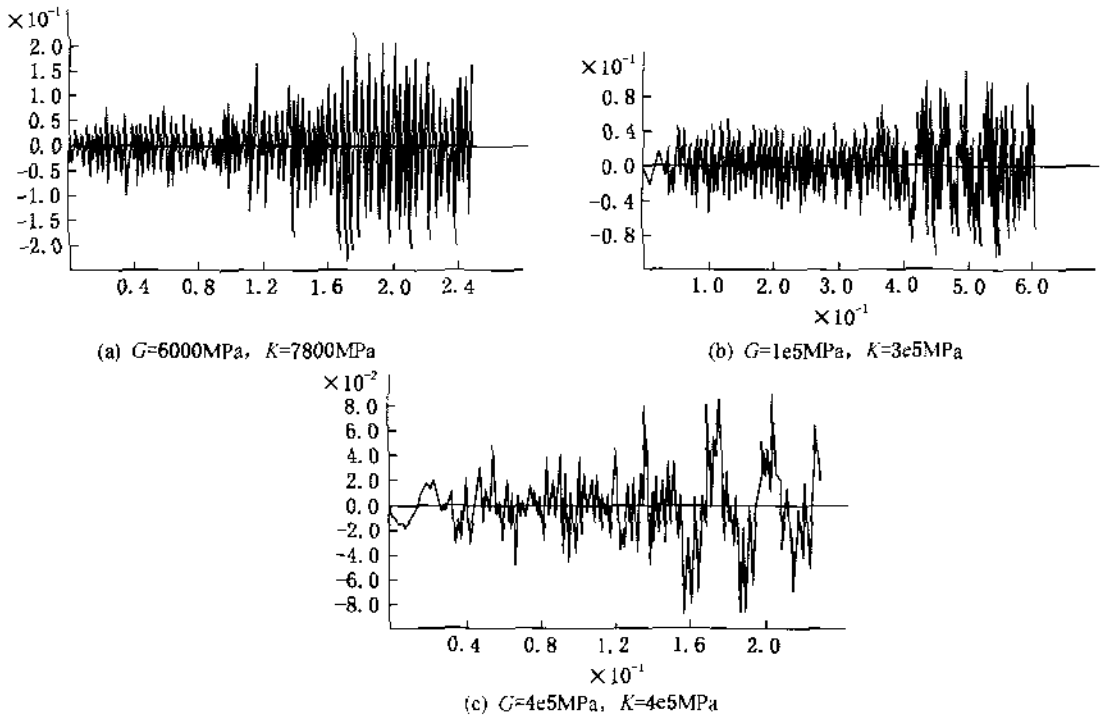


图 3-27　不同 G、K 时 A 点垂直速度变化曲线

从图 3-28 又可以看出，随着 G、K 的增加，A 点垂直速度 Y_{vel} 曲线的 Lyapunov 指数随剪切模量 G 增加而减小，即 Y_{vel} 变化曲线随时间变化由强混沌性态向弱混沌性态及不规则周期运动性态转化。这说明，岩块本身越硬，顶板运动动力学性态越简单，可预报性越强；反之，岩块本身越软，顶板运动所呈现的力学性态相对越复杂，可预报性越差，这正是坚硬顶板垮落比软顶板垮落更易预报的内在机理。

2）岩块刚度 K_n、K_s 的影响

图 3-29 所示为不同法向刚度 K_n、切向刚度 K_s 时 A 点的垂直速度变化情况。

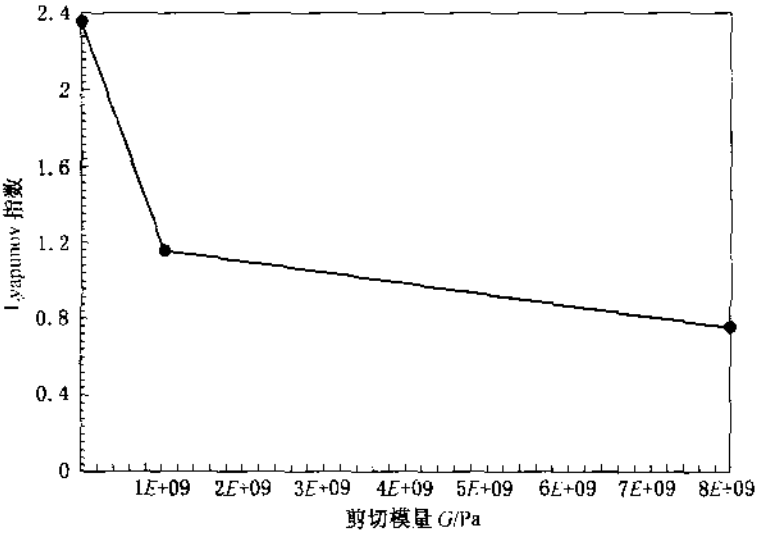
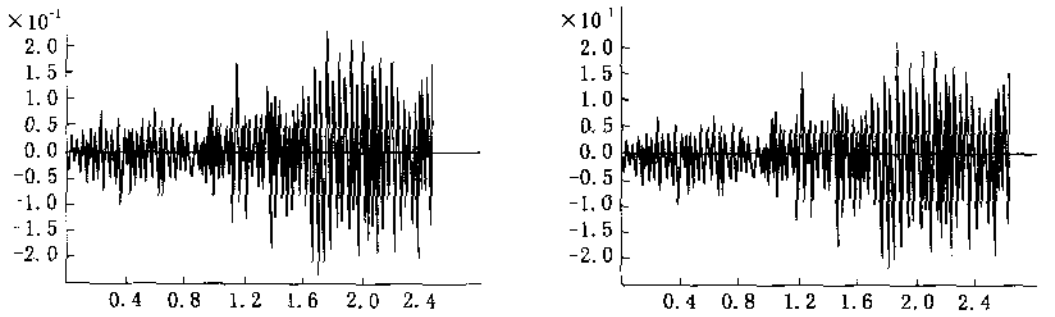


图 3-28　不同剪切模量 G 时的 Lyapunov 指数



(a) K_n=100MPa/m，K_s=100MPa/m　　(b) K_n=4000MPa/m，K_s=4000MPa/m

图 3-29　不同 K_n、K_s 时 A 点垂直速度变化曲线

从图中可以看出，岩块本身刚度大小，几乎不改变其曲线的波动特性。经计算，当 K_n = 100MPa/m，K_s = 100MPa/m 时，Lyapunov 指数为 1.77；当 K_n = 4000MPa/m，K_s = 4000MPa/m 时，Lyapunov 指数为 1.76，即说明岩块本身刚度对垂直速度动力学特性影响很小。

3）节理参数 Jk_n、Jk_s 的影响

图 3-30 所示为不同节理参数 Jk_n、Jk_s 条件下 A 点的垂直速度随时步变化的曲线，图 3-31 所示为计算得到的随着 Jk_n、Jk_s 变化的 Lyapunov 指数曲线。

从图 3-31 中可以看出，节理刚度越小，垂直速度变化曲线的 Lyapunov 指数就越大，即顶板滑落过程中呈现的混沌现象就越强；反之，节理刚度越大，垂直速度变化曲线的 Lyapunov 指数就越小，即顶板滑落过程中呈现的混沌现象就越弱，这与 G、K 的影响规律一致。

综上所述，针对节理岩体结构被节理裂隙所切割成多块体的特点，首次利用离散元方法研究了顶板岩块滑落过程中的混沌特征，得到了以下几个方面的认识：

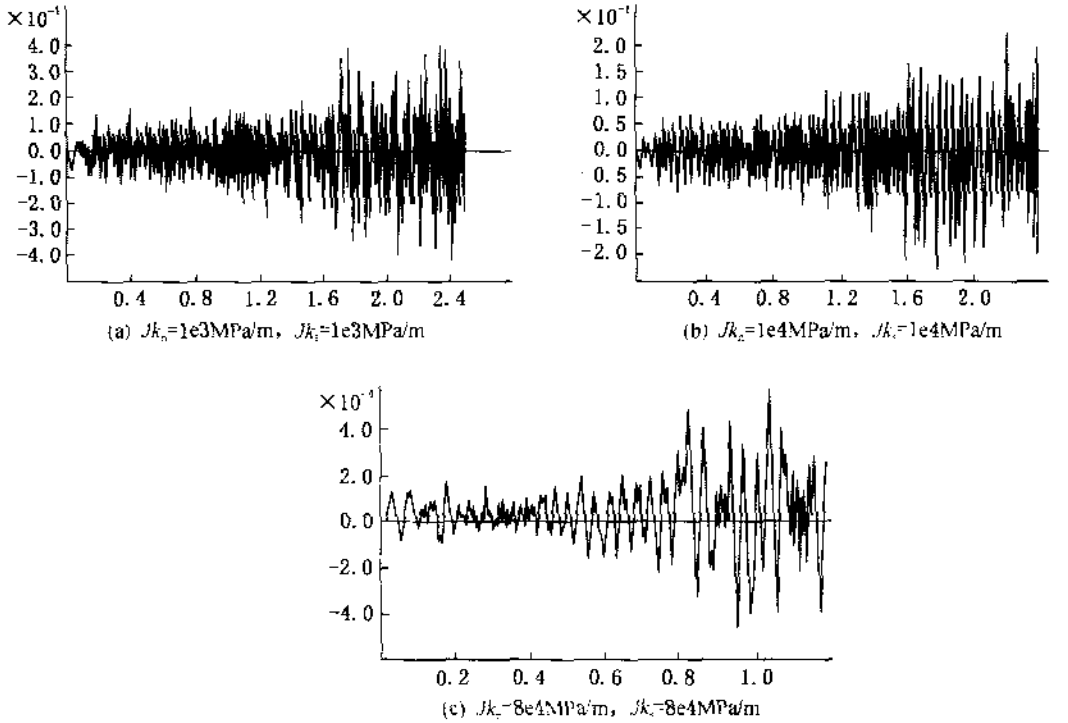


图 3-30　不同 Jk_n、Jk_s 时 A 点的垂直速度变化曲线

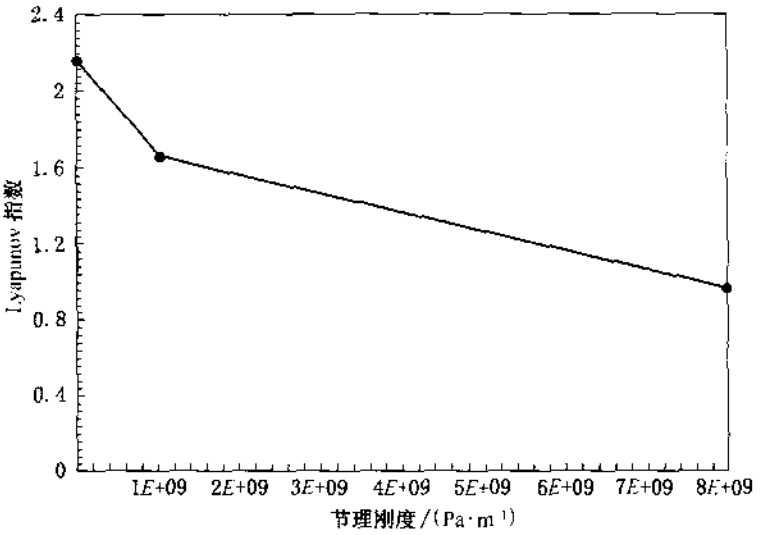


图 3-31　不同 Jk_n、Jk_s 时的 Lyapunov 指数

（1）顶板块体滑落过程中应力、速度等不同变量表现出了不同程度的混沌性态，因而在实际工程中选择不同变量对岩层失稳突变性态进行预测时，其可靠程度将不同。

（2）岩块自身的剪切模量 G、体积模量 K 对顶板岩块运动的动力学性态影响较大，

岩块的 C、K 越大即本身越坚硬，岩层运动过程中的混沌性越弱；反之，岩层运动过程中的混沌性越强，这很好地解释了坚硬岩层失稳灾变预测比软弱岩层失稳灾变预测更易于实现的内在机理。

（3）岩块的法向刚度 K_n 和切向刚度 K_s 对岩层动力学性态影响不大，而岩体的节理参数法向刚度 Jk_n 和切向刚度 Jk_s 表现出了与 G、K 一致的影响岩层失稳运动过程中的混沌性规律，表明岩体的节理特性对围岩稳定性和可预测性的影响更大。

3.4 软岩混沌性

3.4.1 软岩及基本特性

软岩是指松、散、软弱的岩体。具有强度低、孔隙率大、胶结力弱、压密程度差、成岩时间晚、风化程度高、受构造影响强、含膨胀矿物多、易破碎、不稳定及支护难度高等特点。软岩抗压强度低于25MPa，自承能力差，岩体组分中含有伊利石、蒙脱石、高岭石。软岩对水十分敏感，亲水性强，吸水率高，膨胀力大，有的遇水膨胀、崩解、蠕变。其工程特征是应力扩散快、变形量大、变形持续时间长，在外力撤除后，虽然岩体变形逐渐恢复，但有相当部分应力储存在岩层中而不能迅速释放，当硐室开挖后，岩体强烈地表现为流变特性，持续释放原来储存的应变能，其释放速度又十分缓慢，在硐室变形稳定后仍能以一定速度蠕变，其长期强度很低。软岩存在软化临界荷载和软化临界深度的工程特性。软岩具有可塑性、膨胀性、崩解性、流变性和易扰动性等力学属性，开挖后将经历多次变形破坏，因此传统的固体力学及地质力学中的变形、破坏概念不适用于软岩。软岩中的岩石力学问题应集中在岩体受外力作用下的再变形、再破坏的规律研究。按照软岩产生塑性变形的机理不同，将软岩分为4类：膨胀性软岩（或称低强度软岩）、高应力软岩、节理化软岩和复合型软岩。在此基础上，对各类软岩进行分级。在工程分类方面，根据研究目的不同，进行软岩矿井的分类、软岩变形力学机制的分类、软岩软化程度分类和软岩的软化途径分类。这些科学分类使我国软岩研究走在了世界前列。我国学者[80-85]，通过大量地质调查和力学化学试验，确定了煤矿膨胀性软岩的地质力学化学的一般特征，见表3-9。

表3-9 我国煤矿膨胀性软岩的物理力学一般特征

软岩地质时代	地质力学化学参数								
	抗压强度/MPa	比表面积/($m^2 \cdot g^{-1}$)	交换容量 Meg/(100g)$^{-1}$	液限/%	塑限/%	吸水率/%	黏土矿物	亲水性	膨胀性
古生代	>20	<100	<20	<25	<15	<50	高岭石为主 少量伊利石	弱亲水	弱膨胀
中生代	10~20	199~300	20~50	25~50	15~30	50~90	伊蒙混层为主 少量伊利石	亲水	中膨胀
新生代	1~10	>300	<50	>50	>30	>90	蒙脱石为主 少量伊蒙混层	强亲水	强膨胀

3.4.2 软岩混沌力学特性

煤矿软岩井巷工程难支护的一个主要原因在于软岩是一种混沌力学介质，软岩工程的变形力学过程是一个混沌力学过程。彭涛、何满潮对软岩工程变形力学过程中的混沌力学现象及其形成机理进行了探讨[86,87]。

由于软岩为具有非均质、非连续、非线性、大变形、各向异性和流变性的特殊力学介质，因而使软岩变形的力学特征与通常的线性力学介质有显著不同，这突出地表现在软岩工程的变形力学过程具有混沌力学特性上。人们把由于确定性非线性相互作用而引起的具有随机性的力学行为（或运动状态）称为软岩工程的混沌力学行为，它主要表现为系统力学行为对初始工程力学条件、边界工程力学条件及工程力学作用过程的敏感依赖性，变形破坏的随机性以及系统长期行为的不可预测性。

1. 软岩岩石力学试验中的混沌现象

软岩介质的混沌力学特性，首先表现在软岩岩石力学试验中。

1）对物质组成的敏感依赖性

大量的研究和试验表明，物质组成对软岩的性质有较大影响，并且表现得异常敏感。以软岩中黏土矿物含量的不同为例，如图3－32所示。

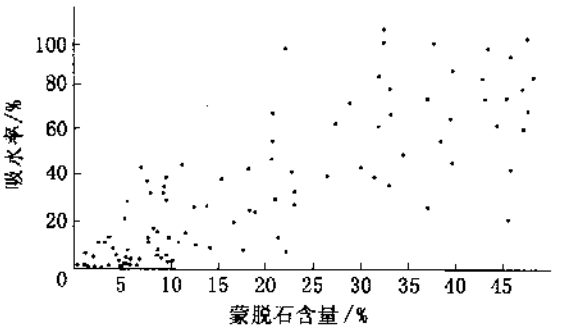


图3－32 蒙脱石含量与软岩岩块吸水率关系

当软岩中不含蒙脱石时，其膨胀性和吸水性通常很弱，强度较高；当蒙脱石含量在0～10%时，软岩有一定的膨胀性和吸水性，强度中等；当蒙脱石含量大于10%时，软岩有较强的膨胀性和吸水性，强度较低。分析表明，试验结果具有明显的分散性和随机性，但试验结果显然只是在有限的区域内随机分布，而不是在整个区域内随机分布，这种随机性是确定性系统所具有的随机性。

2）对含水量的敏感依赖性

软岩的含水量对力学试验结果也有较大影响，并且表现得异常敏感。以含水量对软岩剪切强度的影响为例，对同类软岩，含水量的微小变化可导致剪切强度的较大差异，即含水量增加，软岩剪切强度将急剧降低，反映了剪切强度对含水量的敏感依赖性。例如，当含水量由16%升高到19%时，淮南矿区灰黑色泥岩的内聚力可由0.3MPa降至0.15MPa。

3）对围压的敏感依赖性

软岩的力学性质具有对围压的敏感依赖性。以围压对软岩三轴压缩试验的影响为例：对同类软岩，随着围压增大，其变形破坏过程、峰值强度、残余强度、破坏形式等变形力学性质均有较大变化，试验结果具有较大的分散性和随机性，并且对围压的变化十分敏感。其中，当围压由0升至24MPa时，其峰值强度由22MPa升至55MPa，岩样的破坏形式也由单条张性破裂面发展为多条随机性剪切破坏面。

4）对加载过程的敏感依赖性

软岩的变形力学性质对加载过程（加载时间、加载速率、加载大小、加载方式等）的变化也十分敏感。以三轴压缩试验中加载时间对软岩力学性质的影响为例，如图3－33

所示。

对同一软岩岩样，每级荷载施加的时间长短对软岩非线性阶段的变形力学性质有较大影响，并且表现得十分敏感。

综上所述，在岩石力学试验中，软岩力学性质表现出了明显的随机性和对初始条件的敏感依赖性，这正是混沌力学特性的具体体现。

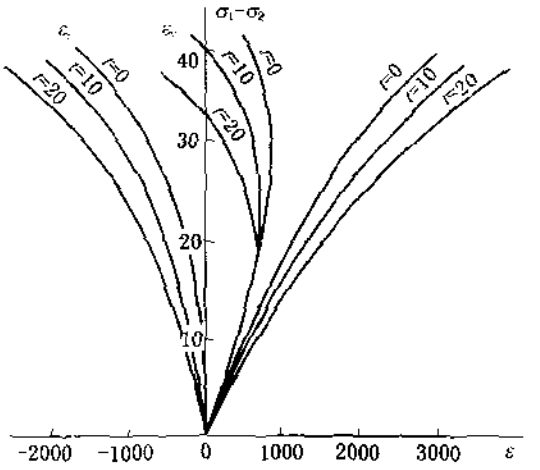


图 3-33 加载时间对软岩变形力学性质的影响

2. 软岩工程数值计算中的混沌现象

目前有限单元法、有限差分法、离散单元法等数值分析技术已被广泛应用于软岩工程的研究和设计过程中，并对软岩工程力学的发展起到巨大的推动作用。但是，在利用数值分析技术研究软岩工程问题时，经常会遇到以下问题[88,89]：

（1）数值分析结果对岩体力学参数、工程断面形状及尺寸、开挖方式和方法等初始条件的变化异常敏感，初始条件的微小变化常常使计算结果呈现较大的分离。

（2）初始工程力学条件相近时，短时期内其模拟分析结果相差不大，但长期模拟分析结果将有较大的差别。数值计算中的软岩工程问题均是确定性力学问题，不存在任何随机因素，但计算结果却呈现较大的分散性和随机性，以及长期力学行为对初始条件的敏感依赖性。

3. 软岩工程支护中的混沌力学现象

（1）软岩工程的断面形状和尺寸、开挖方式和方法、施工顺序和进度等初始工程条件直接决定着工程的稳定状况，或者说，软岩工程的围岩稳定状况具有对初始工程条件的敏感依赖性，初始工程条件的微小变化往往产生截然不同的工程效果。以大平矿井底车场空车线为例（净宽7.0m，净高4.8m，断面形状为直墙半圆拱形）。该工程位于中生代侏罗纪泥岩和泥质砾岩中，围岩属高应力强膨胀复合型软岩。在底板料石反拱的施工过程中，一段是全部掘开后再砌反拱，一段是短掘短砌式施工，其余工程条件相同。结果前者产生了严重的破坏，而后者稳定状况良好。

（2）软岩工程的变形演化过程对工程扰动十分敏感。上例中在支护完成后，相邻（净间距18.5m）的水泵房工程（净宽4.6m，净高5.4m，断面形状为立椭圆形）进行了爆破施工，每次爆破都引起空车线围岩变形速率的急剧增加。

（3）软岩工程的变形破坏对边界条件十分敏感。上例中井底车场重车线（净宽7.0m，净高4.8m，断面形状为直墙半圆拱形）处于厚层状泥质砾岩中，围岩条件较好，采用11号矿用工字钢支架支护。但由于与之相连的变电所及其通路不稳定，引起了重车线的变形和破坏。周边工程修复后，并未对其采取任何支护措施，但其稳定性随之得到控制和恢复。

（4）软岩工程的变形破坏时机具有很大的随机性，难以准确预测。

4. 软岩变形混沌特征[87]

软岩工程之所以能够产生混沌运动，首先在于软岩是一种具有非均质、非连续、非线

性、大变形、各向异性和流变性的特殊力学介质，其变形力学过程具有显著的不可叠加性和不可逆性，其运动演化过程是一个显著的非线性力学过程，这是软岩工程产生混沌运动的根本原因。

事实上，混沌运动只是软岩工程的变形力学过程发展非线性阶段时的特有现象。对软岩的三轴压缩试验表明，软岩岩体的变形力学过程可分为三个阶段，即体积压缩的线性变形阶段、塑性扩容的非线性突变力学阶段和体积膨胀的混沌力学阶段，如图 3－34 所示。

在第一阶段，岩体变形以线性连续变形为主；在第二阶段，岩体中的裂隙不断形成和发展，这实际上是一个由非线性分叉运动不断产生突变的力学过程，是产生混沌运动的过渡阶段；在第三阶段，岩体的分叉运动达到某一临界值，变形力学过程表现出对初始条件的敏感依赖性，岩体变形进入了混沌阶段。其中，第一阶段和第二阶段的分界点 A 为体积应变曲线的拐点，而第二阶段和第三阶段的分界点 B 为体积应变曲线与纵坐标轴的交点（体积膨胀起点）。人们把 A 点称为非线性分界点，它把线性和非线性运动分开；把 B 点称为混沌分界点，它把非线性突变运动与混沌运动分开。为考察混沌运动的形成机理，对软岩进行了单轴压缩蠕变试验，试验结果如图 3－35 所示。

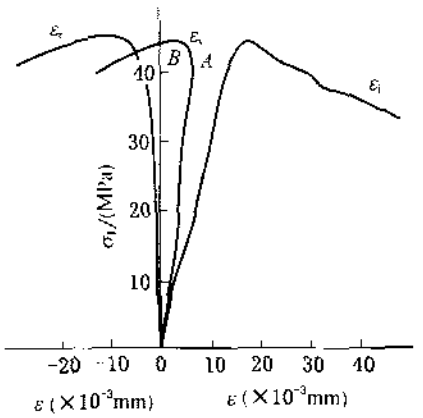


图 3－34　软岩的三轴压缩应力－应变曲线

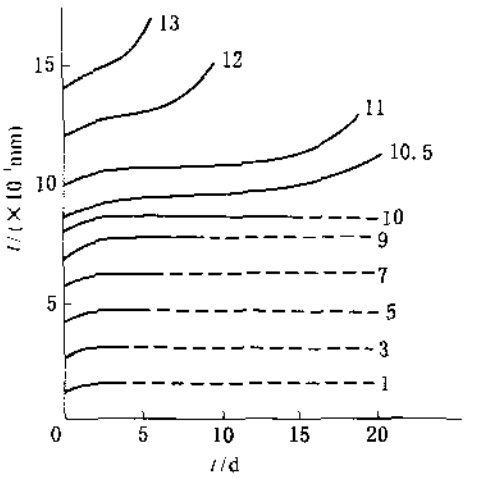


图 3－35　软岩的蠕变曲线

当荷载低于某一临界值时（软岩为 10.5MPa），岩样表现为稳定的蠕变变形，而一旦荷载大于临界值，岩样则表现为非稳定的变形和破坏，在该阶段，岩石变形对初始条件的敏感依赖性得到充分表现，因而该临界点即为混沌分界点，与之相应的工程荷载称为临界混沌荷载 R_{cre}。当工程荷载即临界非线性荷载在（0.5～0.8）R_{cre}时，变形为非线性突变变形，它与非线性分界点相对应。视具体工程不同，非线性表现为混沌运动。临界混沌荷载在工程实践上又表现为临界混沌深度 H_{cre}，该深度的地应力水平相当于临界混沌荷载。因此，在工程实践中，也可以根据工程埋深是否超过临界混沌深度来判断软岩工程是否进入混沌运动状态。目前，尚无精确确定临界混沌深度与临界混沌荷载的办法，但在工程实践中可用试验法、经验公式法和现场调查法来确定。积极开展软岩混沌力学的研究，是解决软岩工程问题值得探讨的新途径。

参 考 文 献

[1] 陆同兴. 非线性物理概论 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2002.

[2] 盛昭瀚，马军海. 非线性动力系统分析引论 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[3] 陈士华，陆君安. 混沌动力学初步 [M]. 武汉：武汉水利电力大学出版社，1998.

[4] 卢侃，孙建华. 欧阳容百，等. 混沌动力学 [M]. 上海：上海翻译出版公司，1990.

[5] 谭云亮. "混沌"及"混沌"理论发展 [J]. 当代矿工，1997（1）：24.

[6] 刘式达，刘式适. 分形和分维引论 [M]. 北京：气象出版社，1993.

[7] 苗东升，刘华杰. 混沌学纵横论 [M]. 北京：中国人民大学出版社，1993.

[8] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础 [M]. 长春：东北师范大学出版社，1995.

[9] Li T Y, Yorker J A. Period three implies chaos [J]. Amera Math Month, 1975, 1（82）：985－992.

[10] 林振山. 非线性动力学与大气科学 [M]. 南京：南京大学出版社，1993.

[11] 周凌云，王瑞丽，吴光敏，等. 非线性物理理论及应用 [M]. 北京：科学出版社，2000.

[12] 黄润生. 混沌及其应用 [M]. 武汉：武汉大学出版社，2000.

[13] 吴祥兴，陈忠，等. 混沌学导论 [M]. 上海：上海科学技术文献出版社，1996.

[14] 王光瑞，于熙玲，陈式刚. 混沌的控制、同步与利用 [M]. 北京：国防工业出版社，2001.

[15] 刘文波. 混沌工程应用基础研究 [M]. 南京：南京航空航天大学，2001.

[16] 刘传孝. 坚硬顶板系统力学分析及运动方程建立的能量余法 [J]. 现代数学和力学，2004，10：253－258.

[17] 刘再华，解德，王元汉，等. 工程断裂动力学 [M]. 武汉：华中理工大学出版社，1996.

[18] 杨广里. 断裂力学及应用 [M]. 北京：中国铁道出版社，1990.

[19] 朱维申，李术才，陈卫忠. 节理岩体破坏机理和锚固效应及工程应用 [M]. 北京：科学出版社，2002.

[20] 中国航空研究院. 应力强度因子手册 [M]. 北京：科学出版社，1981.

[21] 刘传孝. 冲击性顶板运动阻尼效应的数值模拟及混沌动力学分析 [J]. 岩石力学与工程学报，2005，24（11）：1875－1880.

[22] 戴德沛. 阻尼技术的工程应用 [M]. 北京：清华大学出版社，1991.

[23] 戴德沛. 阻尼减振降噪技术 [M]. 西安：西安交通大学出版社，1986.

[24] 刘传孝，王同旭，杨永杰. 高应力区巷道围岩破碎范围的数值模拟及现场测定的方法研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2004，23（14）：2413－2416.

[25] 谭云亮，刘传孝. 巷道围岩稳定性预测与控制 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1999.

[26] 王泳嘉，邢纪波. 离散单元法及在岩石力学中的应用 [M]. 沈阳：东北大学出版社，1991.

[27] Liu Chuanxiao, Jiang Jinquan. Numerical Simulation of Slope Stability with 3DEC and Verification in field by GPR [C]. ISRM International Conference, 2002, 11：234－239.

[28] Liu Chuanxiao, Tan Yunliang. Use of 3DEC to predict roof movements in thick coal seam operations where non－entry faces are employed [C]. the 1st UDEC/3DEC International Conference, 2004, 10：85－87.

[29] 刘传孝. 无人工作面开采坚硬顶板冲击运动的 3DEC 数值模拟研究 [J]. 岩土力学，2004，25（supp2）：285－288.

[30] 刘传孝. 坚硬顶板运动特征的数值模拟及非线性动力学分析 [J]. 岩土力学，2005，26（5）：759－762.

[31] 谭云亮，王学水. 煤矿坚硬顶板活动过程中声发射特征研究 [J]. 岩石力学与工程学报，1992，

10（3）：211－217.
[32] 秦四清，等. 岩石声发射技术概论 [M]. 成都：西南交通大学出版社，1983.
[33] 谭云亮，宋扬. 顶板运动过程中混沌性分析 [J]. 矿山压力与顶板管理，1997，4（3）：227－229.
[34] 谭云亮，杨永杰. 煤矿顶板失稳冒落分形预报的可能性研究 [J]. 岩石力学与工程学报，1996，15（1）：90－95.
[35] 刘传孝，谭云亮，秦广鹏，等. 相空间重构中时滞判定的功率谱分析法 [J]. 岩土力学，2004，25（supp）：83－86.
[36] A Wolf. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physical，1988：285－288.
[37] Tan Yunliang，SongYang. Chaotic features study in strata movement by in－situ datas [J]. IACMAG97 A A Balkema，1997.
[38] 王思敬. 作为现代学科的岩石力学研究与实践 [C]//中国岩石力学与工程学会第五次学术大会论文集. 北京：中国科学技术出版社，1998.
[39] 孙钧. 世纪之交的岩石力学研究 [C]//中国岩石力学与工程学会第五次学术大会论文集. 北京：中国科学技术出版社，1998.
[40] 谢和平，刘夕才，王金安. 关于21世纪岩石力学发展战略的思考 [J]. 岩土工程学报，1996，18（4）：98－102.
[41] 郑哲敏. 21世纪初的力学发展趋势 [J]. 力学进展，1995（4）.
[42] 杨更社，孙钧. 中国岩石力学的研究现状及其展望分析 [J]. 西安公路交通大学学报，2001，21（3）：5－9.
[43] 武际可. 计算力学未来十年展望 [J]. 计算结构力学及应用，1992（2）.
[44] 郑颖人，刘兴华. 近代非线性科学与岩石力学问题 [J]. 岩土工程学报，1996，18（1）：98－100.
[45] 谢和平，尚勇，陈忠辉，等. 岩石的非线性力学研究现状与发展趋势 [J]. 非线性力学理论与实践，1997（9）：3－9.
[46] 杨卫. 宏微观断裂力学 [M]. 北京：国防工业出版社，1995.
[47] 杨卫. 固体破坏理论的若干问题 [J]. 上海力学，1998，19（4）：289－296.
[48] 魏悦广. 固体尺度效应宏微观关联理论和方法的研究进展 [J]. 中国科学基金，2008，14（4）：221－224.
[49] 马怀发，陈厚群，黎保琨. 混凝土细观力学研究进展及评述 [J]. 中国水利水电科学研究院学报，2004，2（2）：124－130.
[50] 胡云铎，戴塔根. 地质学中的耗散结构理论研究 [J]. 江西地质，1999，13（4）：243－246.
[51] 周锦兰. 二十世纪著名科学理论——耗散结构理论简介 [J]. 高等函授学报，1995，18（1）：60－63.
[52] 尼科里斯，普里高京. 非平衡系统的自组织 [M]. 北京：科学出版社，1986.
[53] 湛垦华，沈小峰. 普利高津与耗散结构理论 [M]. 西安：陕西科学技术出版社，1982.
[54] 冯端，冯步云. 熵 [M]. 北京：科学出版社，1992.
[55] 范文涛，丁义明. 平均熵 [J]. 数学物理学报，1999，19（4）：397－404.
[56] 杨杰，张道明，贾丽萍，等. 从熵概念到耗散结构理论 [J]. 石家庄经济学院学报，1998，21（5）：500－506.
[57] 肖树芳，杨淑碧. 岩体力学 [M]. 北京：地质出版社，1999.
[58] 沈明荣. 岩体力学 [M]. 上海：同济大学出版社，2002.
[59] 孙广忠. 岩体结构力学 [M]. 北京：科学出版社，1998.

[60] 夏才初，孙宗颀. 工程岩体节理力学 [M]. 上海：同济大学出版社，2002.
[61] 刘传孝. 岩石破坏机理及节理裂隙分布尺度效应的非线性动力学分析与应用 [M]. 青岛：山东科技大学，2005.
[62] 刘传孝. 砂岩强度 MTS 试验及阶段特征的混沌动力学研究 [J]. 岩土力学，2004，25（12）：1910－1914.
[63] 刘传孝. 饱和嵌入维数确定最大 Lyapunov 指数的准则探讨 [J]. 岩石力学与工程学报，2005，24（22）：4088－4093.
[64] 赵贵兵，石炎福，段文锋，等. 从混沌时间序列同时计算关联维和 Kolmogorov 熵 [J]. 计算物理，1999，6（3）：309－315.
[65] 刘传孝. 砂岩全应力应变试验曲线阶段特征的 Kolmogorov 熵分析 [J]. 计算力学学报，2006，23（2）：247－251.
[66] 刘传孝，刘福胜，谭云亮. 地质构造安全隐患的雷达识别与系统熵分析 [C]//2006 国际安全科学与技术学术研讨会. 北京：科学出版社，2006：23－28.
[67] 康天合. 煤体裂隙尺度－条数分形方法与分形特征研究 [C] //煤炭高等院校青年科学基金学术研讨会论文集，徐州：中国矿业大学出版社，1995：151－158.
[68] John A，Hudson. Engineering rock mechanics [M]. Lon don：Redwood Books Press，1997.
[69] 高延法，张庆松. 矿山岩体力学 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，2000.
[70] 徐芝纶. 弹性力学简明教程 [M]. 北京：高等教育出版社，1983.
[71] 粟一凡. 材料力学 [M]. 北京：高等教育出版社，1983.
[72] 黄维扬. 工程断裂力学 [M]. 北京：航空工业出版社，1992.
[73] 谢和平. 岩石蠕变损伤非线性大变形分析及微观断裂的 FRACTAL 模型 [M]. 北京：中国矿业大学，1987.
[74] R Burrige，L Knopoff. Model and theoritical seismicity [J]. Bull Sei Soc Am，1967，57：341－371.
[75] Byerlee J. *Friction of rocks* [J]. *Pure APP. Geophys*，1978，116：615－626.
[76] Dieterich J H. Time dependent friction as a possible mechanism for after－shocks [J]. J Geophys Res，1972，77：3771－3781.
[77] Nussbaum J，Ruina A A. Two degree of freedom earthquake model with state/dynamics friction [J]. PAGEOPH，1987，125：629－656.
[78] Ruina. Slip Instability and State Variability Laws J [J]. Geophys Res，1983，88.
[79] 牛志仁，陈觉民. 单自由度弹性摩擦系统中的倍周期分岔和混沌现象 [J]. 中国地球物理学会年刊，1990.
[80] 何满潮. 煤矿软岩工程技术现状及展望 [J]. 中国煤炭，1999，25（8）：12－16，21，61.
[81] 中国煤炭学会. 世纪之交的煤炭科学技术 [J]. 煤炭学报，1997（增刊），35（4）：85－90.
[82] 钱鸣高. 采动岩石力学基本研究与展望 [J]. 岩土力学，1996（2）.
[83] 何满潮，等. 软岩巷道工程概论 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1993.
[84] 何满潮. 中国煤矿软岩巷道支护理论与实践 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1996.
[85] 何满潮. 岩土工程设计的新阶段——非线性大变形力学设计 [J]. 岩土工程界，1998（9）.
[86] 彭涛. 软岩工程的混沌力学过程及其控制研究 [M]. 北京：中国矿业大学，1996.
[87] 彭涛，何满潮. 煤矿软岩混沌力学特性的研究 [J]. 矿山压力与顶板管理，1997（1）：32－35，72.
[88] 谭云亮，周辉，王泳嘉，等. 模拟岩石声发射及混沌性的 PCA 模型 [J]. 中国有色金属学报，2002，12（4）：802－807.
[89] 毛留喜，陈怀亮，张雪芬. 玉米产量模拟中混沌测量的应用设计 [J]. 河南气象，1996(2)：23－25.

4 岩石力学中的分形特征

4.1 引言

1973 年，B. B. Mandelbrot 在法兰西学院讲课时，首次提出了分数维和分形几何的设想。分形（Fractal）一词，是曼德勃罗特创造出来的，其原意具有不规则、支离破碎等意义[1]，分形几何学是一门以非规则几何形态为研究对象的几何学。由于不规则现象在自然界是普遍存在的，因此分形几何又称为描述大自然的几何学。分形几何建立以后，很快就引起了许多学科的关注，这是由于它不仅在理论上，而且在实用上都具有重要价值。其主要特点有以下两方面。

（1）从整体上看，分形几何图形是处处不规则的。例如，海岸线和山川形状，从远距离观察，其形状是极不规则的。

（2）在不同尺度上，图形的规则性又是相同的。上述的海岸线和山川形状，从近距离观察，其局部形状又和整体形态相似，它们从整体到局部，都是自相似的。当然，也有一些分形几何图形，它们并不完全是自相似的。

分形理论诞生以后，在各个领域得到迅速发展和应用，如数学[2,3]、物理[4,5]、化学[6]、计算机[7,8]、水利[9,10]、土木[11]、化工[12]、生态[13]、大气[14]、地震[15,16]等领域。谢和平院士领导的课题组在分形岩石力学方面取得了具有里程碑意义的成果[17-20]，开创了我国分形岩石力学研究的新局面。主要体现在运用分形几何、非平衡统计力学和细观力学的方法，系统研究了岩石（体）的强度、变形、本构关系、损伤与断裂力学行为的分形性质及其与岩石自然结构性状和缺陷性态之间的关系；给出了分形空间中损伤力学量和力学定律的表述方法，建立了考虑结构微细观分形效应的岩石分形统计强度的一般表达式、分形损伤演化率和分形损伤本构关系模型，实现了岩石力学物理机制的分形研究上的突破；利用分形实验建立了岩石节理抗剪强度、剪切变形、周边应力场与位移场以及接触力学性质与节理面构形、粗糙性之间的定量关系；描述了岩石体渗流的分形特征，建立了岩石渗流力学性质的分形模型；研究和建立了裂隙岩体破断力学行为与节理构形之间的关系；利用分形方法和模型实验，得到了煤岩开采沉陷过程中岩体断层滑移、沉陷量与节理空间分布、粗糙度之间的定量关系。分形理论作为研究非线性复杂岩石动力学系统的一种有效方法，越来越得到广泛的应用。

4.2 分形基本概念及意义

4.2.1 分数维——由海岸线谈起

假如考虑海岸线的长度，先从将海岸线想象为如图 4－1 那样的直线（设它的长度 $L=$

1）开始，此时如用长度为 r 的尺子去量它，显然不管 r 的大小如何，量出来的长度总是1，即

$$L = r^0 \tag{4-1}$$

而前面提到的实际海岸线，不是直线而是弯弯曲曲的，其长度 L 就将随尺子 r 的减小而加长。图4-2是一种理想化的实际海岸线，对这种海岸线，若尺子 r 的长度为1/3，则量出的海岸线长度 $L=3/4$；若 $r=(1/3)^2=1/9$，则量出的长度 $L=16(1/3)^2=(4/3)^2=16/9$。

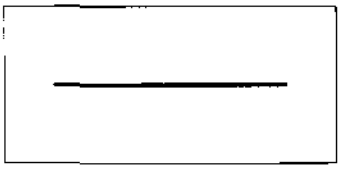


图4-1 海岸线为直线

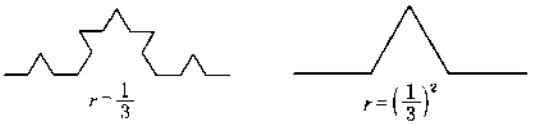


图4-2 按照1/3尺子量测

因此，一般来说，若用 $r=(1/3)^n$ 的尺子去量，所得的海岸线长度应该是

$$L=(4/3)^n \tag{4-2}$$

若设 L 和 r 关系为

$$L=r^{\mu}=N(r)\cdot r \tag{4-3}$$

式中 $N(r)$ 显然是用 r 去量度海岸线所得到的长度为 r 的段数。于是，注意到 $r=(1/3)^n$ 时的式（4-2），式（4-3）成为

$$(4/3)^n=[(1/3)^n]^{\mu}$$

取对数可求得

$$\mu=1-\frac{\log 4}{\log 3}=1-D \tag{4-4}$$

式中，$D=\dfrac{\log 4}{\log 3}=1.2618$，$D$ 被称为分数维。进一步，由式（4-3）可得到海岸线的长度和量测尺子 r 之间的关系：

$$L=r^{1-D} \tag{4-5}$$

对于分数维 D 的基本意义，可以做如下解释：

（1）在式（4-5）中，当 $D=1$ 时，式(4-5)就成为规整的直线情形了，即 $L=r^0=1$。当 D 为非整数且大于1时，在式（4-4）中，$D=1.2618$，有 $L=r^{-0.2618}$。由此可以看出，r 越小 L 就越大。

（2）按照欧几里德空间维数的基本定义来衡量分数维 D，从“线”的角度看，其维数应为1，但其又有弯弯曲曲，所以 D 的值比1大。当 $r\to 0$ 时，海岸线长度 $L\to\infty$，所以其又不是一般规整的“线”，似乎应该是“面”（因为二维的面可以看成是由无穷的线段组成），但其又还没充满整个平面，所以其维数又达不到2，于是海岸线的维数应满足 $1<D<2$。将式（4-3）、式（4-4）结合起来，有

$$N(r)=\frac{1}{r^D}\quad 或\quad D=\frac{\log N(r)}{\log\left(\dfrac{1}{r}\right)} \tag{4-6}$$

此式可以作为分数维 D 的定义。此式的意义可以理解为：用边长为 r 的小“立方”块去覆盖客体，量出的小立方块的最小个数是 $N(r)$。

可见，定义式（4－6）自然包括了规整的对象（线、面、体）。图4－3是规整的线、面、体。

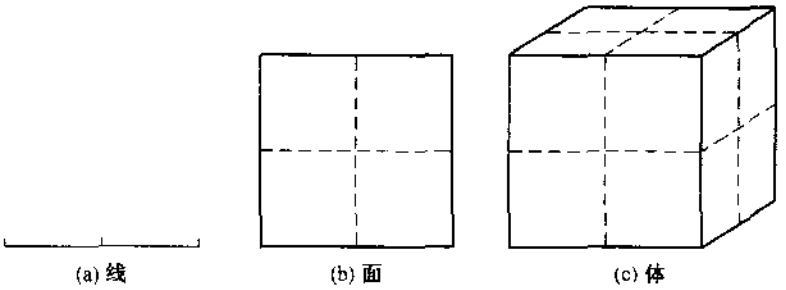


图4－3　欧氏空间中的规整体

若边长均取为1，则用 $r=\frac{1}{2}$ 的线（或小方块或小立方体）依次去量度，得到的 $N=2$，4，8。所以，按式（4－6）计算其分数维 D 为

$$D_{线}=\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)}=1;\quad D_{面}=\frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)}=2;\quad D_{体}=\frac{\log 8}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)}=3$$

4.2.2　分数维的其他定义

1. Hausdroff 维数

维数是几何对象的一个重要特征量，一个几何对象的维数等于确定其中一个点的位置所需要的独立坐标数目。按此定义的维数是人们所熟知的，通常称为拓扑维。显然，线的拓扑维是1，面的拓扑维是2，体的拓扑维是3。

Kolmogrov 曾给分数维下过定义：对 d 维空间的一个集合 E（吸引子），用直径为 Y 的小球去覆盖，如果完全覆盖所需的小球数是 $N(r)$（r 越小 N 越大），那么系统的容量维定义为

$$D_0=\frac{\lg N}{\lg\frac{1}{r}}\quad 或\quad D_0=-\lim_{r\to 0}\frac{\lg N}{\lg r}\tag{4-7}$$

式（4－7）所定义的容量维也称作分数维或 Hausdroff 维数，因为早在1919年 Hausdroff 就提出了类似的定义。

可以证明，拓扑维 d 与分数维 D_0 的关系为

$$d\leqslant D_0\tag{4-8}$$

其中的等号对应于普通规则的几何对象。对于分形来说：

$$d<D_0\tag{4-9}$$

对于定常运动，$D_0=0$；对于周期运动，$D_0=1$；对于准周期运动，$D_0=2$ 或 $D_0=3$；对于随机运动 $D_0\to\infty$；对于混沌运动，$D_0=$ 正的分数。但维数为分数的系统未必就是混

沌系统。

2. 信息维

1）Shannon 信息量

所谓的信息就是人们对一个事件惊奇程度的测量。不确定性越大的事件，给人们带来的惊奇程度越大，包含的信息越大。确定的事件，信息量为零。如果某信息台或信息报发布的信息内容天天一样，信息量也就减少为零了。对于抛硬币或投骰子，由于事件出现的概率越大，所蕴涵的信息量越少，因此前者所蕴涵的信息量要少于后者。

在热力学里，人们用 Boltzmann 熵：

$$S = K\lg N \tag{4-10}$$

来量度系统微观上的不确定性，这里的 N 表示系统可能的微观态数目，K 为 Boltzmann 常数。由于系统的不确定性为人们提供了或多或少的系统信息，因此 Boltzmann 熵是关于信息的最原始的物理量。

对于热力学微观态，若所有状态出现的概率均等，且为

$$p_i = \frac{1}{N}$$

则式（4-10）可改写为

$$S = -K\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\lg\frac{1}{N} = -K\sum_{i=1}^{N}p_i\lg p_i \tag{4-11}$$

Shannon 延伸了 Boltzmann 熵的物理意义，将等概率时间所蕴涵的信息量定义为

$$I_1 = -\sum p_i\lg p_i \tag{4-12}$$

式（4-12）所定义的就是 Shannon 信息量。事件出现的概率 p_i 越小，Shannon 信息量的绝对值越大，而对于确定的事件（$p=1$），其 Shannon 信息量为零。对于任意的线性系统，由于其未来的轨线将由初始条件唯一地确定，所以其 Shannon 信息量永远为零。与之相反，非线性系统则是信息源。

2）信息维

根据信息量的定义，并由式（4-10）可知，一个点处在误差为 r 间隔内的信息，其表达式为

$$I_1 \propto \lg\frac{1}{r} \tag{4-13}$$

$$I_1 = D_1\lim_{r\to 0}\lg\frac{1}{r}$$

$$D_1 = \lim_{r\to 0}\frac{I_1}{\lg\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0}\frac{-\sum_i p_i\lg p_i}{\lg\frac{1}{r}} \tag{4-14}$$

式中 D_1——信息维或 Renyi 维。

如果系统出现可能事件的概率是相等的，即 $p_i = \frac{1}{N}$，N 是所有可能出现的事件总数，那么

$$D_1 = \lim_{r\to 0}\frac{-\sum_i p_i\lg p_i}{\lg\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0}\frac{-\sum_i\frac{1}{N}\lg\frac{1}{N}}{\lg\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0}\frac{\lg N}{\lg\frac{1}{r}} = D_0$$

所以，分数维是信息维的特例。而拓扑维、信息维和分数维的关系为

$$d < D_1 \leqslant D_0 \tag{4-15}$$

3. 关联维数

定义时间序列中关联维数 D_2 为

$$D_2 = -\lim_{r \to 0} \frac{\ln C(r)}{\ln(r)} \tag{4-16}$$

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \sum H(r - |y_i - y_j|) \tag{4-17}$$

y_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 是系统的一个解序列。设有 $y_i = (x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-m})$，则 $C(r)$ 为距离 (y_i, y_j) 小于 r 的“点对”在总点对中所占的比例数，$C(r)$ 可在 $[0, 1]$ 区间内取值。

$$H(r - |y_i - y_j|) = \begin{cases} 1 (r - |y_i - y_j| \geqslant 0) \\ 0 (r - |y_i - y_j| < 0) \end{cases} \tag{4-18}$$

关于从时间序列中计算关联维数的计算方法将在以后章节中讲述。

4. 模糊分数维

由冯德益等[21]提出模糊分数维方法，主要基于模糊自相似概念，模糊自相似可以分为有序和无序两类。其主要区别在于将分细后小图像（结构）与原来的图像（结构）作对比时，大、小图像内部的元素是否还要按一定顺序排列。若按顺序排列后再来考虑其相像的程度，则得出的是有序模糊自相似的程度或从属度，否则得出无序的模糊自相似程度或从属度，二者可分别用 μ_s 和 μ_{s0} 来表示。无序的模糊自相似结构（相像）可用模糊分数维理论来描述。

若把原标度定为 1，新标度定为 r，则 $l = 1/r$ 可称为自相似比；再假定 μ_i 为第 i 个小图像和以 r 为标度构成的单位标度图像“相像”的程度，即模糊自相似的从属度，则人们可以把 $\ln C = \ln \sum \mu_i$ 与 $\ln r$ 之间的线性相关系数 μ_s 定义为整个复杂机构（现象）的模糊自相似从属函数，具体计算公式为

$$\mu_s = \frac{\sum \ln r_j \ln C_j - (1/n) \sum \ln r_j \sum \ln C_j}{\left\{ \left[\sum (\ln r_j)^2 - (1/n) \left(\sum \ln r_j \right)^2 \right] \left[\sum (\ln C_j)^2 - (1/n) \left(\sum \ln C_j \right)^2 \right] \right\}^{1/2}} \tag{4-19}$$

式中，$\sum$ 表示从 $j = 1$ 到 $j = n$ 求和。

在无序的情况下，$\ln \tilde{C}$ 与 $\ln r$ 若近似呈线性关系，则其斜率即为模糊分数维 $\tilde{D}$，对应的直线关系为

$$\ln \tilde{C} = -\tilde{D} \ln r + \ln b \tag{4-20}$$

或

$$\tilde{D} = -\ln C / \ln r \tag{4-21}$$

于是可以看出，模糊自相似性从属函数 μ_s 与模糊分数维 $\tilde{D}$ 是两个独立的参量。前者通过点 $(\ln C_j, \ln r_j)$ 相对于平均直线的离散度来描述复杂结构（现象）的“自相似”（自相像）程度，而后者则通过该平均直线的斜率来表示复杂结构（现象）的模糊分数维 $\tilde{D}$。

4.2.3 分数维—复杂性量度

分形是自然界中的一类复杂几何形体，其分数维 D 的数值无论从理论上还是从实际上对研究复杂现象都有着重要意义。图 4－4 所示为三种人造的海岸线，它们的形式一个比一个复杂。

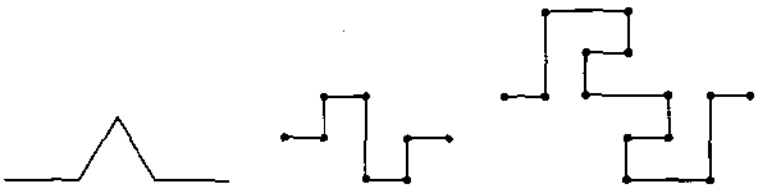


图 4－4　海岸线三种尺子分数维计算

在图 4－4 上，三种海岸线起点与终点间直线距离均为 1。于是计算出的分数维分别是

$$D_a = \frac{\lg 4}{\lg 3} = 1.2618$$

$$D_b = \frac{\lg 8}{\lg 4} = 1.5$$

$$D_c = \frac{\lg 18}{\lg 6} = 1.613$$

显然 $D_a < D_b < D_c$。可以看出图 4－4a ~ 图 4－4c 中的海岸线一个比一个复杂，即弯弯曲曲的程度一个比一个大。所以说分数维 D 的大小是复杂程度的一个量度。尽管分形对象是复杂的，但仍可找到一个不变测度——分数维。

4.2.4 标度不变性

分形的基本属性是自相似性。即一个分形现象，若把尺子 r（可以是空间尺度也可以是时间尺度）变换成 ξr，其自相似结构特征不会改变，只不过是原来的放大或缩小，则 ξ 称为标度因子，这种尺度变换的不变性称为标度不变性。标度不变性对分形来说是一种普适的规律，即对于任何分形现象来说，都满足：

$$N(\xi r) = \frac{1}{(\xi r)^D} = \xi^{-D} N(r) \tag{4-22}$$

这表明当尺度由 r 变成 ξr 后，$N(r)$ 乘以 ξ^{-D} 即变成 $N(\xi r)$。就海岸线的长度来讲，由式（4－5）有

$$L(\xi r) = \xi^{1-D} L(r) \tag{4-23}$$

若注意到式（4－3）、式（4－4），则式（4－23）可写成

$$L(\xi r) = \xi^{\mu} L(r) \tag{4-24}$$

这里 $\mu = 1 - D$ 可称为标度指数。式（4－3）反映了标度变换的一种普适规律，即 $L(r)$ 是普适函数。在前面看到 $L(r) = r^{\mu}$，那时是以改变 r 来变换尺子的大小，现在是通过改变 $\xi\lambda$ 来实现尺度变换。$\xi < 1$ 表示缩小尺子，而 $\xi > 1$ 表示尺子放大。式（4－24）表示把尺子 r 测量的分形长度 $L(r)$ 再缩小（或放大）λ^{μ} 倍就和用缩小（或放大）了的尺子

$\xi\lambda r$测量的长度相等。最重要的是这种关系具有普适性，究竟普适到什么程度是由标度指数μ（$0<\mu<1$）来分类的。具有相同μ的分形属于同一普适类，由于$\mu=1-D$，因而同一普适类的分形也具有相同的分数维D。

一般而言，可以把标度律写成

$$f(\xi r)=\xi^{\mu}f(r) \tag{4-25}$$

4.3 不同尺度岩石裂纹分布盒维数分析

4.3.1 岩石裂纹分布的盒维数估算方法

设A是n维欧氏空间的任意非空的有界子集，对每一个满足$r>0$的情形，$N(A, r)$表示覆盖子集A，半径为r的最小闭球数，若极限$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\ln N(A, r)}{\ln\dfrac{1}{r}}$存在，则称其为$A$的盒维数$D$。盒维数的这种形式很实用，因为上述定义中的闭球可以用线段、正方形和立方体等替代。

为求盒维数人们采用有限个边长不等的正方形来覆盖有限子集，通过计算$\ln r$、$\ln N(A, r)$所建立的曲线斜率来计算盒维数。

建立x、y与$\ln r$、$\ln N(A, r)$的对应关系，据盒维数的估计原则，有

$$y_i=Dx_i+C \tag{4-26}$$

式中 D——盒维数；

C——待定系数，$i=1, 2, 3, \cdots, m$（m为计算点数）。

构造误差的平方和函数：

$$f(D,C)=\sum_{i=1}^{m}(y_i-Dx_i-C)^2 \tag{4-27}$$

对式（4-27）中误差函数求极小值，即对D、C求偏导数并令其为零，此时对应的f值为最小：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial D}=2\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-Dx_i-C)(-x_i)=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial C}=2\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-Dx_i-C)(-1)=0\end{cases} \tag{4-28}$$

解得盒维数为

$$D=\frac{m\sum\limits_{i=1}^{m}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\sum\limits_{i=1}^{m}y_i}{m\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{4-29}$$

对这一过程，采用C语言进行编程，由计算机进行计算，可以直接得出盒维数的值。其程序清单如下：

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
```

```
#define n 4
main( )
{
  int i;
  float x[n],y[n],a,b,c,d,z;
  for(i=0;i<n;i++)
  {
    printf("please input the x[%d]:",i+1);
    scanf("%f",&x[i]);
    x[i]=log10(x[i]);
    printf("the x[%d]is:%f",i+1,x[i]);
    printf("please input the y[%d]:",i+1);
    scanf("%f",&y[i]);
    y[i]=log10(y[i]);
    printf("the y[%d]is:%f",i+1,y[i]);
  }

  a=0;
  b=0;
  c=0;
  d=0;

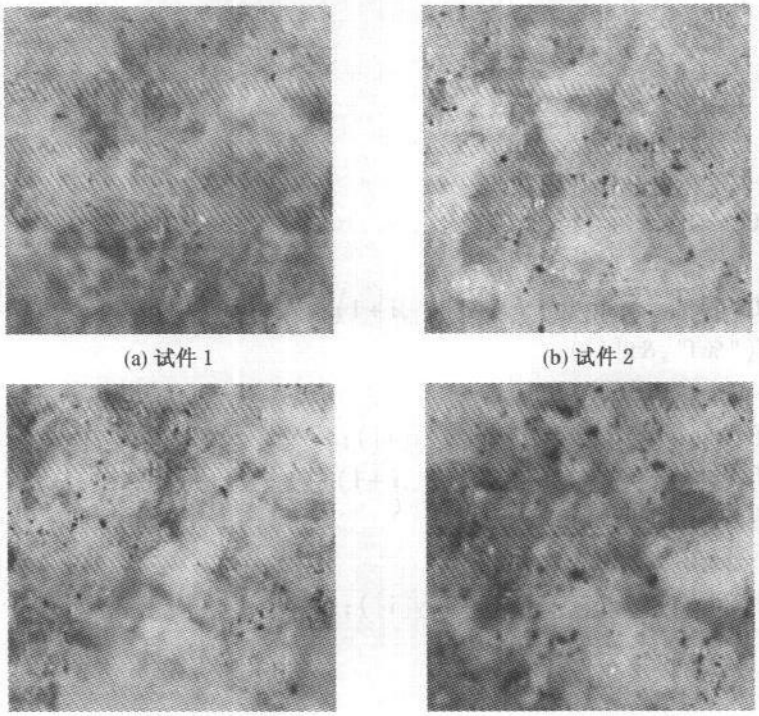
  for(i=0;i<n;i++)
  {
    a=a+x[i]*y[i];
    b=b+x[i];
    c=c+y[i];
    d=d+x[i]*x[i];
  }
  printf("a:%f b:%f c:%f d:%f",a,b,c,d);
  z=(n*a-b*c)/(n*d-b*b);
  printf("the rezult is %f",z);
}
```

4.3.2 砂岩细观裂纹分数维特征

1. 岩石断面细观裂纹图

从兖矿集团兴隆庄煤矿7采区皮带巷1号联络巷掘进迎头取岩样，用切割机、磨片机把岩样制成直径约为4cm、厚度为0.8cm的圆片，并在电子显微镜下放大100倍，典型的图片如图4-5所示。

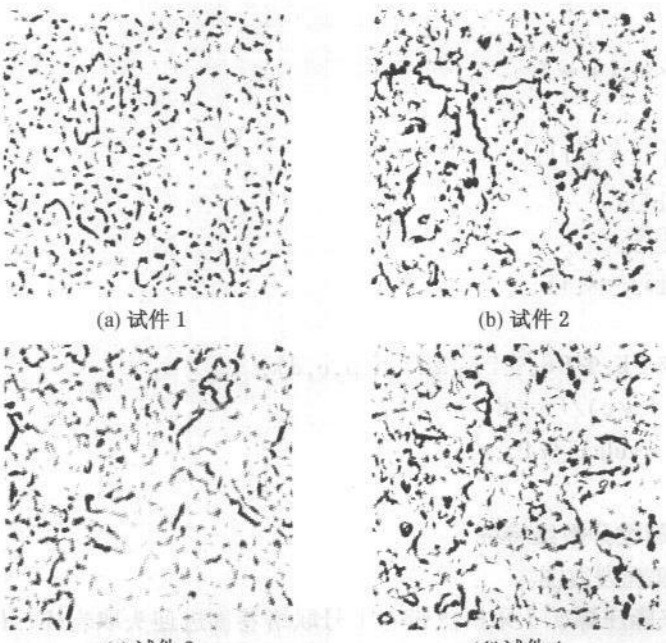
2. 岩石细观裂纹图的处理



(a) 试件 1　(b) 试件 2

(c) 试件 3　(d) 试件 4

图 4-5　岩石内部细观裂纹电子扫描图



(a) 试件 1　(b) 试件 2

(c) 试件 3　(d) 试件 4

图 4-6　岩石内部细观裂纹提取图

利用 Photoshop 的滤镜对电子扫描图片进行处理，通过“Poster Edges”等滤镜，将细观裂纹分离开来。以图 4－5 所示的断面细观裂纹为例，可得到图 4－6 所示的由计算机自动识别计算的图片。

3. 细观裂纹分布分数维的计算过程

用各种大小的方格覆盖岩石细观裂纹，然后数出方格的数目，输入程序中进行运算得分数维。覆盖网格以及数网格数目可由 AutoCAD 中的命令完成。图 4－7a～图 4－7d 所示为不同 r 值时覆盖裂纹所用的网格数 N。图 4－7～图 4－10 是计算机进行分数维计算的网格图。

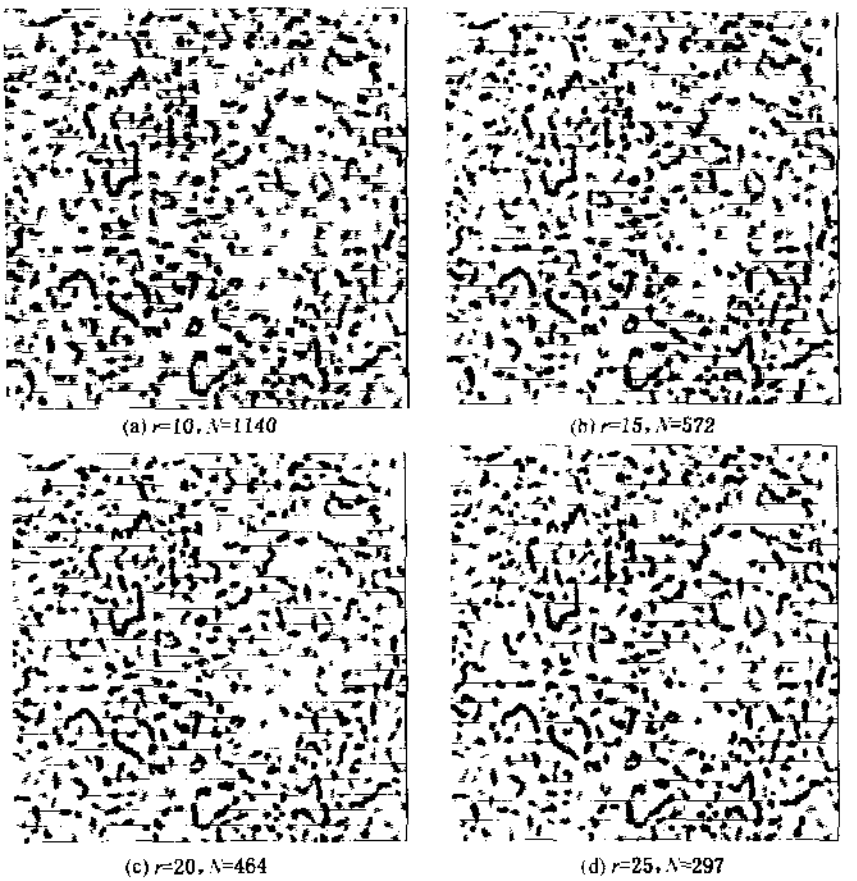
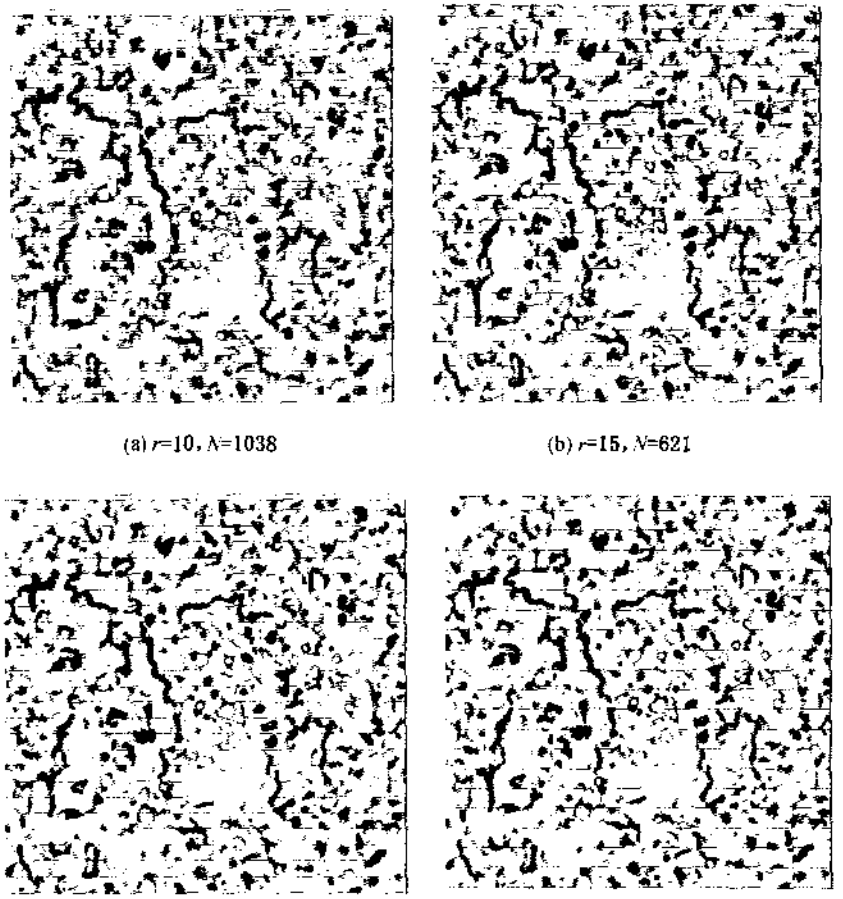


图 4－7　网格图

以试件 1 为例可以得到不同 r 与 N 的关系，如图 4－11、图 4－12 所示。

由图 4－12 可以看出，$\log N$ 与 $\log r$ 呈现明显的直线关系，说明岩石细观裂纹具有统计自相似性。其分数维为 1.400316。表 4－1 给出了 4 个试样细观裂纹分数维的计算结果。

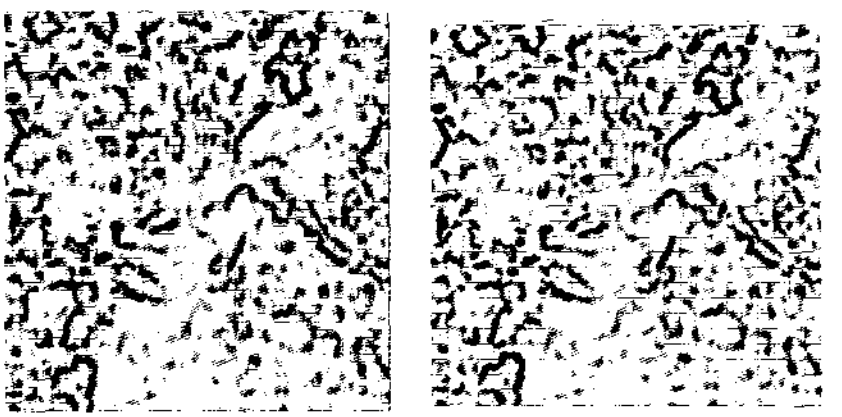
从表 4－1 中可以看出，该区域砂岩分数维为 1.4～1.517，具有典型的分形特征。利用电镜扫描、图片处理、网格覆盖、程序计算 4 步对盒维数进行了求解，实现了细观岩石裂纹分数维计算的自动化，在求解过程中得出了细观裂纹同宏观断裂、微观裂隙一样都具有统计自相似性。本方法减少了人工操作时的误差，大大减少了工作量，是描述岩石细观裂纹的简便可行的办法，具有重要的推广应用价值。



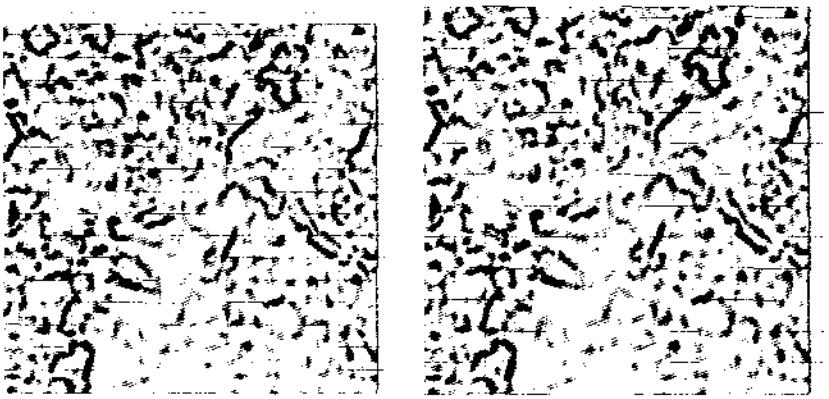
(a) r=10, N=1038　　(b) r=15, N=621

(c) r=20, N=384　　(d) r=25, N=258

图 4－8　试件 1 网格图

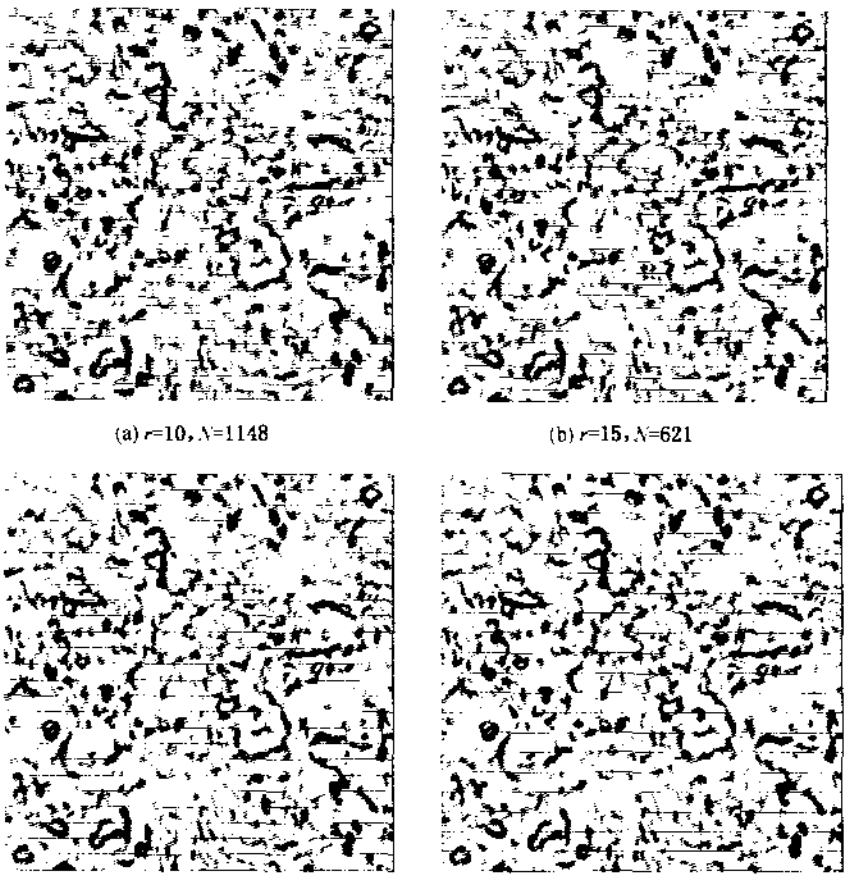


(a) r=10, N=784　　(b) r=20, N=332



(c) r=30, N=193　　(d) r=40, N=86

图 4－9　试件 2 网格图



(a) r=10, N=1148　　(b) r=15, N=621

(c) r=20, N=416　　(d) r=25, N=300

图 4－10　试件 3 网格图

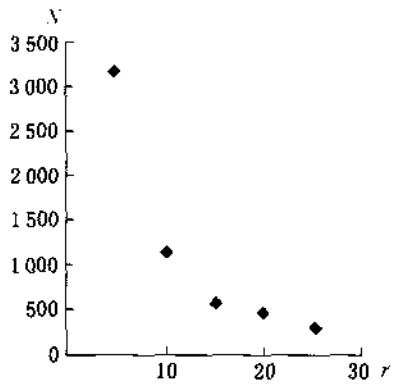


图 4-11 r 与 N 的散点图

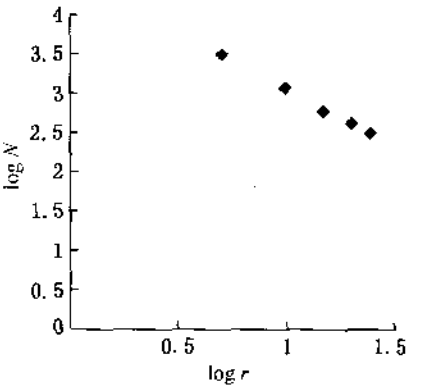


图 4-12 r 与 N 的对数曲线图

表 4-1 岩石与岩体分数维

裂隙图	试样 1	试样 2	试样 3	试样 4	掘进迎头
分数维	1.4003	1.5170	1.5119	1.4503	1.1691
平均分数维			1.4742		1.1691

4.3.3 掘进迎头岩体宏观裂隙分数维特征

首先对兴隆庄煤矿 7 采区皮带巷 1 号联络巷掘进迎头的宏观裂隙进行人工素描，如图 4-13 所示，然后采用上述网格覆盖的方法，进行盒维数统计计算，如图 4-14 所示。

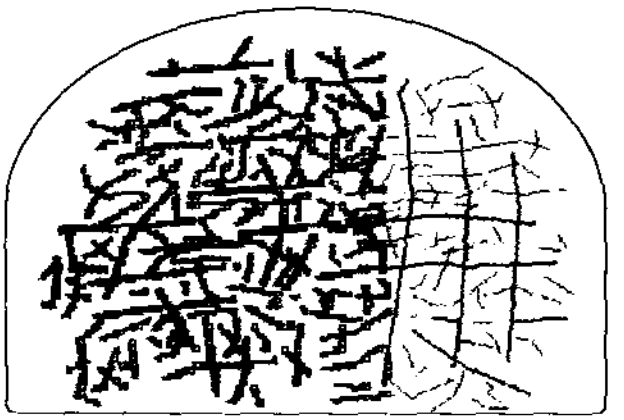
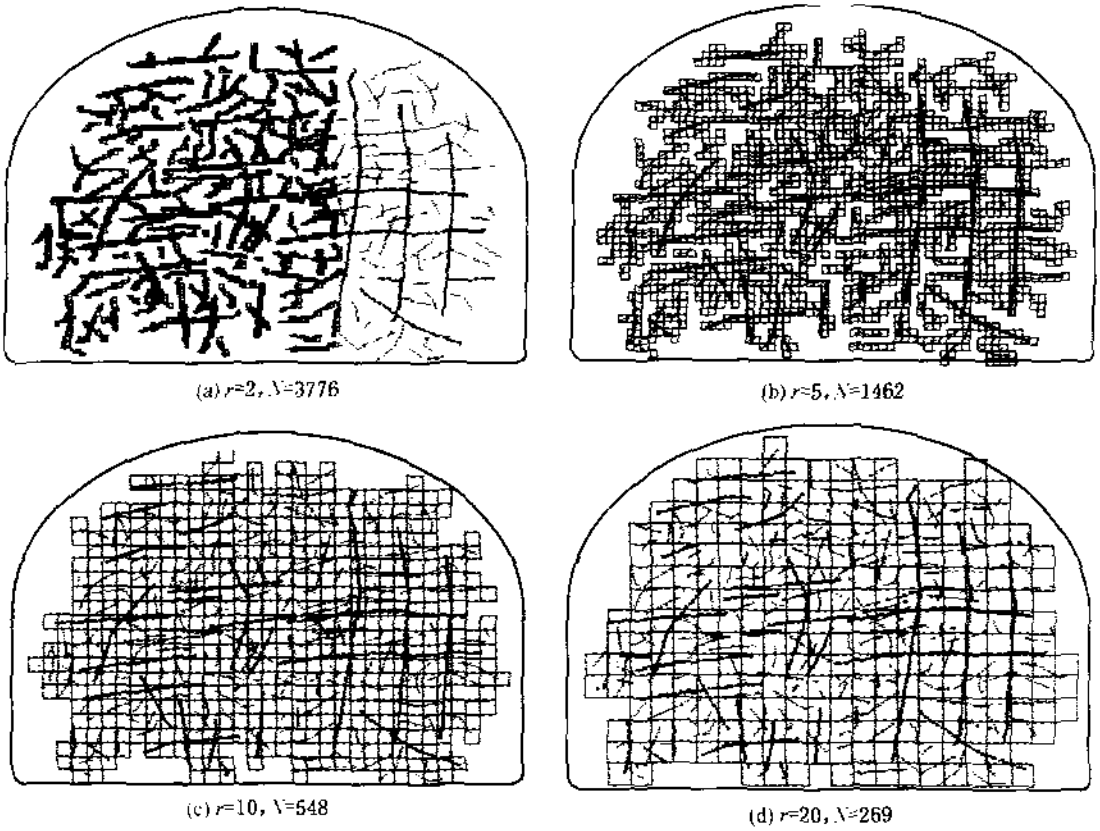


图 4-13 掘进迎头宏观裂隙素描图

经计算表明，该掘进迎头宏观裂隙分布的盒维数为 $D=1.169$。

通过以上计算可知，岩石在细观裂纹和宏观裂隙分布上具有典型的分数维特征。而且岩石细观裂纹分布更为复杂，平均分数维为 1.474，而在宏观尺度上，裂隙的分布复杂性将明显降低，兴隆庄煤矿 7 采区皮带巷 1 号联络巷掘进迎头宏观裂隙分布的分数维为 1.169。



(a) r=2, N=3776　(b) r=5, N=1462

(c) r=10, N=548　(d) r=20, N=269

图 4-14　巷道掘进迎头分数维网格图

从力学机理上讲，岩石细观裂纹的扩展、成核将导致宏观裂纹的产生，但在裂纹分布形态上，复杂程度将有很大差异，不能简单地把岩石细观破坏机理拓展到宏观层上。如何架起岩石细观破坏、演化和岩石宏观破坏灾变之间的桥梁是值得进一步深入探讨的问题。

4.4　岩石断裂和破碎的分形特征[17,24,25]

从 20 世纪 80 年代起，谢和平院士领导的课题组引进分形几何描述岩石微结构的不规则性，系统地研究了岩石微观断裂机制、裂纹分形扩展、岩石分形节理力学、岩石分形统计强度理论、分形损伤与分形破碎等一系列岩石力学关键问题。

4.4.1　岩石微观断裂

经典断裂力学的一个根本假设是将岩石断裂轨迹视为直线型平面模型，而现场实测和实验观测均表明，无论在晶粒尺度上还是在断层尺度上，岩石的断裂面都是非常不规则和粗糙的，难以用一个平直面来近似模拟。同时岩体中的断裂路径总是弯弯曲曲的，而且还包含着断裂分叉，这种弯曲和分叉还可以相互嵌套，因此要真实刻画岩石断裂的性态，需要解决两个问题：一是岩石中裂纹扩展轨迹的不规则程度在数学上如何定量描述；二是这种不规则性对岩石宏观断裂力学性能产生什么样的影响。为此，首先要研究岩石微结构的特征。

在断裂力学中，为了探讨材料的断裂性能，Griffith 和 Irwin 提出了著名的裂纹临界扩

展力准则，裂纹临界扩展力定义为

$$G_{crit}=2E_s \tag{4-30}$$

式中 E_s——单位宏观量度断裂面积的表面能。

这里裂纹被假设是沿直线路径扩展的。但是对于岩石断裂，用式（4-30）计算临界扩展力是相当粗糙的。大量的扫描电镜实验和断口分析表明，岩石是一种粗晶粒的多相结晶材料，岩石微结构中包含大量裂隙和孔洞，同时又含有夹杂、沉淀、弱面等其他缺陷，岩石的断裂，既有微裂纹的成核与扩展，也有微孔洞的汇合与贯通。岩石中的裂纹总是以Y形或Z字形向前扩展图4-15所示，其真实的断裂面积 $A_{实}$ 要大于表观平直断裂面积 $A_{表}$，对于单位厚度断裂面积可以认为

$$A_{实}=[L(r)/L_0(r)]A_{表} \tag{4-31}$$

式中 $L_0(r)$——裂纹轨道的表观长度；

$L(r)$——不规则路径长度；

r——测量码尺（如图4-15所示）。

因此，裂纹临界扩展力应推广为

$$G_{crit}=2[L(r)/L_0(r)]E_s \tag{4-32}$$

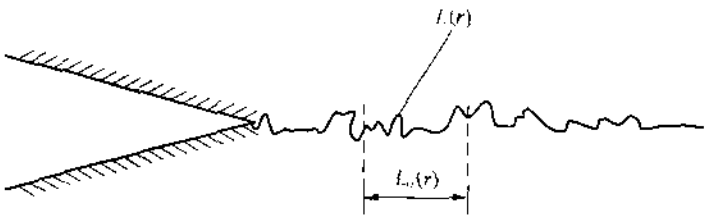


图4-15 岩石裂纹扩展的分形模型

根据分形曲线长度估计[26]：

$$L(r)=L_0^D r^{(1-D)} \tag{4-33}$$

式中 L_0^D——裂纹路径的直线长度；

D——不规则扩展路径的分数维。

取量度码尺为晶粒尺寸 l，则式（4-32）可表示为

$$G_{crit}=2E_s r^{(1-D)} \tag{4-34}$$

可近似地选择 $r\approx R$，R 是自相似比。这样式（4-34）可近似表示为

$$G_{crit}=2E_s\left(\frac{1}{R}\right)^{(D-1)} \tag{4-35}$$

根据岩石断口形貌分析，通常可以将岩石微观断裂分为穿晶断裂、沿晶断裂以及沿晶穿晶耦合断裂三种形式。这几种断裂形式的裂纹扩展均是不规则的，且可以考虑为统计自相似的，所以可以用分形来模拟。

1. 岩石沿晶断裂的分形模型

对于岩石类材料，晶粒间黏结力低于晶粒本身强度，使得岩石材料易于发生沿晶脆性断裂，如图 4－16 所示。沿晶断裂有两种类型，根据分数维的基本定义有

图 4－16a 中：$N=2$，$R=\dfrac{1}{1.732}$，$D=\dfrac{\ln 2}{\ln 1.732}=1.26$

图 4－16b 中：$N=4$，$R=\dfrac{1}{3}$，$D=\dfrac{\ln 4}{\ln 3}=1.26$

相应的裂纹临界扩展力可按式（4－35）计算：

图 4－16a 中：$G_{crit}\approx 1.732^{0.26}\times 2E_s\approx 1.15\times E_s$

图 4－16b 中：$G_{crit}\approx 3^{0.26}\times 2E_s=1.33\times E_s$

可见，图 4－16a 所示的沿晶断裂模式较图 4－16b 所示的沿晶断裂模式耗散能量小、容易发生。

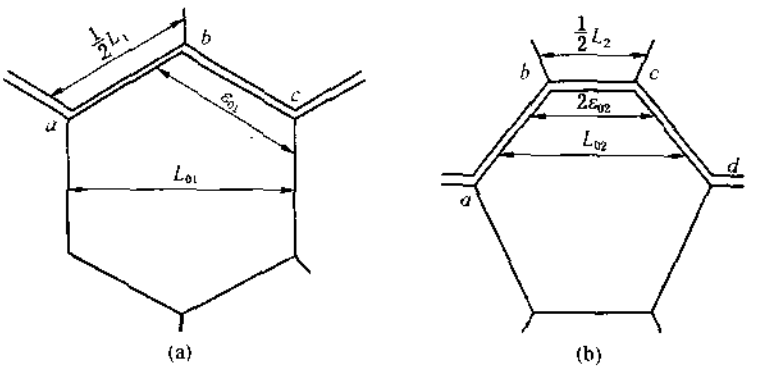


图 4－16　沿晶断裂的分形模型

2. 岩石穿晶断裂的分形模型

穿晶断裂是晶体材料中最脆的一种断裂形式，穿晶断裂系原子键的简单破裂而沿结晶面直接拉开，因此，断裂表面经常出现台阶状、不规则纹路和河流状花样，它们的主要特征是在一个结晶平面上形成一个节理裂纹的相对不平面。

穿晶断裂分形模型如图 4－17 所示，可得

$$N=3,\quad R=\frac{1}{2.236},\quad D=\frac{\ln 3}{\ln 2.236}=1.365$$

裂纹临界扩展力同样可按式（4－35）计算，得

$$G_{crit}=2.236^{0.365}\times 2E_s=1.34\times 2E_s \tag{4-36}$$

式（4－36）表明，岩石的穿晶断裂比任何一种沿晶断裂均要耗散更多的能量。

3. 岩石沿晶穿晶耦合断裂的分形模型

在任何一个岩石断口上，总能找到沿晶断裂和穿晶断裂两种断裂形态，因为岩石内部晶粒的微孔隙、微裂纹、夹杂等可引起局部应力集中而导致穿晶断裂，一般情况会沿晶断裂（因耗散较少的能量）。所以，岩石断裂表面一般多是沿晶与穿晶断裂的耦合体，沿晶穿晶耦合断裂的分形模型如图 4－18 所示。

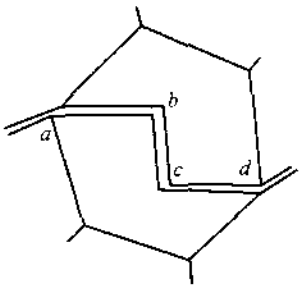


图4-17 穿晶断裂的分形模型

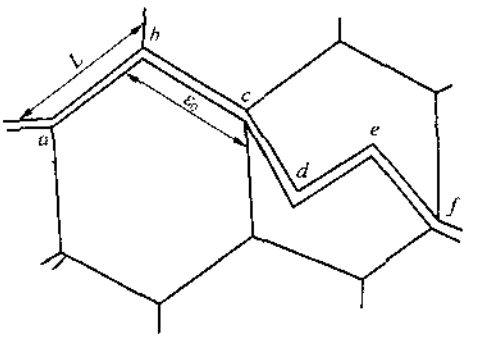


图4-18 沿晶穿晶耦合断裂的分形模型

由图4-18可得

$$N=5,\ R=\frac{1}{3.605},\ D=\frac{\ln 5}{\ln 3.605}=1.255$$

其相应的裂纹临界扩展力根据式（4-34）计算，有

$$G_{crit}=3.605^{0.255}\times 2E_s=1.38\times 2E_s$$

将以上结果和相应实测值列于表4-2中，可以看出，分析结果与实测值基本相符，并且同一晶粒尺寸下的脆性断裂最容易出现的形式是沿晶断裂和沿晶穿晶耦合断裂。虽然这一现象人们已经定性了解了很多年，但是只有使用分形的概念，才能给出定量的解释。

表4-2 不同脆断形式下的分数维和 G_{crit} 值

断裂方式	分数维 D 分析值	大理岩直拉断口 D 测定值	晶粒尺寸均为 10^{-2}cm 时的 G_{crit} 值	对同一 γ 值的材料断裂发生的可能性程度
沿晶（a）	1.26	1.18	$3.31\times 2\gamma_s$	容易
沿晶（b）	1.26	1.18	$3.31\times 2\gamma_s$	容易
穿晶	1.365	1.31	$5.37\times 2\gamma_s$	难
沿晶穿晶耦合	1.255	1.29	$3.24\times 2\gamma_s$	容易

4.4.2 破碎块度分形分析[24]

岩石宏观破碎是其内部缺陷不断萌生发育、扩展、聚集和贯通的最终结果，这个从细观损伤发展到宏观破碎的过程是能量耗散过程，并具有分形性质。无论是结构演化的几何特征，还是其力学量或物理量演变的数字特征，均表现出较好的统计自相似性，如微结构断裂模式、裂纹密度、断裂韧性、断裂表面形貌等。实验观察表明，材料的宏观破碎是由小破裂群体集中而形成的，小破裂又是由更小的裂隙演化和集聚而来的。这种自相似性的行为必然导致破碎后碎块块度和能量耗散也具有自相似的特征。目前人们已广泛应用分形来模拟和描述材料破碎的自相似性。

岩石块度分布的分形性可以从两方面去理解，一方面实验证明，破碎过程与岩块形状具有自相似性，碎块尺度分布具有幂律特征，是统计意义上的分形；另一方面，岩石微结构分析表明，岩石细观结构中孔洞、裂隙为分形分布，而碎块是裂隙扩展的直接结果，因

此，分形孔隙岩石结构导致分形破碎块度分布具有内在的、必然的联系。

令 r 为岩块的特征尺度，N 为特征尺度大于等于 r 的岩块数目，假设块度分布是分形分布，则按尺度－频率关系有

$$N = N_0 (r/r_{max})^{-D} \tag{4-37}$$

式中 N_0——具有最大特征尺度 r_{max} 的碎块数；

D——块度分布分数维。

设碎块的质量－频率关系为

$$N = N_0 (M/M_{max})^{-b} \tag{4-38}$$

式中 M——碎块质量；

N——质量大于等于 M 的碎块数；

N_0——具有最大质量 M_{max} 的碎块数；

b——质量－频率分布指数。

注意到质量与块度尺寸的相关性：$M \propto r^3$，得

$$D = 3b \tag{4-39}$$

由 Weibull 分布得

$$M(r)'/M_T = 1 - \exp[-(r/\sigma)^{\alpha}] \tag{4-40}$$

式中 $M(r)'$——直径小于 R 的碎块累积质量；

M_T——总质量；

σ——与平均尺寸相关的量。

如果 $r/\sigma < 1$，则式（4－40）可表示为幂律关系：

$$M(r)'/M_T = (r/\sigma)^{\alpha} \tag{4-41}$$

从而得

$$D = 3 - \alpha \tag{4-42}$$

因此人们只要能测定质量－频率分布指数 α 或 b，就可以计算出块度分布分数维。图 4－19 给出了几个岩样单轴压缩破坏实验的块度分布数据，从结果可以看出，$\log N$ 与 $\log(M_{max}/M)$ 呈线性正比关系，这说明岩样破碎后的块度分布具有很好的自相似性，是一个分形分布。在实验中人们发现，分数维大的试件，碎块多，体积小，破碎程度高；分数维小的试件，碎块少，体积大，破碎程度较低。因此块度分布分数维直观地定量反映了岩石破碎的程度。

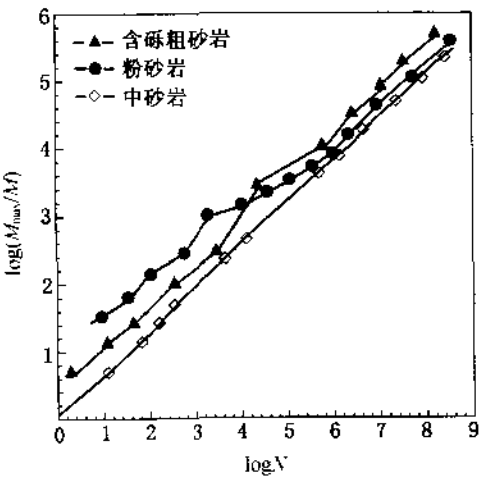


图 4－19 岩样破坏实验的块度分布

为了验证岩石块度分数维是否体现了岩石的破碎程度，可以从理论上对构造分形破碎模型进行分析。

令试件（岩样）为零级碎元，假设材料破碎过程是严格自相似的，即各

级碎元均以破坏概率 P_c 破碎为几个子碎元，且相邻级碎元尺度的相似比是 r，则 k 级碎元碎块总数为

$$N_k = (1-P_c)n[1 + nP_c + (nP_c)^2 + \cdots + (nP_c)^{k-1}] \tag{4-43}$$

对（$k+1$）级碎元，其碎块总数为

$$N_{k+1} = (1-P_c)n[1 + nP_c + (nP_c)^2 + \cdots + (nP_c)^{k}] \tag{4-44}$$

由于假设了构造的破碎过程是严格自相似的，因此由分形的基本定义可得

$$\frac{N_{k-1}}{N_k} = \left(\frac{1}{r'}\right)^D \tag{4-45}$$

由于 $k \gg 1$，且假定 $nP_c > 1$，因此可得

$$D = \log(nP_c)/\log(1/r') \tag{4-46}$$

由式（4-44）可知，块度分布的分数维，不仅与破坏概率 P_c 有关，也与每级碎元产生的子碎元数有关，它是岩石破碎程度恰当的量度。

对于规则形状碎元，有

$$(1/r')^d = n \tag{4-47}$$

结合式（4-46）和式（4-47）得

$$D = d - \log P_c/\log r' \tag{4-48}$$

式中 d——碎块所属空间的欧几里德维数，取 3；

r'——相邻碎元尺度相似比，$r' < 1$。

一般地，块度分布的分数维 $0 \leqslant D \leqslant 3$。当 $P_c = 0.5$ 时，为破碎和未破碎体积相等时的临界状态，此时：

$$D_c = d - \log 2/\log(1/r') \tag{4-49}$$

这里 D_c 称为临界破碎分数维，可见：

$$\begin{cases} D > D_c \text{ 时，岩石易破碎} \\ D < D_c \text{ 时，岩石不易破碎} \end{cases} \tag{4-50}$$

由此可以看出，块度分布的分数维与岩石细观结构、加载方式以及试样形状尺寸等密切相关，是这些因素的综合反映。与通常衡量破碎程度的量度即块率（单位体积的碎块数）相比，分数维 D 不仅表征了材料的破碎程度，而且还包含了更丰富的物理内涵。

4.5 时间序列分数维计算的若干问题

分数维是反映耗散系统奇怪吸引子的结构或是描述该吸引子演化所必需的状态变量的最小数目。当动力系统的数学描述已给出的话，那么变量数目已知，而且可以利用前面所讲的方法及有关规律，去求出吸引子的分数维[30,31]。但是，实际上人们能利用的往往是经过长时间观测或测量所积累得到的时间序列资料。这个单变量的时间序列是十分宝贵的，它蕴涵了系统的各种信息。从该时间序列中找出反映序列吸引子的结构或求出其分数维，是十分重要的。

4.5.1 重构相空间

单变量的时间序列原则上讲是物理系统中各种要素相互作用的结果，因此它应该包含该动力系统的信息。

对一个 n 维动力系统，有

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ \cdots\cdots\\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{cases} \tag{4-51}$$

因此 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就是该系统状态空间的坐标。

将式（4-51）微商化成为 n 阶的微分方程，有

$$x_1^{(n)} = f\left[x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)}\right] \tag{4-52}$$

此时状态空间的坐标就由 $[x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)}]$ 或 $[x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \cdots, x_1^{(n)}]$ 来代替，这种代替并不损失该动力系统演化的信息。

1981 年法国科学家 Ruelle[46] 提出用离散的时间序列 $x(t)$ 和其连续漂移 $x(t+\tau)$，$x(t+2\tau)$，$\cdots$，$x[t+(n-1)\tau]$ 来代替式（4-51），式（4-52）中的连续变数，其中 τ 称延滞系数（显然这种漂移运算就类似于连续变数的微分）。

例如一个单变量的时间序列，为

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots) \tag{4-53}$$

若该序列的时间间隔为 Δt，取 τ 为 Δt 的整数倍，则当 $\tau = \Delta t$ 时，有

$$\begin{cases}(x_0, x_1, x_2)\\ (x_1, x_2, x_3)\\ \cdots\cdots\\ (x_{N-1}, x_N, x_{N+1})\end{cases} \tag{4-54}$$

从而形成了三维空间中的 N 个点。

当 $\tau = 2\Delta t$ 时，有

$$\begin{cases}(x_0, x_2, x_4)\\ (x_1, x_3, x_5)\\ \cdots\cdots\\ (x_{N-1}, x_{N+1}, x_{N+3})\end{cases}$$

形成延滞时间为 $\tau = 2\Delta t$ 的三维空间的 N 个点。

据此，可以将时间序列 $\{x_j\}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 延拓成 m 维相空间的一个相型分布：

$$\begin{array}{cccccc}
x(t_1) & x(t_2) & \cdots & x(t_j) & \cdots & x[t_n-(m-1)\tau]\\
x(t_1+\tau) & x(t_2+\tau) & \cdots & x(t_j+\tau) & \cdots & x[t_n-(m-2)\tau]\\
x(t_1+2\tau) & x(t_2+2\tau) & \cdots & x(t_j+2\tau) & \cdots & x[t_n-(m-3)\tau]\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
x[t_1+(m-1)\tau] & x[t_2+(m-1)\tau] & \cdots & x[t_j+(m-1)\tau] & \cdots & x(t_n)\\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
X(t_1) & X(t_2) & \cdots & X(t_j) & \cdots & X[t_n-(m-1)\tau]
\end{array} \tag{4-55}$$

这里的 $\tau = k\Delta t$ $(k=1, 2, \cdots)$ 称延滞时间。排列式（4-55）中的每一列构成 m 维相空间中的一个相点，任一相点有 m 个分量：

$$\{x(t_j), x(t_j+\tau), x(t_j+2\tau), \cdots, x[t_j+(m-1)\tau]\}$$

这样的 $n'=n-(m-1)\tau$ 个相点 $\{X(t_j)\}$，$(j=1, 2, \cdots, n')$，在 m 维相空间里构成一个相型，而相空间的连线描述了系统在 m 维相空间中的演化轨线（迹）。当然，为了保证上述各个坐标分量之间的线性独立性，只要 τ 值取足够大即可。

若嵌入相空间代替了状态空间，则 N 个点就形成了该 n 维嵌入相空间的轨道，如图 4-20 所示。

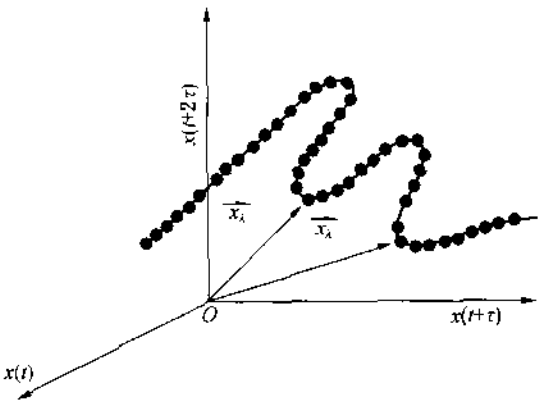


图 4-20　n 维嵌入相空间的轨道

4.5.2　Takens 嵌入定理及讨论

1. Takens 嵌入定理

在时间序列重建相空间的过程中，为了保证该相空间容纳该状态空间原来吸引子的拓扑特征，Takens 在 1980 年证明了嵌入空间维数大小的嵌入定理[22]。如果原来吸引子处在一个 d_A 维空间中，那么其嵌入空间维数必须是 $2d_A+1$。

这个定理不需加以证明，只需加以说明。设集合 A 和 B 的维数是 d_A 和 d_B，若问其交集 $A\cap B$ 的维数 $d_{A\cap B}$ 是多少，则应把该问题放在 d 维空间来讨论，那么 A、B 和 $A\cap B$ 集的余维分别是

$$d-d_A,\quad d-d_B,\quad d-d_{A\cap B}$$

余维有好的相加性质，即

$$(d-d_A)+(d-d_B)=(d-d_{A\cap B}) \tag{4-56}$$

或

$$d_{A\cap B}=d_A+d_B-d \tag{4-57}$$

对于式（4-56）的正确性，可以用以下三个例子来检验。

例 1：两条曲线在平面上一般能相交吗？

因为两条曲线都是一维，即 $d_A=d_B=1$，平面的维数是 $d=2$。按式(4-57)算得 $d_{A\cap B}=0$。这就说明，两条曲线在平面上一般相交成点（其维数是零），这是一般不能借助于小的变形而去除的，即这两条曲线感到不“自由”。

例 2：两条曲线在三维空间中能相交吗？

因为曲线 A 和 B 的维数分别是 $d_A=d_B=1$，而 $d=3$，所以按式（4-57）算得 $d_{A\cap B}=-1$，这说明其交集的维数为负，即一般不相交。即使它们相交，通过无穷小的扰动也不会相交，也就是说这种相交是偶然的。

例 3：在三维空间中一条曲线和一个曲面能相交吗？

显然，若 $d_A=1$，$d_B=2$，$d=3$，则 $d_{A\cap B}=0$，即一般相交于一个点。

现在人们应用式（4-57）得到两个同样的对象 $d_A=d_B$，人们希望像例 2 一样其交集是“自由”的，即 $d_{A\cap B}=-1$，那么由式（4-57）得到

$$d=2d_A+1 \tag{4-58}$$

式（4-58）说明，嵌入空间的维数 n 一般至少应是吸引子维数的两倍。

2. 弱 Takens 嵌入定理[28]

岩石力学工程中所监测到的时间序列可以看成是某个 m-维紧流形 M 中的状态向量信号 $X(t)$。一般人们只关心在某种特定的等距点上关于 $X(t)$ 的采样值 $X(0)$，$X(\Delta)$，…，$X(N\Delta)$（为了数学推理方便，不妨设 $\Delta=1$）且认为它遵从 M 上的某个动力系统 $\Phi:M\to M, X(n+1)=\Phi[X(n)]$ 进行演化。如果人们能够知道动力系统 Φ 的一些性质和某个成分因素的性质，例如，能够验证它们满足 Takens 嵌入定理，那么由该定理就可以通过构造一个等价的动力系统来实现对未来时刻的状态值 $X(N+1)$ 的预测。然而，在实际中，人们只能获得其有限等距观测值 $X(0)$，$X(1)$，…，$X(N)$ 和它相应的某个成分因素 $y(t)$ 的观测值 $y(0)$，$y(1)$，…，$y(N)$，其他一无所知。如何利用这些数据自身预测下一个等距时刻的状态值 $X((N+1))$ 就成为难题。阮吉涛等[28]提出了一个弱 Takens 嵌入定理，从理论上解决了这个问题。

1）Takens 嵌入定理的严格描述[27]

要了解一个 m-维紧流形 M 上的动力系统 $X(n+1)=\Phi[X(n)]$，可以重构一个 D_E 维欧氏空间中的等价的，但相对容易研究的重构动力系统 ψ，通过对 ψ 的彻底研究来达到认识原底系统 Φ 的目的。要求条件是：观测函数 f 是光滑函数，而动力系统 Φ 满足普遍性：

（1）$\forall k<2m+1$，$\dfrac{\mathrm{d}^k\Phi}{\mathrm{d}X^k}$ 的所有特征根彼此相异；

（2）对于 Φ 的任意两个不动点 X 和 Y，它们不在同一个水平上。

用数学语言表述为，如果一个 m-维紧流形 M 上的动力系统 Φ 满足普通性，且观测函数 f 是光滑函数，那么存在正整数 $D_E\geqslant 2m+1$，使得映射

$$J_{\Phi,f}(X)=[f(X),f[\Phi(X)],\cdots,f[\Phi^{D_E-1}(X)]] \tag{4-59}$$

该映射是 $M\to R^{D_E}$ 中的光滑嵌入映射，D_E 被称为嵌入维数。此时存在 R^{D_E} 上的动力系统 ψ 使得

$$\psi J_{\Phi,f}=J_{\Phi,f}\Phi,\ \gamma(n+1)=\psi[\gamma(n)] \tag{4-60}$$

其中，

$$\gamma(n)=[y(n),y(n+1),\cdots,y(n+D_E-1)],y(n)=f[\Phi^n(X)],n=0,1,2,\cdots \tag{4-61}$$

在不计较一个微分同态 $J_{\Phi,f}$ 的情况下，ψ 与 Φ 是一回事。这就是 Takens 嵌入定理。

然而，在实际问题中，人们往往只能获得系统状态向量的一些等距观测值和某个成分因素在同一个时期的等距观测值，没有其他先验条件。在相当多的情况下，成分因素不是由一个光滑函数产生的。例如，利率、GDP 增长率、成交量、地震释放的能量或者其他量因素的数据，不一定是由一个光滑函数产生的。以上两个原因都限制了 Takens 嵌入定理的使用。

希望从理论上获得一种能够处理这类问题的新的 Takens 嵌入定理，它直接依赖于所观测到的观测数据，而不过分地附加那些不能够利用观测数据来检验的数学假设。

2）弱嵌入定理

设 M 是一个 m－维紧流形，Φ 是 M 到 M 的自治差分动力系统：$X(n+1)=\Phi[x(n)]$，$\forall n\geqslant 0$，且 f 是 $M\to R$ 的一个观测函数。

（1）Φ 连续且 $\forall n$，Φ^n 没有不动点，且存在 $C>0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 0}\|\Phi^n(X)-\Phi^n(X')\|<C\|X-X'\|$$

（2）对任意初始状态 $X(0)$，观测数据 $y(n)=f[\Phi^n[X(0)]]$，最大重复数为

$$L=\sup_{k\geqslant 0}\max\{n\mid y(n)=y(k)\}<+\infty$$

（3）$\{y(0),y(1),\cdots\}$的跳点密度 $\rho=1$；

（4）如果观测函数 f 在紧流形 M 上平方可积，那么存在一个正整数 D_E，一个映射

$$J_{\Phi,f}(X)=\{f(X),f[\Phi(X)],\cdots,f[\Phi^{D_E-1}(X)]\} \tag{4-62}$$

和一个定义在欧氏空间 R^{D_E} 上的差分动力系统 $\gamma(n+1)=\psi[\gamma(n)]$。其中，$\gamma(n)=\{y(n),y(n+1),\cdots,y(n+D_E-1)\}$，它们使得

①$\psi J_{\Phi,f}=J_{\Phi,f}\Phi$ 且 $J_{\Phi,f}$ 是 Φ 的轨道$\{X(0),X(1),\cdots\}$与 ψ 的轨道$\{\gamma(0),\gamma(1),\cdots\}$之间的 1－1 映射。

②$J_{\Phi,f}$ 在 M 上可以由一个光滑函数任意逼近（证明见文献［27］）。

3）基于弱 Takens 嵌入定理的多层感知器算法

当人们能够得到充分长的状态值的观测数据 $X(0)$，…，$X(N)$ 和拟作为成分因素的观测数据 $y(0)$，…，$y(N)$ 时，根据弱 Takens 嵌入定理，可以设计相应的算法（要求紧流形是道路连通的）其步骤如下：

（1）计算由有限观测数据 $X(0)$，…，$X(N)$ 给出的控制常数 C：

$$C=\max_{n\geqslant 0}\max_{\max[n+k,n+l]\leqslant N}\frac{\|X(k+n)-X(l+n)\|}{\|X(k)-X(l)\|} \tag{4-63}$$

（2）选择成分因素 $y(0)$，…，$y(N)$并计算其跳点密度：$\forall n\leqslant N$，记 $P(n)$ 为 $y(0),\cdots,y(n)$ 中的跳点数目，计算数列$\frac{P(n)}{n}$，$n=2,3,\cdots,N$。观察并计算该数列的极限值 ρ。如果当 N 充分大时，$\frac{P}{n}<\frac{P_0}{n}$，那么终止计算。

（3）取$\tau\geqslant\left|\frac{1}{\rho}\right|$，以其为间距对 $y(0)$，$y(1)$，…，$y(N)$ 进行重采样，得到重采样数据 $y(0)$，$y(\tau)$，$y(2\tau)$，…，$y(P\tau)$，改记为 $Z(0)$，$Z(1)$，…，$Z(T)$。

（4）计算新数据 $Z(0)$，$Z(1)$，…，$Z(T)$ 最大常返数的长度：

$$L=\max_{0\leqslant k\leqslant T}\{|n-k|\mid Z(k)=Z(n)\} \tag{4-64}$$

如果当 P 充分大时，L 也充分大，那么终止计算。

（5）取 $m_0\geqslant 1$ 使得 $D_E=m_0L$ 满足：

$$\{Z(n),Z(n+1),Z(n+2),\cdots,Z(n+D_E-1)\}\neq\{Z(k),Z(k+1),Z(k+2),\cdots,Z(k+D_E-1)\} \tag{4-65}$$

其中，$k\neq n$；k，$n\leqslant P-D_E+1$。

(6) 由于映射

$$J[X(k\tau)] = |Z(k-D_E+1), Z(k-D_E+2), \cdots, Z(k)| \tag{4-66}$$

是集合$\{X[(D_E-1)\tau], X(D_E\tau), \cdots, X(P\tau), \cdots\}$到集合$\{V(D_E-1), \cdots, V(P), \cdots\}$的1-1映射(其中$V(i) = |Z(i-D_E+1), \cdots, Z(i)|$)，从而通过训练得到一个输入为$V(k)$，输出为$X(k\tau)$ $(k=1, \cdots, P)$的三层感知器，并将其作为$J^{-1}(\cdot)$的估计$\hat{J}^{-1}(\cdot)$。

(7) 构造一个具有D_E个输入节点的输入层，一个具有$2D_E+1$个隐蔽节点的隐蔽层，和一个具有一个节点的输出层的三层感知器实现非线性一步预测函数：

$$Z(k+1) = F(Z(k-D_E+1), Z(k-D_E+2), \cdots, Z(k)), \forall D_E-1 \leqslant k \leqslant P-1 \tag{4-67}$$

记作$\hat{F}$（也可以采用其他方式得出）。

(8) 令

$$\hat{V}(k+1) = |Z(P-D_E+2), \cdots, Z(P), \hat{F}[Z(P-D_E+1), Z(P-D_E+2), \cdots, Z(P)]| \tag{4-68}$$

计算$\hat{J}^{-1}[\hat{V}(P+1)] = \hat{X}[(P+1)\ \tau]$。

(9) 检验加长数据$X(0)$, $\cdots$, $X(P\tau)$, $X[(P+1)\tau]$的控制常数$\hat{C}$是否与C接近，否则打出“预测状态值过于偏离轨道，不可作为预测值”，返回步骤2。

(10) 如果$\hat{X}[(P+1)\tau]$通过了控制检验，那么根据$X(N)$和$\hat{X}[(P+1)\tau]$，并结合实际问题估计$\hat{X}(N+1)$。

4.5.3 嵌入维与时间延迟的选择

由Takens定理知，如果延迟坐标的维数$m \geqslant 2d+1$（d为原系统的阶数），那么在这个嵌入维空间里可以把有规律的轨线（吸引子或奇异吸引子）恢复出来，亦即在重构的R^m空间中的轨线上与原动力系统保持微分同胚。在重构相空间中，时间延迟τ和嵌入维m的选取十分重要，其精度直接关系着相空间重构后描述奇异吸引子特征不变量的准确度。

1. 嵌入维、时间延迟平均位移算法

Otani等人提出了基于平均位移[29]和Γ-test[30]联合算法计算准最佳的嵌入维、时间延迟，具体的做法为：

(1) 对于时间序列为$X=\{x_i\ (t)\}$ $(i=1, 2, \cdots, N)$，给出一个嵌入维m的初始值，即令$m=m_0$，令时间延迟τ由小到大变化，依次将时间序列X构造成总数为$M=N-(m-1)\tau$的矢量$\{\sigma_i\}$ $(i=1, 2, \cdots, M)$，$\sigma_i=\{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+(m-1)\tau}\}$，$\sigma_i \in R^m$，在每个确定的$\tau$处计算整个矢量空间的平均位移量：

$$S(\tau) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left|\sum_{j=1}^{m-1}(\sigma_{i+j\tau}-\sigma_i)^2\right|^{\frac{1}{2}} \tag{4-69}$$

直到$S(\tau)$的值达到饱和为止（即其对τ的导数接近0时），此时的时间延迟τ为对应的嵌入维下的准最佳值。

(2) 将计算得到的τ代入Γ-test，计算对应的准最佳嵌入维m。具体的步骤是：设时间序列是由一个连续映射（函数）$f: R^m \to R$产生的，$y=f(x_1, \cdots, x_m)+\gamma$，其中$\gamma$代表了该模型的不确定部分，它包括噪声的作用和对输入、输出之间的不确定成分。给定一个

嵌入维 m 的值，将时间序列 $X=\{x_i\ (t)\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 重构成 $M=N-(m-1)\tau$的矢量空间：

$$\xi_i=\{x(i),x[(i+1)\tau],\cdots,x[(i+m-1)\tau]\} \tag{4-70}$$

令 $\gamma_i=x[(i+m)\tau](i=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$，创建 M 组输入、输出矢量对$(\xi_i,\ \gamma_i)$，在矢量空间中找出 p 个 ξ_i 的邻近矢量 $\xi_i\ [N\ (i,\ p)]$ $(p_{\max}=20\sim50)$，计算：

$$\mathrm{d}x(h)=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}|\xi[N(i,p)]-\xi(i)|^2$$

$$\mathrm{d}y(h)=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p}\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}|y[N(i,p)]-y(i)|^2 \tag{4-71}$$

运用线性插值 $\mathrm{d}y=A\mathrm{d}x+\Gamma$ 估算出 γ 的近似值 Γ（其中 A 为线性插值的一次项系数），渐渐地增加嵌入维 m，重复步骤式（4－69），计算相应的时间延迟τ，γ 的近似值将达到局部的最小值，此时的 m 即为准最佳的嵌入维，对应的τ则是准最佳的时间延迟。

仿真实验结果表明，该算法可直接用于计算连续非线性混沌时间序列的嵌入维和时间延迟。图 4－21 所示为系统在 $m=2$，4，6，8 时的平均位移 $S(\tau)$随τ变化的波形。

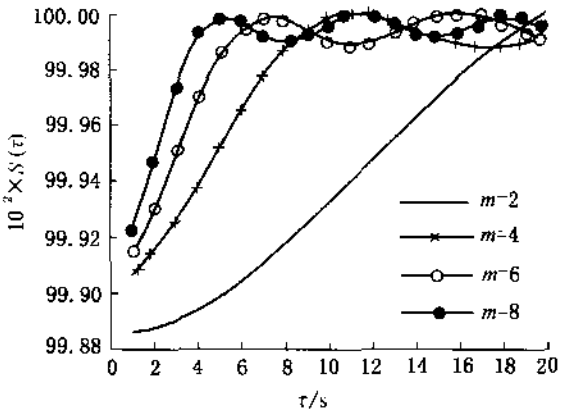


图 4－21　Lorenz 系统时间序列的平均位移波形

平均位移法是为了克服用自相关函数法求取时间延迟所存在的不足而提出来的，根据自相关函数法得到的时间延迟τ可分别让 x_i 与 $x_{i+\tau}$以及 $x_{i+\tau}$与 $x_{i+2\tau}$之间不相关，而 x_i 与 $x_{i+2\tau}$之间可能仍有很强的相关性，这一点意味着由自相关法得到的时间延迟不可能推广到高维中，而平均位移法属相空间重构的几何方法，可联系相关性准则，具有较强的物理意义。用上述算法计算得到的嵌入维和时间延迟精度在很大程度上依赖于平均位移法的精度。如图 4－21 所示，随着嵌入维 m 的增加，平均位移 $S(\tau)$ 的饱和点的位置不断前移，用平均位移法跟踪 $S(\tau)$ 波形的斜率，当 m 为某一确定值时，第 1 次降到初始斜率的 40% 以下所对应的时间延迟即为所求的时间延迟τ。这种方法的缺点是具有一定的随意性，同时，在 $S(\tau)$ 的总体变化中夹杂有较强的抖动，因此用波形的斜率判断时间延迟τ常常存在较大的误差，由此计算出的嵌入维必然也不十分精确。因此，必须对求解时间延迟τ的算法加以改进。

2. 改进算法

马红光等[32]对时间延迟τ进行了改进，对于序列$\{x_i\}$在m维相空间的平均位移可由式(4-69)改写为

$$S_m^2(\tau)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m-1}[x(i+j\tau)-x(i)]^2 \tag{4-72}$$

将式(4-72)展开并忽略边缘点带来的误差，设

$$E=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x^2(i)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}x^2(i+j\tau)$$

在$1\leqslant j\leqslant m-1$内为常数，可得

$$S_m^2(\tau)=2(m-1)E-2\sum_{j=1}^{m-1}R_{xx}(j\tau) \tag{4-73}$$

式中 $R_{xx}(j\tau)$ ——序列$\{x_i\}$的自相关函数。

定义$R_{xx}^m(\tau)=\sum_{j=1}^{m-1}R_{xx}(j\tau)$，则序列$\{x_i\}$在$m$维相空间的复自相关法可描述为：当嵌入维$m$为某一确定值时，选取$R_{xx}^m(\tau)$下降到其初始值的$1-e^{-1}$时对应的时间为时间延迟$\tau$。

对平均位移法的改进算法最终采用的是去偏复自相关法

$$C_{xx}^m(\tau)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m-1}[x(i)-\bar{x}][x(i+j\tau)-\bar{x}]=R_{xx}^m(\tau)-(m-1)(\bar{x})^2 \tag{4-74}$$

式中 $\bar{x}$——序列的值。

由于去偏复自相关去除了时间序列的均值，因此序列$\{x_i\}$在m维相空间的复自相关法是选取$C_{xx}^m(\tau)$第1个0点所对应的时间作为时间延迟τ。该方法的优点是继承了平均位移法在相空间中明显的几何意义，数学表达简洁，易于计算。该方法是自相关法在高维的扩展，有效地克服了平均位移法的缺陷。

为了验证改进后算法的精度，选取Henon映射Lorenz系统的仿真数据，分别用平均位移法、复自相关法和Γ-test相结合计算嵌入维和时间延迟，重构Henon映射和Lorenz系统，其中Henon映射的仿真数据经10倍的样条插值后取前500个数据参加实验，对Lorenz系统则先生成10000个数据，选取5000至6000之间的1000个数据参加实验，再分别计算出关联维，并与Kugiumtzis D给出的相应的理论关联维[33]比较，得到计算误差。实验结果见表4-3，由此可见，改进算法的计算误差明显小于原算法的误差。

表4-3 算法1和算法2的关联维计算误差

模型	采样间隔	算法1				算法2				关联维理论值
		嵌入维m	时间延迟τ/s	关联维	误差	嵌入维m	时间延迟τ/s	关联	误差	
Henon ($a=1.4$, $b=0.3$)	0.1	3	0.8	1.3158	0.0558	3	0.7	1.2734	0.0134	1.26
Lorenz($a=10$, $b=8/3$, $\gamma=28$)	0.01	5	0.35	2.0772	0.0172	5	0.25	2.0539	0.0061	2.06

注：算法1为平均位移与Γ-test联合算法；算法2为去偏复自相关与Γ-test联合算法

4.5.4 延迟时间与嵌入维数之间的关系

1. 基本嵌入窗长

对于某动力系统，可以通过实验方法观测得到一组单变量的时间序列 $\{x(t_i)\}$，通过式（4-75）构造一个与原系统等价的 m 维吸引子，从而研究这个时间序列的动力模型。

$$X(t)=\{x(t),\ x(t+\tau_d),\ x(t+2\tau_d),\ x(t+3\tau_d),\ \cdots,\ x[t+(m-1)\tau_d]\}^T \tag{4-75}$$

式中 m——嵌入维数；

τ_d——重构相空间矢量 $X(t)$ 相邻两个坐标之间的延迟时间。

如果重构的相空间比较合适，那么分数维以及 Lyapunov 指数等一些拓扑不变量就可以得到保留，从而可以对原系统的动力学行为进行研究。

假设原动力系统吸引子维数为 d，Takens 已证明，在数据无穷多且不受噪声污染的理想情况下，若 $m\geqslant 2d+1$，则重构的相空间就可以将动力系统的拓扑性质保留下来。对于时间延迟，嵌入理论没有做出具体的要求，也没有提出具体的选择方法。

研究表明，若延迟时间 τ_d 选取的太小，相空间矢量 $X(t)$ 的相邻延迟坐标元素［如 $x(t)$ 与 $x(t+\tau_d)$］差别太小，即冗余较大，则重构相空间的样点所包含的关于原吸引子的信息偏小，表现在相空间形态上为信号轨迹向相空间主对角线压缩；若 τ_d 太大，相空间矢量 $X(t)$ 的相邻延迟坐标元素不相关，则信息丢失，信号轨迹就会出现折叠现象。因此，要求延迟时间既不能太小，也不能太大。

Martinerie 从延迟时间与嵌入维数之间的关联性方面考虑，提出嵌入窗长 τ_w 为

$$\tau_w=(m-1)\tau_d \tag{4-76}$$

并指出嵌入窗长 τ_w 是一个定值。但窗长的意义仍然不明确。

2. 广义嵌入窗长[35]

1）广义嵌入窗长的定义

对于时间序列 $\{x(t_i)\}$，应该存在一个合适的延迟 Γ，使得 $x(t_i)$ 与 $x(t_i+\Gamma)$ 所构成的相空间轨迹既不压缩也不折叠。从式（4-75）可看出，相空间矢量 $X(t)$ 共有 m 个坐标分量，因此不应将 Γ 确定在 $X(t)$ 相邻两个坐标之间（即 Γ 不应等于 τ_d），而应该考虑整体上的效果。如果能够从一个给定的时间序列中确定出这样一个合适的延迟 Γ，那么，对于嵌入维数为 m 的相空间矢量 $X(t)$，就可以计算出重构相空间中的任意两个坐标的延迟时间与 Γ 的差值之和为

$$J=\sum_{k=1}^{m-1}C_{m-k}^{1}(k\tau_d-\Gamma) \tag{4-77}$$

所以当 $J=0$ 时，所选择的 τ_d 可以使重构相空间任意两坐标延迟时间的平均值为适当的延迟 Γ，即

$$\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)k\tau_d=\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\Gamma \tag{4-78}$$

这样就可以求出 Γ 与 τ_d 之间应该满足的关系：

$$\Gamma=\frac{m+1}{3}\tau_d \tag{4-79}$$

Γ 为广义嵌入窗长，对于一个给定的时间序列 Γ 是个定值，这样在确定了嵌入维数

m 和 Γ 之后就可以利用式（4－79）确定τ_d 了。

2）自关联函数法

自关联函数法对于时间序列集 $x_i = x(t_0 + i\Gamma)$ （$i = 1, 2, \cdots, N_0 + 1$）的自关联函数定义为

$$c(\Gamma) = \frac{\sum_{k=0}^{N_0} \{x[t_0 + (k+1)\Gamma] - x_a\}[x(t_0 + k\Gamma) - x_a]}{\sum_{k=0}^{N_0} [x(t_0 + k\Gamma) - x_a]^2} \tag{4-80}$$

式中：$x_a = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N_0} x(t_0 + k\Gamma)$。选取 $c(\Gamma)$ 首次通过0点的值 Γ_0 为嵌入窗长，即 $c(\Gamma_0) = 0$，因为此时是使 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 线性无关的最小值。

3）改进方法及 Γ 的选取

自关联函数能够反映出相邻时间序列的线性相关性，但 Γ_0 只是给出了 Γ 的一个上限，因为此时 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 之间已线性无关，这说明，此时的延迟时间已经过大，造成了信息损失。因此，适当的 Γ 应该选在（0，Γ_0）之间。

既然 $c(\Gamma)$ 可以反映 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 之间的关联性，那么同样可以定义一个能够反映出 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 之间不关联程度的函数 $r(\Gamma)$。$r(\Gamma)$ 与 $c(\Gamma)$ 之间应该满足这样的关系：由于 $c(\Gamma)$ 的取值范围是 $[-1, +1]$，$c(\Gamma)$ 取值为 $+1$ 和 -1 时所表示的关联程度是一样的，因此 $r(\Gamma)$ 的取值范围可以定义在 $[0, +1]$ 内，当 $c(\Gamma) = \pm 1$时，$r(\Gamma) \approx 0$；当 $c(\Gamma) = 0$时，$r(\Gamma) = 1$。

因此，可以将 $r(\Gamma)$ 定义为

$$r(\Gamma) = \sqrt{1 - c^2(\Gamma)} \tag{4-81}$$

这样，就可以用 $r(\Gamma)$ 的值反映出 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 之间的非关联程度，$r(\Gamma)$ 称之为补关联函数。由于 $r(\Gamma)$ 和 $c(\Gamma)$ 是从时间序列相反的两个方面反映 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 之间的相关性，而式（4－81）恰好体现了 $r(\Gamma)$ 和 $c(\Gamma)$ 之间的这种轮换对称的性质，因此当 $r(\Gamma) = c(\Gamma)$ 时，恰好对应于 $x(t)$ 与 $x(t+\Gamma)$ 之间既不冗余，也不无关，选此时对应的 Γ 值为最佳的广义嵌入窗长。由式（4－81）可得，此时即为 $c(\Gamma) = 0.707$ 时所对应的 Γ 值。

4.5.5 从单一变量时间序列提取分数维的计算方法

1985 年 Grassberger 和 Procaccia[36] 提出了一个比较适用于实验资料时间序列来计算吸引子的维数（关联维）的方法，其算法为

考察 m 维（m 足够大）相空间中的一对相点

$$X(t_i): x(t_i),\ x(t_i+\tau),\ x(t_i+2\tau),\ x[t_i+(m-1)\tau]$$

$$X(t_j): x(t_j),\ x(t_j+\tau),\ x(t_j+2\tau),\ x[t_j+(m-1)\tau]$$

设它们之间的距离（即欧氏模）为 $L_{ij}(m)$，有

$$L_{ij}(m) = \| X(t_i) - X(t_j) \| \tag{4-82}$$

给定一临界距离 r（r 为一小数），检查有多少对相点（X_i，X_j）之间的距离小于 r，并把距离小于 r 的“点对”在所有“点对”中所占的比例记为

$$C_2(r,m)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\theta(r-\|X_i-X_j\|)(i\neq j) \tag{4-83}$$

式中 $N=n-(m-1)\tau$为相点数，θ是 Heaviside 函数，且

$$\begin{cases}\theta(z)=0 & (z\leqslant 0)\\ \theta(z)=1 & (z>0)\end{cases} \tag{4-84}$$

其中，$C_2(r,\ m)$ 为累积分布函数，或称作吸引子的关联函数，它描写了相空间中吸引子上两点之间距离小于 r 的概率，刻画了相对于相空间某参考点 X_i 在 r 内的相点聚集的程度。若 r 选的太小，则 $\theta=0$；若 r 选得太大，则 $\theta=1$。

定义关联维：

$$D_2=\left|\frac{\lg C_2(r,\ m)}{\lg r}\right|=\left|\frac{\ln C_2}{\ln r}\right|=D_2(m) \tag{4-85}$$

很显然关联维 $D_2(m)$ 与所嵌入的相空间的维数 m 有关，即是 m 的函数。故一般称 $D_2(m)$ 是关联维 D_2 的估计值。

其步骤如下：

（1）应用时间序列重新构造一个 m 维的相空间，而资料的个数为 $10^{D_0}\sim 10^{2D_0+1}$个。

（2）依次取若干个τ值，计算各坐标的相关系数，从而筛选相关性最小的τ。

（3）依次取若干个（比如 a 个）不同的 r 值，分别算出与 r 值所对应的 $C_2(r,\ m)$ 为

$$C_2(r,m)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\theta(r-\|X_i-X_j\|)(i\neq j)$$

（4）根据 $D_2=\left|\frac{\lg C_2(r,\ m)}{\lg r}\right|=\left|\frac{\ln C_2}{\ln r}\right|=D_2\ (m)$

计算关联维数的估计值 $D_2(r,\ m)$。一般是根据所取的 a 个 r 值和与其对应的 a 个 $D_2(r,\ m)$ 值作出 $\ln C_2(r,\ m)-\ln r$ 曲线，而其近似于直线部分的斜率就是 $D_2(r,\ m)$。

（5）不断逐渐地提高嵌入维数 m，依次重复上述的(3)~(4)步骤，直至 m 达到某一值 m_c 时，响应的关联维的估计值 $D_2(r,\ m_c)$ 不再随 m 的增加而发生有意义的变化（即保持在给定的误差范围内）为止。这在 $\ln C_2(r,\ m)\ -\ln r$ 曲线图表现为一些曲线的直线部分的斜率不再随 m 的变化而变化，此时

$$D_2(r,m_c)=D_2(r,m_c+1)=D_2(r,m_c+2)=\cdots=D_2(r,m_c+b)=D_2 \tag{4-86}$$

这就是人们所要求的吸引子的关联维。人们称 m_c 为饱和嵌入维数。它的存在与否决定了时间序列的性质。如果 m_c 不存在，那么关联维的估计值 $D_2(r,\ m_c)$ 将随 m 的增长趋于无穷大，这表示吸引子不存在。从而可知，被诊断的时间序列是一个随机系统。所以，对于白噪声 $D_2(r,\ m_c)$ 是 m 的线形函数，而对于混沌系统 $D_2(r,m_c)$ 可达到饱和。

Grassberger 和 Procaccia[36] 还给出了关联维 D_2 与信息维 D_1 和分数维（Hausdorff 或 Kolmorgorov 容量维）D_0 之间的关系：

$$D_2\leqslant D_1\leqslant D_0 \tag{4-87}$$

当吸引子的覆盖均匀时，取等号。为方便起见，同时也因为 D_2 与 D_0 的差别不是很大，人们也称 D_2 为吸引子维数，或（奇怪）吸引子的分数维。

吸引子维数 D_2 的物理意义在于：对吸引子的结构，尤其是破碎程度有量的认识；提供了适当模拟系统动力学所必需的独立变量的最小数目的量度，即 $d=\mathrm{INT}\ (D_2+1)$；说

明了或许可以用分形理论来研究该系统的特性。

4.5.6 关联维数及等价性

为了计算嵌入相空间奇怪吸引子的维数，人们任意给出了一个数 r，然后在嵌入相空间中的 N 个点中检查“点对”（若有 N 个点，则共有 N^2 个“点对”）所占的比例 $C_2(r, m)$，计算见式（4-83）。

若 r 选得太大，则一切“点对”的距离都不会超过它，因而 $C_2(r, m)=1$，$\log C_2(r, m)=0$，函数 $C_2(r, m)$ 是描述随 r 增加时，“点对”数（小于 r 的）是如何增长的分布函数。显然太大的 r 反映不了系统内部的性质。

适当缩小 r，在 r 的一段区间 $C_2(r, m)$ 随 r 的变化为

$$C_2(r, m)=r^D \tag{4-88}$$

这里的 D 就是该吸引子的维数。若均匀分布在一条线上的资料点，则 $C_2(r, m)$ 与 r 的一次方成正比，即 $D=1$；若均匀分布在一个面上的资料点，则 $C_2(r, m)$ 与 r 的二次方成正比，即 $D=2$，如图 4-22 所示。因此 D 值具有描述该吸引子结构的特征。

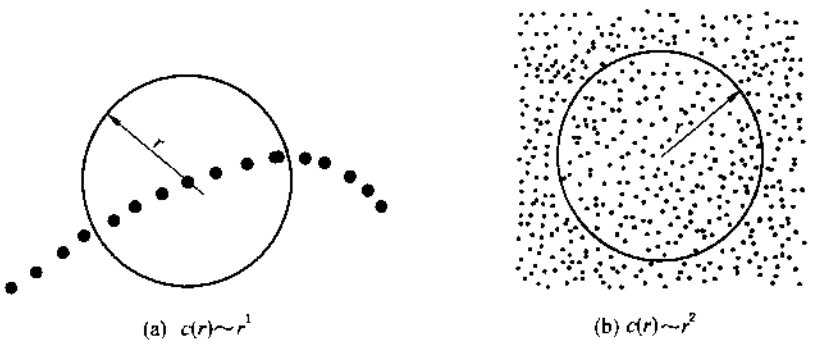


图 4-22 维数计算的说明

下面将说明，由式（4-88）确定出的 D

$$D=\lim_{r\to 0}\frac{\log c(r)}{\log r} \tag{4-89}$$

对于非均匀分形而言，考虑其 q 阶矩 $\sum_{i=1}^{N} P_i^q$，则此时 Renyi 维数 D_q 为

$$D_q=\frac{1}{1-q}\frac{\log\sum_{i=1}^{N} P_i^q}{\log\frac{1}{r}} \tag{4-90}$$

当 $q=2$ 时，关联维为

$$D_2=\lim_{r\to 0}\frac{\log\sum_{i=1}^{N} P_i^q}{\log r} \tag{4-91}$$

设 n_i 是处在尺寸是 r 的第 i 个小体积的点数，由于“点对”(x_i, x_i) 按式（4-83）

是不考虑的，且（x_i，x_j）和（x_j，x_i）是作为不同的“点对”，因此所有 n_i 点就形成（$n_i^2 - n_i$）个“点对”。故按式（4－83）有

$$\begin{aligned} C_2(r,m) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(n_i^2 - n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\lim_{N\to\infty}\frac{n_i^2}{N^2} - \lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N}P_i^2 - \lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N}P_i^2 \end{aligned} \tag{4-92}$$

式（4－92）说明式（4－90）和式（4－91）右边的分子都是相同的。

若是单分数维的均匀分布，按式（4－90）计算出的不但是关联维，而且也是 D_0 和信息维 D_1 以及所有的 D_q。

还应该指出，用时间序列计算分数维 D，需要足够的点数 N，一般有下列估计式

$$D < 2\frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{4-93}$$

若 r＝0.1，则 $D<2\log N$，例如，$N=10^3$，则算得的分数维 D 最大是 6。

还要说明在式（4－83）中 r 的数值也不能取得太小，如果取值太小，系统中一切偶然的噪声都会表现出来。

4.5.7 GP 法计算关联维数的误差分析[45]

1. 关联维数的误差 σ_c

吴云等[45]从关联维数的定义出发，推导使用 GP 法计算时，关联维数误差与观测数据误差的定量关系和任意两个嵌入空间维上关联维数的互差；并给出新的样本容量限。

按照式（4－83）关联维数的定义，并令 $c_2(r,m)=c(r)$。在实际计算对象的关联指数时，是将 $\log c(r)$ 和 $\log r$ 标绘在双对数图上，其直线部分的斜率就是 D_c。如果从这一点考虑，把观测尺度为 r 时的关联维数定义为该点在 $\log r - \log c(r)$ 曲线上的斜率，那显然是自然的，这样就有式（4－94）：

$$D_c = v(r) = \frac{\mathrm{d}\log c(r)}{\mathrm{d}\log r} \tag{4-94}$$

只要 $c(r)$ 是平滑的函数，式（4－94）就任何时候都是正确的，求解式（4－94）得

$$C(R) = C(r')\exp\left(\int_{r'}^{R}\frac{v(r)}{r}\mathrm{d}r\right) \tag{4-95}$$

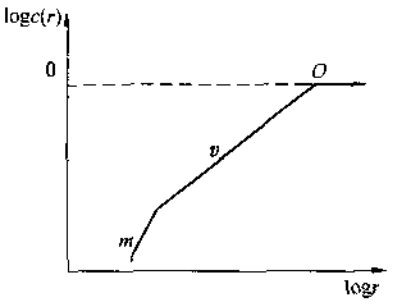


图 4－23　计算关联维数时的无标度区

这一方程把任意两个尺度 R 和 r' 的关联积分 $C(R)$ 和 $C(r')$ 同关联维数联系了起来。图 4－23 是关联维数计算的理想情况，就此理想情况来推导关联维数的误差以及互差，其具体步骤如下：

设 R_0 和 r'_0 是对象吸引子几何尺度的上限和下限，$[r', R]\in[r'_0, R_0]$ 是无标度区，于是式（4－95）就成为

$$C(R)=C(r'_0)\exp\left(\int_{r'_0}^{r'}\frac{m}{r}\mathrm{d}\varepsilon+\int_{r'}^{R}\frac{v}{r}\mathrm{d}r\right) \tag{4-96}$$

由式（4-83）可知

$$C(R)\approx C(R_0)=1,\ C(r'_0)=\frac{2}{M^2} \tag{4-97}$$

将式（4-97）代入式（4-96），两边取对数，得

$$\ln\left(\frac{n^2}{2}\right)+2\ln\left[1-\frac{(m-1)\ p}{n}\right]=D_c\ln\left(\frac{R}{r'_0}\right)+m\ln\left(\frac{r'_0}{r'}\right) \tag{4-98}$$

其中，$M=N-(m-1)\ \tau$，$0<\dfrac{(m-1)\ p}{n}<1$，$\dfrac{r'}{r'_0}>1$，$\dfrac{R}{r'}>1$。将式（4-98）中有关项用级数展开，只取线性项，得

$$\ln\left(\frac{n^2}{2}\right)-2\ln\frac{(m-1)p}{n}=v(1-\rho_1)+m(1-\rho_2) \tag{4-99}$$

其中：

$$\begin{cases}\rho_1=\dfrac{r'(X,\ m)}{R(X,\ m)}\\ \rho_2=\dfrac{r'_0(X,\ m)}{r'(X,\ m)}\end{cases} \tag{4-100}$$

并且

$$\rho=\rho_1\rho_2=\frac{r'_0(X,\ m)}{R(X,\ m)} \tag{4-101}$$

式中，X 表示由 GP 法构建的 m 维向量。

由式（4-99）解出

$$v=\frac{1}{1-\rho_1}\left[\ln\left(\frac{n^2}{2}\right)-m(1-\rho_2)-2p\frac{m-1}{n}\right] \tag{4-102}$$

由式（4-100）和式（4-102）可知：

$$v=v(\rho_1(X,\ m),\ \rho_2(X,\ m),\ m) \tag{4-103}$$

对于任一确定的 m，$m>2$，应用全微分形式的不变性，得

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial\rho_1}\mathrm{d}\rho_1+\frac{\partial v}{\partial\rho_2}\mathrm{d}\rho_2 \tag{4-104}$$

$$\sigma_v^2=\left(\frac{\partial v}{\partial\rho_1}\right)^2\sigma_{\rho_1}^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\rho_2}\right)^2\sigma_{\rho_2}^2+2\frac{\partial v}{\partial\rho_1}\frac{\partial v}{\partial\rho_2}\sigma_{\rho 1}\sigma_{\rho 2} \tag{4-105}$$

由式（4-100）、式（4-101）、式（4-102）得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\rho_1}=\dfrac{1}{1-\rho_1}\left(v-m\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial\rho_2}=\dfrac{1}{1-\rho_1}\left(m-v\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)\\ \sigma_{\rho 1}^2=\dfrac{2\sigma_x^2}{R^2}(1-\rho_1)^2\\ \sigma_{\rho 2}^2=\dfrac{2\sigma_x^2}{r'^2}(1-\rho_2)^2\end{cases} \tag{4-106}$$

式中 σ_x——观测数据误差。

将式（4－106）代入式（4－105），得

$$\sigma_v^2=\frac{2\sigma_x^2}{(1-\rho_1)^2}\left[\left(v-m\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{1-\rho_1}{R}+\left(m-v\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{1-\rho_2}{r'}\right]^2 \tag{4-107}$$

于是

$$\sigma_v=\frac{\sqrt{2}\sigma_x}{1-\rho_1}\left[\left(v-m\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{1-\rho_1}{R}+\left(m-v\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{1-\rho_2}{r'}\right] \tag{4-108}$$

这就是由观测数据误差 σ_x 所引起的关联指数误差 σ_v。可以看出，这部分误差与样本容量 n 无关，但与嵌入维数 m 有关，因此，在不同的嵌入空间维上，关联维数误差是不相同的，换句话说，不同的嵌入空间维上，关联指数的精度是不同的。

2. 任意两个嵌入维上关联维的互差 Δv

下面讨论任意两个嵌入维上关联维数的互差，并给出在给定互差条件下，应满足的样本容量限。由式（4－102），得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}=\frac{1}{1-\rho_1}\left[v\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}m}+m\frac{\mathrm{d}\rho_2}{\mathrm{d}m}-(1-\rho_2)-\frac{2p}{n}\right] \tag{4-109}$$

由于 $m\in\{2,3,\cdots,m_{\max}\}$ 取正整数，因此式（4－109）只有近似式

$$\frac{\Delta v}{\Delta m}=\frac{1}{1-\rho_1}\left[v\frac{\Delta\rho_1}{\Delta m}+m\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m}-(1-\rho_2)-\frac{2p}{n}\right] \tag{4-110}$$

于是

$$\Delta v=\frac{\Delta m}{1-\rho_1}\left[v\frac{\Delta\rho_1}{\Delta m}+m\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m}-(1-\rho_2)-\frac{2p}{n}\right] \tag{4-111}$$

这就是任意两个嵌入维上关联维数互差的表达式。令 $\Delta m=1$，这时的 Δv 即为两个顺序相连的嵌入维上关联维数之差，即

$$\begin{cases}\Delta v_1=v(3)-v(2)\\ \Delta v_2=v(4)-v(3)\\ \cdots\cdots\\ \Delta v_l=v(m_{\max})-v(m_{\max}-1)\end{cases} \tag{4-112}$$

一般情况下

$$\sum_{i=1}^{l}\Delta v_i=v(m_{\max})-v(2)\neq 0 \tag{4-113}$$

因此 Δv 是系统性误差，它不可能被排除，而只可能被限制在一定的范围内，对于式(4－110)，一般情况下，$\frac{\Delta\rho_1}{\Delta m}\geqslant 0$，$\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m}\leqslant 0$，那么，式（4－110）两边取绝对值并化简为

$$\left|\frac{\Delta v}{\Delta m}\right|(1-\rho_1)=\frac{2p}{n}+(1-\rho_2)+m\left|\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m}\right|-v\frac{\Delta\rho_1}{\Delta m} \tag{4-114}$$

于是

$$\left|\frac{\Delta v}{\Delta m}\right|(1-\rho_1)\leqslant\frac{2p}{n}+(1-\rho_2)+m\left|\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m}\right| \tag{4-115}$$

如果存在这样的 r，使得式（4－116）成立

$$r(1-\rho_1)=\frac{2p}{N}+(1-\rho_2)+m\left|\frac{\Delta\rho_2}{\Delta m}\right| \tag{4-116}$$

那么

$$N=\frac{2p}{r\ (1-\rho_1)-\left[(1-\rho_2)+m\left|\dfrac{\Delta\rho_2}{\Delta m}\right|\right]} \tag{4-117}$$

当 $n\geqslant N$ 时，$|\Delta v|\leqslant r\Delta m$。但是，由式（4-117）知，要使 N 有意义，必须使

$$r>\frac{m\left|\dfrac{\Delta\rho_2}{\Delta m}\right|+(1-\rho_2)}{1-\rho_1} \tag{4-118}$$

可见，r 不能是任选的正数，这就是说，当观测数据受随机噪声影响严重时，无法事先选择一个 r，来确定一个样本容量 N，使关联维数的互差被控制在某一确定的范围内。

如果不存在随机噪声的影响，即 $\rho_2=1$，$\Delta\rho_2/\Delta m=0$，那么式（4-118）就简化为

$$r>0 \tag{4-119}$$

这样，就可以预先任意选定一个正数 r，求出

$$N=\frac{2p}{r(1-\rho_1)} \tag{4-120}$$

当 $n>N$ 时，有 $|\Delta v|\leqslant r\Delta m$。这就达到了控制 Δv 的目的。令 $r=E/\Delta m$，E 仍是任选正数，$\Delta m_m=m_{max}-d$，d 为大于对象真实维数的最小正数，相应地，$\Delta v_m=v(m_{max})-v(d)$，于是

$$N_{min}=\frac{2p\Delta m_m}{E(1-\rho_1)} \tag{4-121}$$

当 $n\geqslant N_{min}$ 时，$|\Delta v_m|\leqslant E$。

把式（4-121）作为控制 Δv 样本容量的下限。E 和 Δm_m 根据计算需要预选给定，ρ_1 也预先给定，一般情况下，ρ_1 在 0.001～0.5 之间变化。

4.6 煤矿顶板失稳垮落分形特征

煤矿顶板事故在我国煤矿事故中占很大比例，而顶板运动、垮落则是导致顶板事故发生的主要原因。因此，加强对煤矿顶板垮落预测的研究，预防自然灾害的发生，保障生产安全，无疑具有重大意义。在对顶板运动、垮落监测预报研究方面，我国已取得了突出的成果，但各种预报方法主要是以经典力学为基础的。事实上，由于顶板属性的复杂性，用经典力学的方法能解决的问题是很有限的。当用上述方法对顶板运动过程作更深刻、更准确研究时，遇到了困难，比如用顶板下沉速度、AE 等指标进行预报顶板垮落时，无法确定垮落预报的临界值，而只能根据趋势变化来进行。这是因为煤矿顶板是经过多次地质运动所形成的典型的非均质、各向异性、非连续体，且随区域的变迁，其物理、力学性质变化很大，其运动过程所表现出来的力学行为往往是无序的，呈现出“混沌”现象。这显然无法用经典力学作较完备的定量描述。为此，通过尝试应用分形理论，对顶板运动失稳、垮落过程中的力学行为进行分形描述，探求用分形维概念进行顶板失稳、垮落预报，以使预报不依赖各种指标的特性，而是从顶板运动本身的力学行为出发，更具科学性。

4.6.1 顶板运动垮落指标的分形描述方法

人们所研究的监测顶板运动失稳、垮落的指标，如顶板下沉速度、声发射 AE 等，在现场中只能测得一离散的序列集。对于这样随时间变化所组成的序列集，根据分数维描述的特点，选用关联维数进行描述是合适的。

对于监测指标组成的序列集定义为一个容量为 n 的序列集：

$$\vec{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \tag{4-122}$$

自式（4-122）来支撑一个 m 维的相空间（$m<n$），即先取 m 个数作为 m 维空间的一个向量：

$$\vec{X}_1 = \{X_1, X_2, \cdots, X_m\} \tag{4-123}$$

然后，右移一步取 m 个数作为第二个向量：

$$\vec{X}_2 = \{X_2, X_3, \cdots, X_{m-1}\} \tag{4-124}$$

依次类推，构成 $N=n-m+1$ 个向量，建立关联函数为

$$W(r) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} H(r - |\vec{X}_i - \vec{X}_j|) \tag{4-125}$$

式中 $W(r)$ ——向量集合中两点间距离小于 r 的概率；

r——量测尺度；

H——Heavisive 函数，其定义为

$$H(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}$$

由分数维的定义得到关联维数为

$$D = \ln W(r)/\ln(r) \tag{4-126}$$

应该指出，在双对数坐标系中，对不同的 r 值所对应的 $W(r)$ 进行回归时，只有回归成直线时，才具有分形特征。

为了避免 r 取值的分散性，取

$$r = Kr_0 \tag{4-127}$$

式中 K——比例系数，依次取 $K=1, 2, 3, \cdots$；

r_0——集合中两点距离的均值，即

$$r_0 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} H|\vec{X}_i - \vec{X}_j| \tag{4-128}$$

4.6.2 顶板运动过程中下沉速度的分形特征[37-39]

以北京矿务局门头沟五槽煤坚硬顶板运动失稳、来压过程为例，分析顶板运动全过程中下沉速度的分形特征。用顶板下沉速度监测预报顶板垮落，通常是在超前巷道内安设 4～5 台位移计，以监测工作面前方 5m 点、10m 点、15m 点处顶板下沉速度的变化；在工作面内靠近煤壁侧和靠近采空区侧安设两台位移计，以监测工作面顶板下沉速度的变化。

按照关联维数的计算方法，将门头沟矿五槽煤坚硬顶板在 1984 年两次典型来压过程中的各测点的顶板下沉速度的分数维进行计算。按照 4.5 节方法，经计算表明，容量样本数即相容空间维为 $m=5$，其分数维随时间变化情况如图 4-24、图 4-25 所示。

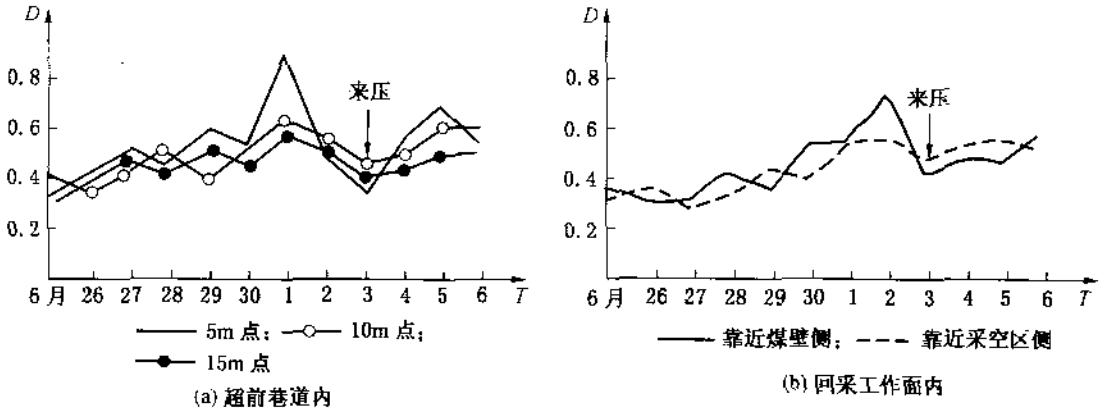


图 4－24　门头沟矿五槽煤顶板运动过程分形特征（1984 年 6 月）

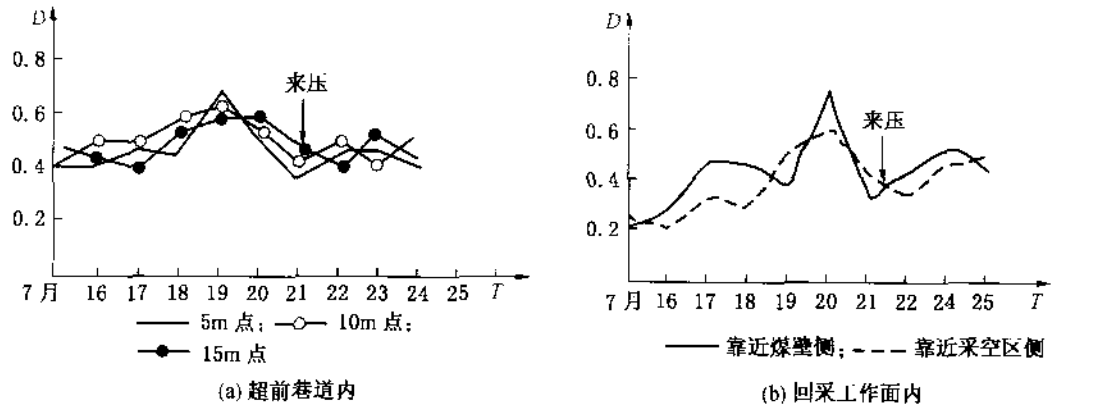


图 4－25　门头沟矿五槽煤顶板运动过程分形特征（1984 年 7 月）

从图 4－24、图 4－25 可以看出，顶板运动过程中各测点下沉速度关联分数维具有如下特点：

（1）在顶板处于相对稳定阶段，无论是超前巷道内的测点，还是工作面内的测点，各下沉速度的分数维大多呈缓慢上升趋势。5m 点、10m 点、15m 点下沉速度的分数维分别为 0.4～0.6、0.35～0.5、0.4～0.52；工作面内两侧点下沉速度的分数维在 0.31～0.6 范围内波动。

（2）在顶板显著运动阶段，各测点的下沉速度分数维开始明显上升，在来压前夕达到峰值。巷道内各测点中，以靠近工作面 5m 点的下沉速度分数维最明显，约为 0.85；远离工作面 15m 点的下沉速度分数维最不明显，为 0.78～0.8；工作面内两测点下沉速度的分数维几乎同步达到高峰，为 0.68～0.73。

（3）当工作面开始来压，发生顶板垮落时，无论是巷道内，还是工作面内各测点下沉速度分数维都开始迅速下降至“底谷”。如巷道内 5m 点下沉速度的分数维为 0.38～0.43，工作面内测点下沉速度分数维为 0.4～0.47。

(4) 回采工作面内测点的分数维值的高峰将比巷道内各测点的分数维值高峰的出现延迟1天左右。

(5) 巷道内测点下沉速度分数维高峰值的出现比来压提前2天左右；工作面测点下沉速度分数维高峰值的出现比来压提前1天左右。

以与上述同样的关联分数维计算方法，分别对岭子矿771回采面砂质页岩中等稳定顶板条件和郭二庄矿2253回采面页岩破碎顶板条件下，顶板运动过程中超前巷道内顶板下沉速度分数维进行计算，其结果如图4-26，图4-27所示。尽管在中等稳定及破碎顶板条件下实际观测到的顶板下沉速度曲线呈现“波动”状态，规律性不明显，但其分数维随时间也表现出较强的规律性，并与坚硬顶板条件下的运动相似，即顶板在来压前夕，各测点下沉速度分数维处于曲线的下降或“底谷”，这与文献[21]中用分数维进行地震预报研究的结论一致。这说明，分数维的变化比较真实地体现了顶板运动的内在规律性。

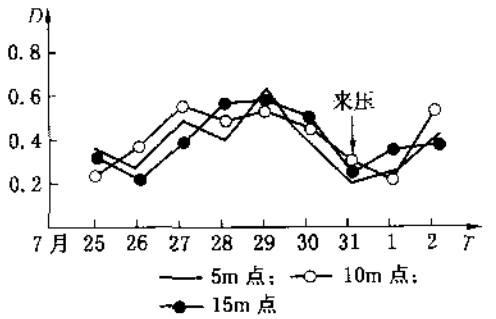


图4-26 岭子矿771回采面顶板运动过程分形特征

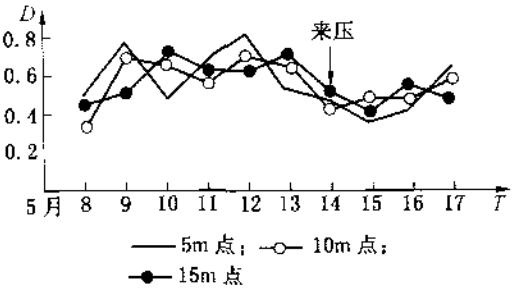


图4-27 郭二庄矿2253回采面顶板运动过程分形特征

4.6.3 顶板运动过程中声发射分形特征

为了研究监测指标差异所造成的分数维变化情况，利用关联维数的计算方法，根据文献[40]研究成果，对北京矿务局木城涧矿千军台坑741003工作面三次典型老顶周期运动过程中声发射大事件数N_L、总事件数N和平均能率数N_E进行分析。分别对顶板相对稳定期，顶板活动增强期和来压期的各指标分数维变化进行对比。在每一容量空间中，选取相空间维数仍为$m=5$，如图4-28a、图4-28b、图4-28c所示的曲线，分别对应三次老顶周期运动过程中分数维变化情况。

从图4-28可以看出，其具有如下规律性：

(1) 顶板处于相对稳定期内，声发射大事件数N_L、总事件数N、平均能率数N_E的分数维大都处于上升、增大的趋势，其中，N_L的分数维为0.34~0.38；N的分数维为0.34~0.48；N_E的分数维为0.29~0.5。

(2) 顶板活动增强期内，N_L、N和N_E的分数维大都明显呈现增大趋势，并达到高峰。其中N_L的分数维为0.35~0.47；N的分数维为0.37~0.47；N_E的分数维为0.46~0.53。

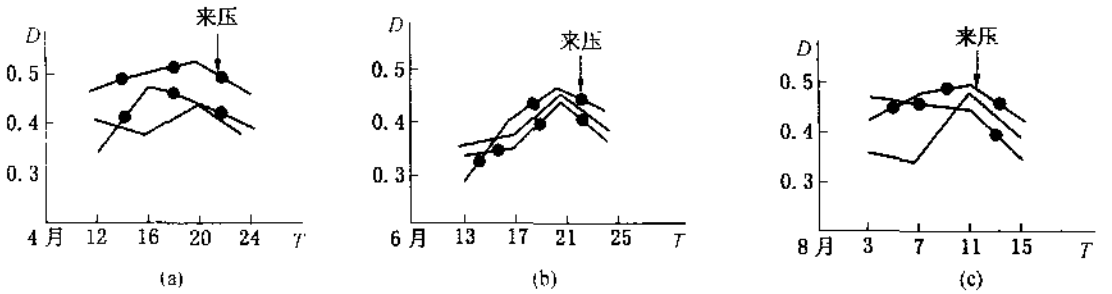


图4-28 声发射分数维特征

(3) 在顶板来压期内，N_L、N 和 N_E 的分数维呈现明显的下降趋势。其中 N_L 的分数维为0.38~0.44，N 的分数维为0.38~0.48；N_E 的分数维为0.44~0.49。

从上述各个时期内声发射各指标的分数维变化情况可以看出，大多集中分布在0.35~0.5的范围内，这说明，各种岩层都有自己的分数维量值。在反映上述规律的指标中，以平均能率数 N_E 的分数维最有规律性，其与顶板下沉速度分数维变化规律相似。

通过上述分析不难看出：

(1) 顶板下沉速度分数维和声发射大事件 N_L、总事件 N 及平均能率数 N_E 的分数维（其中以 N_E 分数维规律最强）在顶板失稳、垮落前夕基本表现出了相同的规律性，即在失稳前夕分数维出现一高峰值，而在分数维下降段或底谷区顶板开始失稳、垮落。因此，利用分数维可以避免各类不同指标特性的影响，更为科学地体现顶板运动失稳垮落的规律性。

(2) 对于不同类型顶板条件，顶板运动过程中其下沉速度的规律性相差较大，但分数维都表现出相似的规律性。这充分反映出顶板运动、破坏的内在力学机制，表现出力学行为的相似性，故利用分数维可以更为科学地实现预报顶板和围岩失稳垮落的目标。

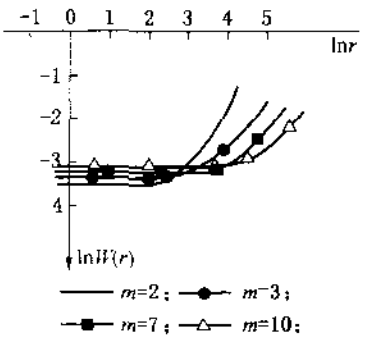


图4-29 m 值对分数维的影响

4.6.4 相空间维数对分数维的影响

相空间维数，即 m 值的大小，往往对分数维有一定的影响。以千军台坑741003工作面1991年8月份基本顶周期来压过程的平均能率数 N_E 为例，取相空间维数 $m=2$，3，7，10进行分析。如图4-29所示，当 $\ln r \leqslant 3$ 时，其分形特征不明显；当 $\ln r > 3$ 时，表现出了明显的分形性，且随着 m 的增加，其分数维在降低。因此，在考察分析问题时，应以同一个标准值 m 来确定分数维，这样才能保证问题的可比较性。

4.7 岩体节理间距分布的分形模型[41]

岩体的节理状况，直接影响到岩体的稳定性，因此，对岩体内节理分布规律的研究具有重要意义。正如前所述，岩体内的节理网络在一定尺度内具有分形特征，张继春等探讨

了岩体节理间距分布的分形模型[41]。

4.7.1 节理间距分布的分形模型

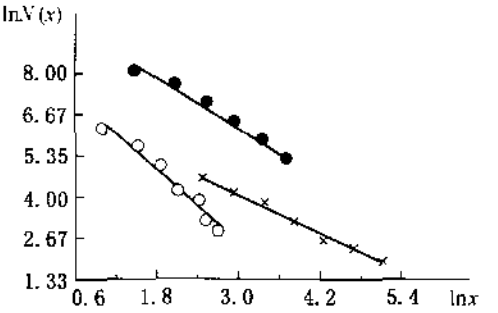
在进行节理间距统计时，通常是按节理分布特点首先确定出测线长度，然后按测线内节理数计算其节理频数，由负指数分布描述节理间距的分布状态，该统计方法不考虑测线内各节理的间距组成，忽视了反映不同节理间距组成特征的具体信息。只有统计出测线内所有节理间距，分析不同间距值含有的节理数间的关系，由此建立节理间距分布模型，才能反映间距组成信息。

表 4-4 实测节理间距数据

序号	测线长度/m	平均间距/cm	最大间距/cm	大于各间距的节理数 $N(x)$							
1	60.73	3.3	20	间距/cm	3	5	7	9	11	13	15
				节理数	617	297	155	82	59	32	23
2	514.57	10.5	120	间距/cm	5	10	15	20	30	40	50
				节理数	2844	1611	904	549	244	134	61
3	50.65	37.8	300	间距/cm	10	20	30	40	60	100	150
				节理数	107	62	42	27	16	12	7

表 4-4 是 Priest 等人在隧道中三个区域统计出的节理间距组成[42]。若以节理间距 $\ln x$ 为横坐标，间距大于 x 的节理数 $\ln N(x)$ 为纵坐标，按表 4-4 数据将各次 $\ln N(x)$ 与 $\ln x$ 关系绘于图 4-30 中。从图 4-30 看出，$\ln N(x)$ 与 $\ln x$ 在各自间距变化范围内几乎是一条直线，表明节理间距分布具有统计自相似性。

对各次统计的数据按 $\ln N(x) = A\ln x + B$ 进行回归计算，其结果列于表 4-5 中。由分形定义知，直线斜率的绝对值即是间距分数维 D。表 4-5 中的 ρ 和 ρ_0，分别表示回归计算的相关系数和在显著水平 $\alpha = 0.001$ 下满足线性关系的临界相关系数。$\ln N(x)$ 与 $\ln x$ 之间确实存在较强线性关系，节理间距分布具有如下分形规律：



●—第一区域；○—第二区域；×—第三区域

图 4-30 $\ln N(x)$ 与 $\ln x$ 的关系

$$N(x) \propto x^{-D} \tag{4-129}$$

表 4-5 节理间距的线性回归结果

序 号	A	B	ρ	ρ_0	D
1	-2.07	8.9	0.9912	0.9507	2.07
2	-1.49	10.62	0.9819	0.9746	1.49
3	-1.02	7.11	0.9947	0.9507	1.02

上述三个区域的间距分数维分别为2.07，1.49和1.02。对比表4－4知，在间距变化范围内，小间距部分所占节理数比例大者，其分数维高。

设测线内节理总数为N_0，式（4－129）可改写为

$$N\ (x) = N_0(ax^{-D} + b) \tag{4-130}$$

且满足如下条件：

$$\begin{cases} x = x_0, & N = N_0 \\ x = x_m, & N = 0 \end{cases} \tag{4-131}$$

式中 x_0——最小节理间距；

x_m——最大节理间距。

由式（4－130）、式（4－131）解得，并考虑到间距大于x，节理数与总节理数比率$y(>x) = N(x)/N_0$，则有

$$y\ (>x) = \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-D} - \left(\frac{x_m}{x_0}\right)^{-D}\right] \Big/ \left[1 - \left(\frac{x_m}{x_0}\right)^{-D}\right] \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_m) \tag{4-132}$$

式（4－132）即为用分数维表示的节理间距分布的分形模型。

4.7.2 模型及参数讨论

1. 节理间距分形模型的χ^2检验

以表4－6数据对式（4－132）进行χ^2检验。检验结果表明，各$\chi^2 < \chi^2_{0.1}$，说明分形模型描述节理间距分布是可信的。图4－31和图4－32分别是第一区和第三区统计结果按式（4－132）所作的间距分布图。

表4－6 分形分布拟合结果与χ^2检验

序号	D	x_0	ρ	ρ_0	χ^2	$\chi^2_{0.1}$
1	2.07	1.95	0.9907	0.9507	5.8733	9.236
2	1.49	4.20	0.9820	0.9746	2.8049	7.779
3	1.03	8.65	0.9954	0.9507	8.7740	9.236

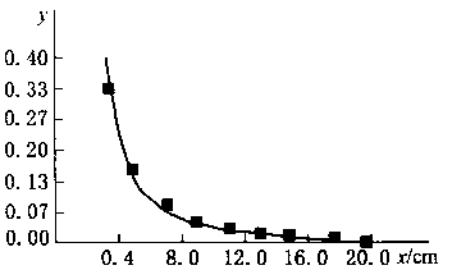


图4－31 第一区节理间距的分形分布

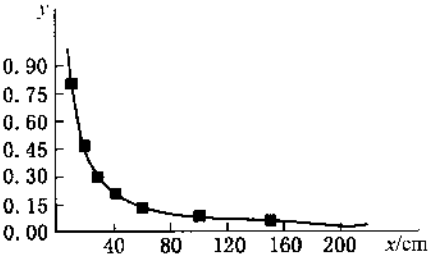


图4－32 第三区节理间距的分形分布

2. 分数维与间距特征参数的关系

节理间距分布的分形模型确定了分数维与间距分布的各特征参数间的定量关系。分数

维表征的间距分布与尺度无关，若令 $\beta = x_m/x_0$ 为节理间距分布离散度，$x = x/x_0$ 为相对节理间距（$1 \leqslant x \leqslant \beta$），则由式（4－132）给出间距小于 x 的节理间距分布为

$$y(<x) = (1 - x^{-D})/(1 - \beta^{-D}) \tag{4-133}$$

取间距离散度 $\beta = 20$，当 $D = 0.3$，0.6，1.2 时，式（4－133）的图解结果如图 4－33 所示。图解结果表明：在相同间距离散度时，分数维大，小于某相对节理间距的节理数所占比率也大；在相同比率下，随着分数维增大，相应的相对节理间距减小。

对不同 β 值进行计算的结果表明，尽管 β 减小，但小于同一相对节理间距的节理数所占比率仅略有增加，说明间距分布离散度对间距分布状态的影响不显著。

对式（4－133）求数学期望得到理论平均节理间距 $E(x)$，令 $\bar{d} = E(x)/x_0$ 为相对平均节理间距，则有

$$\bar{d} = \begin{cases} D \cdot (\beta^{1-D} - 1)/[(1 - D) \cdot (1 - \beta^{-D})] & D \neq 1 \\ \ln\beta/(1 - \beta^{-1}) & D = 1 \end{cases} \tag{4-134}$$

由式（4－134）计算出前述三次实测间距分布的理论平均节理间距分别为 3.49cm，10.77cm，30.77cm，它们与实测值十分吻合。

式（4－134）的图解结果，如图 4－34 所示。在相同的间距分布离散度时，随着分数维增大，相对平均节理间距减小，但不意味着平均节理间距的绝对值减小，此值还与最小节理间距有关。因此，只有分数维和最小节理间距才能完全确定节理间距分布状态。分数维一定时，随着间距分布离散度增大，相对平均节理间距也增大，特别是在小分数维的间距分布时，其增长幅度尤为显著。

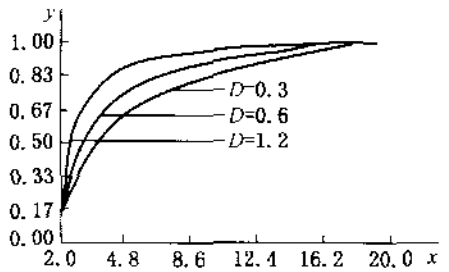


图 4－33　式（4－134）的图解结果

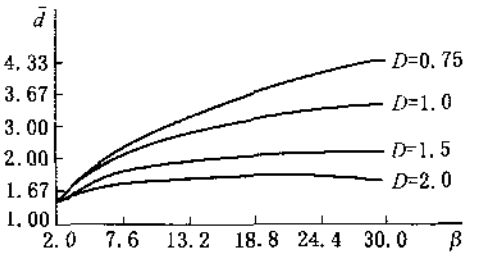


图 4－34　分数维与相对平均间距关系

3. 分形模型与负指数分布的比较

工程上大多以负指数律描述节理间距分布，在有限测线长度内间距的概率密度函数为[23]：

$$f(x) = -\lambda e^{-\lambda x}/(1 - e^{\lambda L}) \quad (0 \leqslant x \leqslant L) \tag{4-135}$$

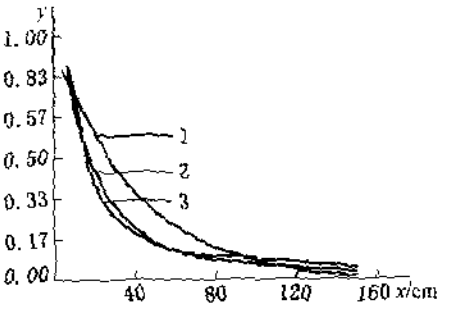
式中　L——测线长度；

λ——节理频数。

由此得到间距大于 x 的节理间距比率为

$$y(>x) = (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda L})/(1 - e^{-\lambda L}) \tag{4-136}$$

按式（4－136）计算表 4－4 中 3 区节理间距分布的理论值，并与统计值比较知，该理论值在大间距部分比统计值小，中等间距部分比统计值大，小间距部分又比统计值小，



1—负指数分布；2—实测分布；3—分形分布

图 4－35　分形分布与负指数分布对比

这些偏差均比分形模型大。图 4－35 是第三区实测节理间距分布及其按负指数分布和分形模型拟合的曲线，分形分布比负指数分布更接近实测间距分布。

比较式（4－132）、式（4－136）知，在两组节理的平均间距相等时，只有前者能反映出这两组节理间距分布的差异，而且节理频数不能像分数维那样具体比较某一间距范围内的间距比率，以说明其分布的总体特征。

式（4－136）以测线长度作为间距变化的上限，不仅与实际相差太大，而且当平均距很小或测线较长时，$e^{-\lambda L}$项完全可忽略。分形模型不会因测线长度的增加而产生明显变化，却更接近实际分布，并且由于将最小节理间距引入间距分布式中，避免了负指数分布在小间距部分比率过小的误差。

负指数分布只要求统计出给定测线长度内的节理数，分形模型则要求逐一统计各条节理间距，这大大增加了信息量，使得分形模型更全面、准确地描述节理间距分布特征，有利于节理分布的计算机模拟。

注记 1　B. B. Mandelbort 生平



B. B. Mandelbrot

B. B. Mandelbrot 于 1924 年 11 月 20 日生于波兰华沙，祖籍是立陶宛犹太人。Mandelbrot 的父亲是成衣商，母亲是牙科医生。1936 年在 Mandelbrot 11 周岁时举家迁往巴黎，受其叔父 Szolem Mandelbrojt（1899—1983）影响极大（当时 Szolem Mandelbroj 是法国的一位数学家）。

1944 年，Mandelbrot 以班级第一名的身份通过了法国著名的“高等师范学校”与“综合工科学校”入学考试。当时他的代数与分析基础并不好，但几何直觉不错，考试时他总是设法将代数与分析问题化成几何问题，巧妙地将它们解决，他称此为合法性“作弊”（cheating）。Mandelbrot 与其叔叔 Szolem Mandelbroj 对数学有完全不同的口味。叔叔 Szolem Mandelbroj 是一位非常经典的分析学家，而 Mandelbrot 更倾向于几何，他称自己为几何学家。

由于不喜欢布尔巴基学派的数学，Mandelbrot 在高等师范学校念了没几天，就转到了综合工科学校。1947 年 Mandelbrot 从法国综合工科学校毕业。1948 年获美国加州理工大学硕士学位；1952 年获巴黎大学博士学位。随后几年他不断在几个学科中游荡，先后“闯入”过物理学、经济学、生理学、语言学和其他一些似乎毫不相关的学科。他喜欢用“知识流浪汉”、“游荡”等字眼描述自己的学术生涯和人生经历。

到美国后，他最先是作为麻省理工学院的一名研究助理，1958 成为约克郡高地沃森

研究中心物理部研究人员。

Mandelbrot 因创造了原来根本不存在的分形学科而一举成名。1975 年以法文出版《分形对象：形、机遇与维数》，1977 年以英文出版该书增补版，1982 年出版《大自然的分形几何学》。最后一部影响最大，它是分形学科的宣言书，包罗万象，显示了将分形用于自然现象描述的重要性。他对自己专著的描述用词是："普及性的"、"随笔"（Essay）、"宣言书"、"从头到尾都是序言"。据初步统计，到 1989 年底他已经发表了 123 篇论文，内容极其庞杂，涉及语言学、概率论、通信工程、水利学、经济理论、金融分析、布朗运动、湍流、复迭代、宇宙学、临界现象与相变等等。

Mandelbrot 现为美国艺术与科学院院士，美国国家科学院外籍院士，欧洲艺术、科学与人文学院院士。他曾荣获巴纳奖章（F. Barnard Medal，1985）、富兰克林奖章（Franklin Medal，1986）和物理学沃尔夫奖（Wolf Prize，1991），还有其他若干奖项。

注记 2　Fractal 一词的来历

2000 多年来，古希腊人创立的几何学，一直是人们认识自然物体形状的有力工具。经典几何学所描绘的都是由直线或曲线、平面或曲面、平直体或曲体所构成的各种几何形状，它们是现实世界中物体形状的高度抽象。天文学家们用这种几何知识构造了多种宇宙理论，建筑师们利用它设计出大量宏伟的建筑，以至于近代物理学的奠基者、伟大的科学家伽利略极其权威地断言：大自然的语言是数学，它的标志是三角形、圆和其他几何图形。

然而事实上，传统几何学的功能并不是那么强大，它所描述的只是那些具有光滑性即可微性（可切性），至少是分段分片光滑的规则形体。这类形体在自然界里只占极少数。自然界里普遍存在的几何形体大多数是不规则的、不光滑的、不可微的，甚至是不连续的。如蜿蜒起伏的山脉，曲折凸凹的海岸线，坑坑洼洼的地面，枝干纵横的树枝，团块交叠的浮云，孔穴交错的蛋糕……真是奇形怪状，千姿百态。这些形状和经典几何学所描述的形状，真是大相径庭。对于了解自然界的复杂性来讲，欧几里德几何学是一种不充分、不具有普遍性的抽象。1975 年冬天的一天，正在思索着现实世界真实几何形象问题的法国数学家 B. B. Mandelbrot 随手翻阅他儿子的字典，注意到了拉丁字"fractus"，这个来自动词 frangere 的形容词含有破裂之意。他由此创立了"分形"这个概念，并由此创立了"分形几何理论"，从而把数学研究扩展到了传统几何学无法涉足的那些"病态曲线"和"几何学怪物"的领域。B. B. Mandelbrot 说："云朵不是球，山峦不是锥，海岸线不是圆，树皮不光滑，闪电也不走直线。"分形几何学所映射出的自然事物不是光滑无瑕、平坦规整的，而是凸凹不平、粗糙丛杂、扭曲断裂、纠结环绕的几何形体。

注记 3　分形所涉及的主要研究领域

1. 分形的研究对象及分类（类别）

分形论是以复杂事物为研究对象的，包括线性分形和非线性分形。线性分形是具有自

相似性的无序、无规则性的系统，其维数的变化是连续的，又称自相似分形。其余的均为非线性分形，它研究在非均匀线性变换群或非线性变换群下几何图形的性质。

分形几何
- 线性分形（均匀线性变换群）
 - 有规分形（经典分形多些）
 - 无规分形（随机分形多些）
- 非线性分形（非均匀线性变换群和非线性变换群）
 - 自仿射分形（非均匀线性变换群）
 - 自反演分形（非线性变换群）
 - 自平方分形（非线性变换群）

还有递归分形、多重分形、胖分形等等。自仿射分形比自相似性分形更重要，反映了大自然的复杂性和丰富性。

2. 分形的应用范围

分形几乎涉及所有的领域，有几何分形、广义分形、自然分形、社会分形等。

（1）广义分形：是不只在形态和结构上具有自相似性的几何分形或分形几何学，在信息、功能、组成和时间上的相似性也包含在自相似性概念中。于是把形态、结构、信息、功能、能量、物质（从 DNA 到蛋白质再到活生命体的物质组分，组成的分形、能量、信息分形、重演分形、遗传分形、组织胚胎分形等多元分形）、时间或空间上具有自相似性的客体称为广义分形。

（2）自然分形：是自然界客观存在的或经过理论抽象的，具有自相似性的客体。范围很广，遍及数学、物理、化学、材料、表面、计算机、电子、微电子、生物学、医学、农学、天文学、气象、地理、地质、地震、特别是中医（经络）等。很多按系统的具体特点又可分为几何分形、功能分形、能量分形、信息分形和重演分形等。

（3）社会分形：经济学中的分形，文方面的分形，思维分形，情报分形，管理科学中的分形，艺术分形，文学（社会）与自然（社会）分形。

3. 分形研究动向与发展前景

（1）如何判断一个对象是分形或多重分形（寻找完整而精确的分形定义）？现在的分形是“看”出来的，还无法严格证明“什么”是“分形”，因此，给分形下一个严格的定义，还需努力。

（2）分数维的物理意义。分数维是描述分形特征的定量参数。但如何理解分数维的确切物理意义，是非常实用的现实问题。豪斯道夫维数的意义似乎明确一些，它定量地描述出一个集规则或不规则的几何尺度。其整数部分反映出图形的空间规模。对动力系统，豪斯道夫维数大体上表示动力变量的数目（个数）。广义维数 Dq 或奇异谱，主要表征多重分形的非均衡性和奇异性。在材料科学中发现分数维与材料的某些性质参数有关。在化学领域，发现分数维同催化剂的催化性和选择性有关。但是，分数维能否作为一个独立参数存在，现在还不太清楚。寻找分数维的更深刻的意义和实际用途，对分形理论的发展是一个极为重要的问题。

（3）分形的动力学机制（分形与混沌）。分形理论主要致力于形态的描述（包括过程），对动力学机制（包括产生分形的充要条件）则很少涉及。为改变这种“知其然，不知其所以然”的状况，有必要引入非平衡态物理学、协同学等学科中的一些概念和方法，还要把时间参量纳入研究之中。同时应对分数阶微分方程、非线性发展方程、辛几何等方面的进展给予关注。目前，在化学动力学及酶动力学领域已有发展，主要是通过分形子维

数（谱维数）沟通时间与概率之间的关系，但这远远不能说明分形的生长动力学。应加强以下三方面的研究：须研究集团生长的时间演化规律和集团的结构标度行为；考虑耗散结构理论及自组织临界理论，以进行有效的解析和数值研究，同时要重视随机力和涨落对系统的影响；从细胞自动机和神经网络方面对生长问题进行模拟研究。总之，分形动力学是急需努力开拓的领域。

（4）分形重构问题。这是动力学研究的逆问题——如何由分数维来重构分形，即已知一个分形的分数维，如何重新构建（还原）这个分形？显然，由于存在“一因多果”或“一果多因”，因此由分数维来重构分形还必须有其他的辅助参数，仅靠一个分数维是不够的。

（5）关于 Julia 集和 Mandelbrot 集的问题。

（6）其他问题。包括：随机多重分形的数学问题，分形曲线的导数问题（如 Gibbs 导数），分数维计算的方法特别是由混沌时序计算分数维的可信度问题，多重分形的热力学、相变实质及相变普适性划分判据问题，分形的小波分析及小波变换产生分形的问题，生物膜的分形结构及其与细胞膜病变的关系问题，原子、分子的分形问题（包括量子混沌），分形及重正化混沌（renormchaos）问题，自组织临界现象及负幂律问题，图像的分形压缩问题等。

注记 4　分形的哲学意义[43,44]

空间和时间是物质存在的基本形式，而维数则是描述空间和时间的最基本的特征量之一。不管维数来自于经验还是来自于直觉，它已经成为人类科学思维活动中不可摆脱的概念。点是零维，直线是一维，平面是二维，而人们居住的空间是三维（如果把时间和空间同等处理，如相对论，则人们居住的空间是四维）。所有这些直观经验启发人们，可将维数看成是确定几何对象中一点的位置所需的独立坐标数，或独立变量的数目。也就是说，当想确定直线上的某一点时，人们只需要一个变量；而要确定平面上的某一点时，则需要两个变量。这种想法看来是非常自然的，而且完全有理由认为维数只能是整数。那么对任意非负的整数 N，作为 N 维空间考虑时，在数学上也是完全允许的。实际上，在质点运动的相空间理论中“N 维空间”已有了很多的应用。

然而，早在 1890 年，对经验维数的这种认识就已有人提出了深刻的置疑。意大利数学家皮亚诺（Peano）构造的填充空间曲线（皮亚诺曲线），可以把整个平面完全覆盖。即是说，可用一个实数表示应是 2 维的平面上的任意点。也就是说，如果从独立变量的角度考虑，可把 N 维空间看作 1 维。这显然是对传统维数观念的一个冲击。正如当时德国数学家康托（Cantor）所认为的：任何 N 维空间的元素要由 N 个独立的实数坐标确定，并把这一假定作为必要的前提加以使用的观点是错误的，他告诫大家，“所有使用这一错误假定的，无论是哲学的，还是数学的推理都是不能允许的”。看来既是独立坐标数和维数又是整数的假设是站不住脚的。况且近年来兴起的分形理论又迫使人们接触到分数维（Fractal dimension）的概念，这不得不使人们重新思考维数的性质及其所具有的意义。来自科学哲学的情报表明，一些富于探索精神的哲学家们，正在试图把分形的概念和思想抽

象为一种方法论，它是一种辨证的思维方法和认识方法。部分与整体的关系是一对古老的哲学范畴，也是分形理论的研究对象。把复杂事物分解为要素来研究是一条方法论原则——简单性原则。哲学史上，人们很早就认识到整体由部分组成，可通过认识部分来认识整体。系统中每一个元素都反映和含有整个系统的性质和信息，即元素映现系统，这可能是分形论的哲学基础之一。

从分析事物的视角方面来看，分形论和系统论分别体现了从两个极端出发的思路。它们之间的互补恰恰完整地构成了辨证的思维方法。系统论由整体出发来确立各部分的系统性质，它是沿着宏观到微观的方向考察整体与部分之间的相关性。而分形论则相反，它是从部分出发确立了部分依赖于整体的性质，并沿着微观到宏观的方向展开。系统论强调了部分依赖于整体的性质，而分形论则强调整体对部分的依赖性质。于是二者构成了“互补”。

分形论的提出，首先，打破了整体与部分之间的隔膜，找到了部分过渡到整体的媒介和桥梁，即整体与部分之间的相似。其次，使人们对整体与部分之间关系的思维方法由线性进展到非线性阶段，并同系统论一起，共同揭示了整体与部分之间多层面、多视角、多维度的联系方式。分形论从一个新的层面深化和丰富了整体与部分之间的辩证关系。再次，分形论为人们认识世界提供了一种新的方法论，它为人们从部分中认知整体，从有限中认知无限提供了可能的根据。最后，分形论的提出进一步丰富和深化了科学哲学思想中的关于普遍联系和世界统一性的原理。这主要表现在两个方向：一是分形论从一个特定层面直接揭示了宇宙的统一图景，同时，分形论所揭示的整体与部分的内在联系方式，是对宇宙普遍联系与内在统一的具体机制的一种揭示。恩格斯曾经把存在于自然、社会和思维中的普遍联系称之为“一幅由种种联系和相互作用无穷无尽地交织起来的画面。”这种联系的普遍机制应包括分形论。二是关于世界物质统一性，分形论可以从共时态与历史性两个维度上展开说明：一方面在自然界中蕴涵着历史的演化与嬗变的信息；另一方面部分与分形整体之间普遍的相似性编织了一张世界统一的网络。

分形论的产生，也是古代哲学思想在近代自然科学中的重现和历代思想家们智慧火花的积累。古老的宗教典籍《华严经》的中心主题是所有事物和事件的统一及相互关系。她是大乘佛教的核心，包括着朴素神秘的分形思想。这在因陀罗网的隐喻中表现很充分。用查尔斯·埃利奥特爵士的话说：在因陀罗的天堂里有一张宝石的网，你可以从其中的一个看到反映出来的其他所有宝石。世界上每一个物体也是一样，其不仅是自身，而且包含着其他所有物体。“在每一粒灰尘中都显现出无数的佛。”关于因陀罗网的隐喻可以说是东方圣贤在2500多年前提出的一个自相似分形模型。每一部分都与其他部分相似，并包含整体的信息的思想在《易经》、《黄帝内经》中有所反映。不仅如此，在西方的思想里也有自相似的影子。

宇宙的基本统一性不但是东方哲学的主要特征，而且也是现代物理学最重要的发现之一。在离子物理学中有一派认为，自然界的组成部分彼此组成，或者是自己的组成部分。这种观念是在S矩阵理论中产生的，被称为“靴袢假设”（自己依靠自己的意思）。杰弗里·丘把这种观念发展成关于自然的靴袢哲学。这种哲学使得现代物理学最终放弃了机械世界观，而把宇宙看成是相互关联事件的动态网络。在这张网络中没有任何部分的性质是基本的，它们都可以从其他部分的性质导出，它们相互关联的整体自洽性决定了整个网络

的结构。靳祥哲学标志着自然科学的高峰，在相对论中获得了动态的含义，并在 S 矩阵理论中用反应概率的语言描述出来。这种自然观最接近东方的世界观，从它的一般哲学和物质的具体结构来说都与东方思想协调一致。道教认为，世界上所有现象都是道的一部分，而这种道是自然界固有的。《道德经》中有“人法地，地法天，天法道，道法自然”。这里的道，也可以认为是分形的实质，即自相似性和嵌套性。

参 考 文 献

[1] B B Mandelbrot. Fractals: Form, Chance, and Dimension, W H [J]. Freeman and Company, San Francisco, 1977.

[2] Nada S I. Fractal dimension of chaotic dynamical spaces [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30 (2): 374 - 379.

[3] 曾文曲，刘世耀译. 分形几何 - 数学基础及其应用 [M]. 沈阳：东北大学出版社，1991.

[4] Eftaxias K. Review and a model of pre - seismic electromagnetic emissions in terms of fractal electrodynamics [J]. Fractals, 2004, 12 (2): 243 - 273.

[5] Kuzmin Yuriy I. Dynamics of the magnetic flux trapped in fractal clusters of a normal phase in percolative superconductors [J]. Journal of Low Temperature Physics, 2003, 130 (3 - 4): 261 - 286.

[6] Berezowski. MarekFractal character of basin boundaries in a tubular chemical reactor with mass recycle [J]. Chemical Engineering Science, 2006, 61 (4): 1342 - 1345.

[7] Pi Ming Hong. A low - complexity index for fractal image indexing [J]. Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering, 2005, 30 (2): 89 - 92.

[8] Pi Ming Hong. A novel fractal image watermarking [J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2006, 8 (3): 488 - 498.

[9] Park, Changhyup umerical analysis of diffusion in discrete fracture networks with fractal geometry by using pressure transient data Energy Sources, 2006, 28 (2): 187 - 198.

[10] Ziaei Ali Naghi. Keshavarzi Ali Reza, Homayoun. Emdad Fractal scaling and simulation of velocity components and turbulent shear stress in open channel flow [J]. Source: Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24 (4): 1031 - 1045.

[11] Dathe Annette. The relationship between fractal properties of solid matrix and pore space in porous media [J]. Geoderma, 2005, 29 (304): 279 - 290.

[12] Rahmani, Nazmul H G. Fractal structure of asphaltene aggregates [J]. Journal of Colloid and Interface Science, 2005, 285 (2): 599 - 608.

[13] Guber A K, Pachepsky Ya A, Levkovsky E V. Ecological Modelling [J]. Scaling, Fractals and Diversity in Soils and Echohydrology, 2005, 182 (3 - 4): 317 - 322.

[14] 刘式达，刘式适. 分形与分维引论 [M]. 北京：气象出版社，1995.

[15] 陈颙，等. 分形与混沌在地球科学中的应用 [M]. 北京：学术期刊出版社，1989.

[16] 安镇文. 岩石声发射和地震活动的信息维 [J]. 中国科学，1992，7 (B)：736 - 742.

[17] 谢和平. 分形 - 岩石力学导论 [M]. 北京：科学出版社，1996.

[18] Xie H, Pariseau W G. Fractal character and mechanism of rock burst [J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1993, 30: 343 - 350.

[19] 谢和平，陈至达. 分形几何与岩石断裂 [J]. 力学学报，1988，20 (3)：264 - 275.

[20] 谢和平. 非线性力学理论与实践 [M]. 北京：中国矿业大学出版社，1997.

[21] 冯德益，林命周．大地活动的模糊时间分维特性 [J]．中国地震，1991，5（2）：13－18.
[22] 马洪岭，谭云亮．岩石细观裂纹盒维数的计算机求解方法 [J]．矿业研究与开发，2006、26（2）：29－30.
[23] 谭云亮，等．矿山压力实测信息及预测模型 [M]．北京：煤炭工业出版社，1996.
[24] 谢和平，高峰，周宏伟，等．岩石破断盒破碎的分形研究 [J]．防灾减灾工程学报，2003、23（4）：1－9.
[25] Lung C Wcked metals. Fractals and fracture of cracked metal [J]. Preprint of int. Center for theoretical physics. Trieste, Italy IC/1985, 123.
[26] B B Mandelbort. The fractal geometry of nature [J]. New York, W H Freman, 1982.
[27] Takens F. Detecting strange attractor in turbulence [J]. Lecture notes in Matematics, 1981, 892 (2): 361－368.
[28] 阮吉寿，沈世镒．弱 Takens 嵌入定理 [J]．高校应用数学学报，2002，17（4）：419－424.
[29] Rossenstein M T, et al. Reconstruction expansion as a geometry based framework for choosing proper delay times [J]. Physica: D, 1994, 73 (1): 82－98.
[30] Stefansson A, et al. A note on gamma test [J]. Neural computing and applications, 1999, 5 (2): 131－133.
[31] Otani M, et al. Automated embedding and creep phenomenon in chaotic time series [EB/ OL] http: // www. cs. cf. ac. uk/ ec. 2003.
[32] 马红光、李夕海，等．相空间重构中嵌入维和时间延迟的选择 [J]．西安交通大学学报、2004、38（4）：335－338.
[33] Kugiumtzis D, et al. Chaotic time series, part I: estimation of some invariant properties in state space [J]. Modeling identification and control. 1994, 15 (4): 205－224.
[34] Martinerie J M, et al. Mutual information, stranger attractors and the optimal estimation of dimension [J]. Phys Review A, 1992, 45: 7058－7064.
[35] 修春波，等．相空间重构延迟时间与嵌入维数的选择 [J]．北京理工大学学报，2003、23（2）：219－224.
[36] Grassberger P, Procaccia I. Demensions and entropies of stranger attractor from a fluctuating dynamics approach [J]. Physcia D, 1984.
[37] 谭云亮，石永奎．坚硬顶板运动过程中声发射分形特征 [J]．东北大学学报，1994，15（增）：32－336.
[38] 谭云亮，王泳嘉．煤矿顶板冒落预报的分形研究[J]．中国安全科学学报，1995，5（增）：121－125.
[39] 谭云亮，杨永杰．煤矿顶板冒落分形预报可行性研究 [J]．岩石力学与工程学报，1996，15（1）：90－95.
[40] 谭云亮，王学水．煤矿坚硬顶板活动过程中声发射特征的研究 [J]．岩石力学与工程学报，1992，11（3）：211－217.
[41] 张继春，钮强，徐小荷．岩体节理间距分布的分形模型研究 [J]．金属矿山，1994（2）：19－23.
[42] Priest S D, Hudson J A. Discontinuity spacings in rock [J]. Int J Rock Mech Min Sc & Geomech Abstr, 1976, 13: 135－148.
[43] 孙博文，等．维数的性质及其哲学意义 [J]．自然辩证法研究，1994（11）.
[44] 李后强．关于分形理论的哲学思考 [J]．自然辩证法研究，1993（4）.
[45] 吴云，周硕愚，孙建中．关联指数误差与样本容量 [J]．地壳变形与地震．1994，14（1）：45－51.
[46] Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence [J]. Commun. Math. Phys, 1971, 20: 167－192.

5 岩石力学的突变问题

5.1 突变基本理论

在自然界和人类社会活动中，除了渐变的和连续光滑的变化现象外，还存在着大量的突然变化和跃迁现象，如水的沸腾、岩石的破裂、矿山突水[9,29]、桥梁的崩塌、地震、细胞的分裂、生物的变异、人的休克、情绪的波动、战争、市场变化、经济危机等。这些普遍存在的突变现象，其共同点在于，事物从性状的一种形式突然地跳跃到根本不同的另一种形式的不连续变化，包含着突然变化的瞬时过程。对此，法国数学家 Thom 于 1972 年以奇点理论、稳定性理论等为基础，建立了突变理论（Catastrophe Theory）[1]，用于研究不连续变化现象。其代表作为 1972 年出版的《Structural Stability and Morphogenesis》[2]，并因此荣获国际数学界的最高奖——菲尔兹奖章。突变论的出现引起各方面的重视，被称之为“是牛顿和莱布尼茨发明微积分 300 年以来数学上最大的革命”。

作为初等突变理论，随着系统变量幂次的增高和控制参数数目的增加，目前分为 7 种突变模型[4]，即折迭型突变（Fold Catastrophe）、尖点型突变（Cusp Catastrophe）、燕尾型突变（Swallowtail Catastrophe）、蝴蝶型突变（Butterfly Catastrophe）、双曲型脐点（Hyperbolic Umbilic）、椭圆型脐点（Elliptic Umbilic）和抛物型脐点（Parabolic Umbilic），其方程形式见表 5－1。

随着幂次增加，系统的复杂程度将大幅度增加，解的讨论将变得极为复杂，所以迄今为止，在岩石力学领域中折迭突变和尖点突变应用最为广泛。为此，本节将主要介绍最为简单的折迭突变、尖点突变和燕尾突变三种类型。

表 5－1 7 种初等突变函数

突变名称	状态变量数目	控制变量数目	势函数形式	平衡曲面形式
折迭型突变	1	1	$V(x)=x^3+ux$	$3x^2+u=0$
尖点型突变	1	2	$V(x)=x^4+ux^2+vx$	$4x^3+2ux+v=0$
燕尾型突变	1	3	$V(x)=x^5+ux^3+vx^2+wx$	$5x^4+3ux^2+2vx+w=0$
蝴蝶型突变	1	4	$V(x)=x^6+ux^4+ux^3+vx^2+wx$	$6x^5+4ux^3+3ux^2+2vx+w=0$
椭圆型脐点	2	3	$V(x,y)=(1/3)x^3-xy^2+w(x^2+y^2)-ux+vy$	$x^2-y^2+2wx-u=0$ $-2xy+2wy+v=0$
双曲型脐点	2	3	$V(x,y)=x^3+y^3+wxy-ux-vy$	$3x^2+wy-u=0$ $3y^2+wx-v=0$
抛物型脐点	2	4	$V(x,y)=y^4+x^2y+wx^2+ty^2-ux-vy$	$2xy+2wx-u=0$ $4y^3+x^2+2ty-v=0$

5.1.1 初等突变的数学判据

对于初等突变理论而言，由于其数学基础是根据系统的势函数而对临界点进行分类，进而研究各类临界点附近非连续状态的特征及可能遵从的变化（不连续）规律，因此突变理论研究的仍是状态的分岔（叉），即平衡点间的相互转换问题[3]，只不过不只是考虑单一参数的变化，而是考虑多个参数变化时平衡点附近分岔情形。

分岔与突变相比较，分岔是系统的局部性质，一般可用泰勒展开的线性项的 Jacobi 矩阵的特征值来研究；而突变则是系统的整体性质，表现为从一种吸引子跳到另一种吸引子上，而不仅仅是平衡态稳定性问题，因此，一般是用能表征系统全局性质的势函数来研究。

对于一维连续动力系统：

$$y=\varphi(y,a_i) \tag{5-1}$$

式中 $\varphi(y,a_i)$ ——光滑的实值函数；

a_i——系统的控制参数；

i——控制参数的个数，其反映了单位质量的系统动力行为，即为广义力。

既然 $\varphi(y,a_i)$ 是光滑函数，那么可以找到一个广义势 V，使其梯度与之等价：

$$\varphi(y,a_i)=-\frac{\partial V}{\partial y} \tag{5-2}$$

从而，有

$$V=-\int\varphi(y,a_i)\,\mathrm{d}y \tag{5-3}$$

对于一个动力学系统而言，其定态条件为 $\varphi(y,a_i)=0$，比较位势的定义势式（5-2）可知，一维连续动力系统的定态正好对应于位势的极值位置，即 $\frac{\partial V}{\partial y}=0$。根据能量原理可知，位势越小的系统将越稳定。当位势取极小值时，对应的定态是稳定的；当位势取极大值时，对应的定态是不稳定的。

由于位势从极大变化到极小或从极小变化到极大，必有一临界点，即拐点：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{5-4}$$

因此，系统突变点集的约束条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\end{cases} \tag{5-5}$$

5.1.2 折迭突变

考察势函数：

$$V(y)=y^3+ay \tag{5-6}$$

由突变点集的约束条件式（5-5）得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial y}=3y^2+a=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=6y=0\end{cases} \tag{5-7}$$

求得系统发生突变的参数约束条件为

$$a=0$$

以及符合突变约束条件的突变点集（该例只有一个突变点）：

$$y=0;\ a=0$$

根据式（5-7）知系统的定态解为

当 $a>0$ 时，无解；

当 $a<0$ 时，有两个定态解，即

$$A\text{点：}\ y_A=\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

$$B\text{点：}\ y_B=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

很显然，对于 A 点，$\frac{\partial\varphi(y,a_i)}{\partial y}=-6y<0$，即系统稳定；对于 B 点，$\frac{\partial\varphi(y,a_i)}{\partial y}=-6y>0$，即系统不稳定。

由图5-1可知，定态 A 和定态 B 分别对应于系统位势的极小值和极大值。

进一步可以得知，定态 y 与参数 a 之间的关系，如图5-2所示。如果将稳定平衡态 $y>0$ 与不稳定平衡态 $y<0$ 沿着参数 a 轴对称折迭，便形成突变点随参数 a 的变化曲线。如图5-3所示，其折迭点恰好为突变点，故称为折迭突变。

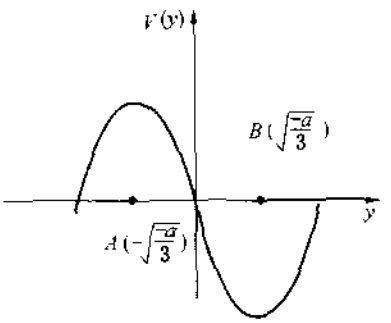


图5-1 $V(y)=y^3+ay$ 的极值

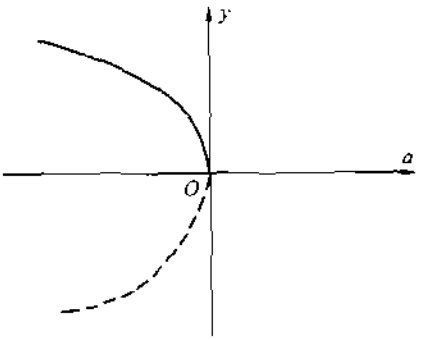


图5-2 定态与参数 a 的关系

Thom 已证明，对于任意三次的位势函数突变模型，不论控制参数的数目是多少，其稳定性性质和突变性质均等价于一个参数的系统。

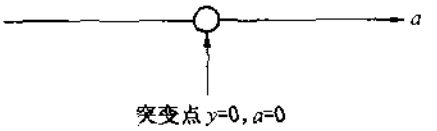


图5-3 突变点随参数 a 变化

5.1.3 尖点突变

设势函数最高次幂为4，即

$$V(y)=y^4+\alpha_1y^2+\alpha_2y \tag{5-8}$$

在该系统中有一个变量 y 和两个控制参数 α_1、α_2，从而可以构成三维相空间。

由系统突变的约束条件式（5-5）有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial y}=4y^3+2\alpha_1 y+\alpha_2=0\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=12y^2+2\alpha_1=0\end{cases}\tag{5-9}$$

由式（5－9）可得到突变点所应服从的控制参数关系：

$$8\alpha_1^3+27\alpha_2^2=0\tag{5-10}$$

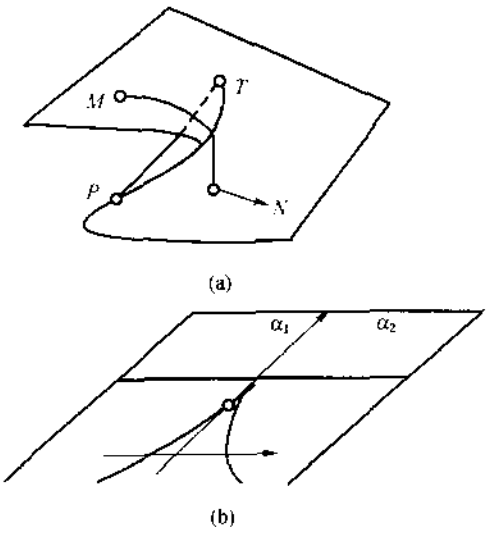


图5－4　尖拐点突变系统的平衡曲面和控制空间

图5－4a显示了定态 y 与控制参数 α_1、α_2 之间的关系曲线。在 y、α_1、α_2 构成的三维相空间中，定态总是位于平衡曲面上，要么在平衡曲面的上叶，要么在平衡曲面的下叶，因为中叶是不稳定的，不稳定的定态永远是不可到达的。

图5－4b是突变点集即平衡曲面的折痕在控制参数 $\alpha_1-\alpha_2$ 平面上的投影。它是由形成尖点的两条曲线所组成，所以称尖点突变。

平衡曲面上任一相点（y，α_1，α_2）的 y 值几乎总是随着控制参数 α_1、α_2 的连续变化而平稳变化。仅当其控制参数 α_1、α_2 的取值越过曲线 $8\alpha_1^3+27\alpha_2^2=0$ 时，y 值才发生突变。即若相点恰好在曲面终止的边缘上（曲面回折而形成中叶处），则它必定跳跃到另一叶上。

齐曼总结了尖点突变的5条典型性质：

（1）突然跳跃性。当平衡相点随着控制参数 α_1、α_2 的连续变化而运动到上（下）半叶平衡曲面的边缘上时，必将突然跳跃到下（上）半叶平衡面上。

（2）滞后性。由于平衡曲面上半叶与中叶的折痕和下半叶与中叶的折痕不重合，而是呈现图5－4b所示的尖点叉型曲线，因此，当系统在 T 点从上半叶曲面 M 跳到下半叶曲面 N 后，若再让控制参数按原来路径返回时，系统将在 P 点跳回上半叶曲面。显然 P 点滞后于 T 点。这就是突变的滞后性。其滞后程度由图5－4b中的控制参数曲线所决定。

（3）多模态。在 $\alpha_1-\alpha_2$ 的尖拐曲线内，势函数有两个极小值，即存在两个可能的稳定定态。处于定态曲面中叶的不稳定定态，既可向上叶的稳定定态跳跃，也可向下叶的稳定定态跳跃，而这两种可能都是可以实现的。

（4）不可到达性。由于平衡曲面的中叶对应着不稳定的平衡态（定态），因此，中叶不可到达。

（5）发散性。对于尖点突变点集的所有点而言，控制参数的微小变化将导致系统可能的终态有较大（或很大）的差异。

对于最高幂次为 y^4 的突变系统，不管控制参数多少，其稳定或突变性质总等价于含两参数 α_1、α_2 的系统。

5.1.4　燕尾突变

对最高次幂为5的位势函数：

$$V(y)=y^5+\alpha_1 y^3+\alpha_2 y^2+\alpha_3 y \tag{5-11}$$

由式（5-5）给出的突变点集约束条件有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial y}=5y^4+3\alpha_1 y^2+2\alpha_2 y+\alpha_3=0\\[2ex]\dfrac{\partial V^2}{\partial y^2}=20y^3+6\alpha_1 y+2\alpha_2=0\end{cases} \tag{5-12}$$

显然，这是有一个系统变量 y，三个控制参数 α_1、α_2、α_3 的动力系统，其相空间是四维的，所以人们无法画出等价于图 5-4a 和图 5-4b 的图形，只好由控制参数 α_1、α_2、α_3 构成相空间，来分析系统的突变特征。

对于由控制参数 α_1、α_2、α_3 构成的突变点集控制方程所形成的曲面 B，在控制参数 α_3、α_2 所形成的相平面 B_1 上的投影，可以取 α_1 为常数，而把 y 当作参数进行分析。由式（5-12）得

$$\begin{cases}y=0,\ \alpha_3=0\\y=0,\ \alpha_2=0\end{cases} \tag{5-13}$$

由式（5-12）可知，α_2 是关于 y 的奇函数，且

$$\begin{aligned}&y\to+\infty \text{ 时},\quad &&\alpha_2\to-\infty\\&y\to-\infty \text{ 时},\quad &&\alpha_2\to+\infty\end{aligned} \tag{5-14}$$

在式（5-12）中消去 α_2 有

$$\alpha_3=15y^4+3\alpha_1 y^2 \tag{5-15}$$

所以，α_3 是关于 y 的偶函数，且

$$y\to\pm\infty \text{ 时},\quad \alpha_3\to+\infty$$

由于 α_3 是关于 y 的偶函数，而 α_2 是关于 y 的奇函数，因此 α_3 是关于 α_2 的偶函数。进一步解算式（5-12）得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}y}=-(30y^2+3\alpha_1) \tag{5-16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_3}{\mathrm{d}y}=-2y\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}y} \tag{5-17}$$

尖点所应满足的条件是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}y}=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\alpha_3}{\mathrm{d}y}=0\end{cases} \tag{5-18}$$

极值点的条件是

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_3}{\mathrm{d}\alpha_2}=0 \tag{5-19}$$

若 $\alpha_1>0$，则由式（5-16）得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}y}<0 \tag{5-20}$$

若 $\alpha_1>0$，则 B_1 不存在尖点。

由式（5-17）可知，当 $y=0$ 时

$$\left.\frac{d\alpha_3}{d\alpha_2}\right|_{y=0} = -2y = 0 \tag{5-21}$$

所以当 $\alpha_1 > 0$ 时，B 有一极值点，且因 $y<0$ 时，$\frac{d\alpha_3}{d\alpha_2} > 0$，$y>0$ 时，$\frac{d\alpha_3}{d\alpha_2} < 0$，故该极值点为极小点。

从而，可以得到 $\alpha_1 > 0$ 时的 B_1 曲线，即突变点集曲面方程 B 在 $\alpha_3 - \alpha_2$ 相平面的投影，如图 5-5a 所示。若 $\alpha_1 < 0$，则由式（5-16）可知

当 $y = \pm\sqrt{-0.1\alpha_1}$ 时

$$\frac{d\alpha_2}{dy} = 0 \tag{5-22}$$

由式（5-17）及式（5-18）有

$$\left.\frac{d\alpha_3}{dy}\right|_{y=\pm\sqrt{-0.1\alpha_1}} = 0 \tag{5-23}$$

所以，$y = \pm\sqrt{-0.1\alpha_1}$ 是两个尖点。

由式（5-12）可知：当 $\alpha_2 = 0$ 时

$$y = \pm\sqrt{-0.3\alpha_1} \tag{5-24}$$

现在考察一下两个尖点在 $\alpha_3 - \alpha_2$ 相平面上的定性位置。

由式（5-12）可知：当 $y = \pm\sqrt{0.1\alpha_1}$ 时

$$\alpha_2 = -10y^3 - 3\alpha_1 y = \mp 2\alpha\sqrt{-0.1\alpha_1} \tag{5-25}$$

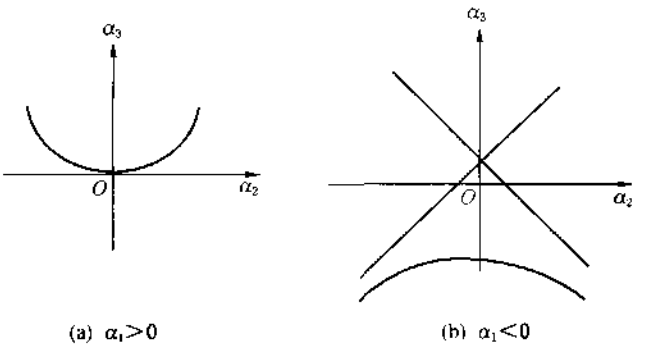
$$\alpha_3 = -5y^4 - 3\alpha_1 y^2 - 2\alpha_2 y = -0.15\alpha_1^2 < 0 \tag{5-26}$$

所以这两个尖点是关于 α_3 对称的，且位于 α_2 轴以下，从而极值点（$y=0$，$\alpha_2 = 0$）是一极小点。

根据上面关于尖点和极小点位置的讨论，可画出 $\alpha_1 < 0$ 时的 B_1 曲线，如图 5-5b 所示。

下面讨论，突变点集 B 曲面的定性结构。当 $y = \pm\sqrt{-0.3\alpha_1}$ 时，$V=0$，将这两个值代入式（5-12）可得

$$\alpha_3 = 0.45\alpha_1^2,\quad \alpha_2 = 0 \tag{5-27}$$



(a) $\alpha_1 > 0$　　(b) $\alpha_1 < 0$

图 5-5　燕尾分歧点集的截线

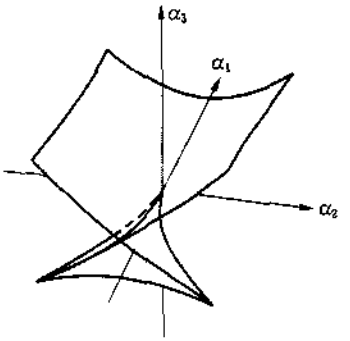


图5-6 燕尾的分歧点集[5]

将图5-5a、图5-5b与式（5-27）汇集，可得到如图5-6所示的由控制参数α_1、α_2、α_3构成的突变点集B的曲面方程，其形状为“燕尾”状，故称为“燕尾突变”。

突变点集曲面（线）是平衡位置的个数和性质改变的界线。所以要研究参数空间中各点对应的平衡位置的总数及其性质，只要在每个区域中找一点进行分析即可。

若取$\alpha_2=0,\alpha_1<0$的情形，则由式（5-12）第一式可得

$$y^2=-\left(-3\alpha_1\pm\sqrt{9\alpha_1^{\ 2}-20\alpha_3}\right) \tag{5-28}$$

显然：

（1）若$9\alpha_1^{\ 2}-20\alpha_3<0$，即$\alpha_3>\frac{9}{20}\alpha_1^{\ 2}$，则此时式（5-28）无实根，即$\alpha_2$无临界点。

（2）若$9\alpha_1^{\ 2}-20\alpha_3>0$，即$0<\alpha_3<9\alpha_1^{\ 2}/20$，则由于$(9\alpha_1^{\ 2}-20\alpha_3)^{1/2}$是实数并小于正实数$-3\alpha_1$，而$y^2$的两个解都是正实数，因此$\alpha_2$有4个临界点：两个极大点和两个极小点。

（3）若$\alpha_3<0$，则此时y^2的两个解都是实数，但其中一个是负数，故α_2只有两个临界点：一个极大点和一个极小点。

5.2 煤巷掘进迎头煤与瓦斯突出的突变模型

对于层状结构明显的地下巷道，其围岩失稳破坏灾变包括巷道掘进施工迎头、顶板、底板和两帮等部位。由于受掘进工程扰动的影响，煤巷掘进迎头处是发生煤与瓦斯突出现象高频率部位，统计表明[6]，在各类巷道发生的突出中，平巷突出的次数最多，为了揭示掘进迎头处煤与瓦斯突出的机理，赵志刚、谭云亮等[7]将巷道简化为圆形，并将掘进迎头视为圆形直立层裂板建立力学模型，导出了层裂板总势能函数的表达式，建立了圆形层裂板的折迭突变模型，得出了瓦斯突出起动的突变条件，并用有限元的方法进行了数值模拟，研究表明层裂板两侧压力差超过临界值将导致瓦斯突出。

5.2.1 突变解析力学模型

为简化分析，巷道视为圆形，掘进后形成的暴露面视为平面，并假设：

（1）煤层倾角90°；

（2）煤层内是连续、均匀介质，且各向同性；

（3）忽略煤体自重；

（4）考虑刚揭露时，掘进迎头内瓦斯压力分布均匀。

随着巷道开挖工程的不断进行，巷道围岩内的应力重新分布。一般在掘进迎头一定的距离内因应力集中导致裂隙产生与扩展，裂隙内瓦斯积聚。当瓦斯压力产生的拉应力大于煤岩抗拉强度时，裂隙被撕开，最终形成与暴露面平行的薄层，称为层裂板。层裂板两侧存有两种气体：压力较大的瓦斯与压力较小的巷道空气。如果层裂板内有足够数量的气体

渗流通道，使得两侧压力差迅速降低，层裂板就可能保持稳定状态，否则层裂板会在气体压力差的作用下失稳破坏，煤体碎片向巷道抛出，即造成煤与瓦斯突出，突出阵面继续向深部推进，形成持续的突出现象。突出将在下述两种情况下停止：

（1）煤岩强度增大，地应力和瓦斯压力无法将其撕裂形成层裂板；

（2）层裂板两侧压力差降低，不足以导致层裂板失稳。

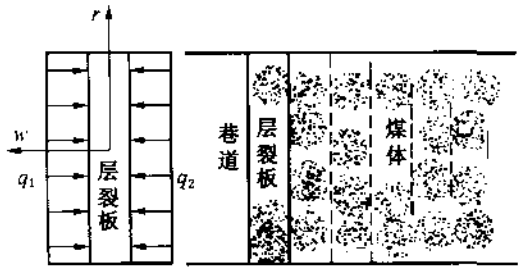


图 5-7　圆形层裂板模型

根据上述分析，提出平巷煤与瓦斯突出的圆形层裂板模型如图 5-7 所示，板的半径为 a，与巷道半径相同，板左侧受有巷道空气压力 q_1，右侧受有瓦斯压力 q_2，均视为均匀压力，其合力 $q_0 = q_2 - q_1$，方向与瓦斯压力方向相同。层裂板右侧虚线表示已经开裂但尚未连通的裂缝，这些裂缝会在瓦斯压力和地应力作用下逐渐贯通成大裂缝形成新的层裂板。

层裂板具有夹支边，边界条件为

$$(w)_{r=a} = 0, (\mathrm{d}w/\mathrm{d}r)_{r=a} = 0 \tag{5-29}$$

板轴向位移可表示为[8]

$$w = w_{\mathrm{m}}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \tag{5-30}$$

式中　w_{m}——板中心轴向位移。

5.2.2　圆形层裂板突变分析

按照突变理论的研究方法，首先应该求出层裂板系统的势函数 Π，上述层裂板系统的势函数 Π 可以表示为

$$\Pi = U - W \tag{5-31}$$

式中　Π——系统的总势能；

U——层裂板的变形势能；

W——外力所做的功。

层裂板具有夹支边界，边界条件见式（5-29），由弹性力学可知

$$U = \pi D\int_0^a \left[r\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\mathrm{d}r \tag{5-32}$$

式中　D——板的弯曲刚度，$D = Et^3/[12(1-\mu^2)]$；

t——板的厚度；

E——板的弹模；

μ——泊松比。

将式（5-30）代入式（5-32）积分可得

$$U = \frac{32\pi D}{3a^2} w_{\mathrm{m}}^2 \tag{5-33}$$

外力功 W 由两部分组成：瓦斯压力在轴向位移方向上所做的功 W_1 和在径向位移方向上所做的功 W_2。在轴向位移方向上的功可表示成

$$W_1 = \int_0^a \int_0^{2\pi} q_0 w r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = \frac{1}{3}\pi q_0 a^2 w_m \tag{5-34}$$

式中 q_0——瓦斯压力与巷道空气压力的压力差。

W_2 可表示为

$$W_2 = \iint q_0 u_r r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}w \tag{5-35}$$

式中 u_r——径向位移；

W_2——积分后可得[9]：

$$W_2 = -0.04\pi q_0 w_m^3 \tag{5-36}$$

由式（5-33）、式（5-34）、式（5-36）可得系统的势函数为

$$\Pi = 0.04\pi q_0 w_m^3 + (32\pi D/3a^2) w_m^2 - 1/3\pi q_0 a^2 w_m \tag{5-37}$$

令 $w_m = x - 800D/3a^2 q_0$，并舍去与 x 无关的项，可得

$$\Pi = 0.04\pi q_0 x^3 + (1024\pi D^2/a^6 q_0 - 1/25\pi q_0) x \tag{5-38}$$

令 $x = \sqrt[3]{25/(3\pi q_0)}\, y$，则

$$\Pi = 1/3 y^3 + by \tag{5-39}$$

式中，$b = (1024\pi D^2/a^6 q_0 - 1/25\pi q_0)\sqrt[3]{25/(3\pi q_0)}$。

式（5-39）为突变模型的标准形式，煤与瓦斯突出的过程符合折迭突变模型。

对于一个力学系统，若其处于平衡状态，其势函数必取驻值，故本系统的平衡方程为

$$\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}y = y^2 + b = 0 \tag{5-40}$$

由突变理论可知，b 大于零时系统安状态，b 小于零时，状态变量可取两个值，b 等于零是系统稳定和失稳的临界状态，令 $b=0$，整理后可得

$$q_0 = \frac{40Et^3}{3a^3(1-\mu)} \tag{5-41}$$

式（5-41）即为瓦斯突出的临界压力的计算式。当瓦斯压力超过该值时便发生失稳破坏，瓦斯突出；若瓦斯压力不超过该值，则煤岩系统稳定。

由式（5-40）可得

$$y = \pm\sqrt{-b} \tag{5-42}$$

其中，y 的两个值对应着突出前后的两个状态，代入到式（5-39）中可求出突出前后系统势能的变化：

$$\Delta\Pi = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{25}\pi q_0 - \frac{1024\pi D^2}{a^6 q_0}\right)^{3/2} \times \left(\frac{25}{3\pi q_0}\right)^{1/2} \tag{5-43}$$

其变化的势能一部分转化为应力波，将煤体粉碎；另一部分转化为煤体动能，向巷道抛出。设煤岩弹模为 1.5GPa，泊松比为 0.3，巷道半径为 2m，层裂板厚为 0.05m，失稳时板侧压力差为 2.5MPa，则由式（5-43）可计算出，一层层裂板失稳释放出的能量为 11500J，若以四川天府矿务局三汇一矿（突煤 12780t）为例，释放的能量可达 1.6×10^8J，相当于里氏 2.6 级地震。

根据上述分析，瓦斯突出有两个必经环节：层裂板的形成与失稳，只要能够切断其中一个就可以有效防止突出发生。在实践中，可采用下列方式预防煤与瓦斯突出：

（1）开采保护层。保护层开采后，顶底板会垮落和卸压，形成裂隙带和卸压带，裂隙带和卸压带范围内的煤体透气性可增大几十倍，瓦斯得到排放，瓦斯压力降低，这就可以有效防止层裂板的形成。

（2）预抽煤层瓦斯。经过一段时间的煤层瓦斯抽排，可以降低瓦斯压力，防止层裂板形成或降低层裂板两侧压力差，防止层裂板失稳。

（3）煤层注水。含水量达到5%，煤岩力学性质发生很大变化，强度、弹模降低，泊松比增大，峰值应力对应的应变增大数倍，这样就很难形成完整的层裂板，从而防止煤与瓦斯突出发生。

5.2.3 数值模拟分析

根据图5-7所示的掘进迎头条件，建立图5-8所示的层裂板计算模型。其中，层裂板半径为2m，厚度取0.05m，约束条件为周边固支，轴向施加均布荷载 q_0，加载后，层裂板的变形图（放大500倍）和应力等值线图如图5-9a、图5-9b所示。

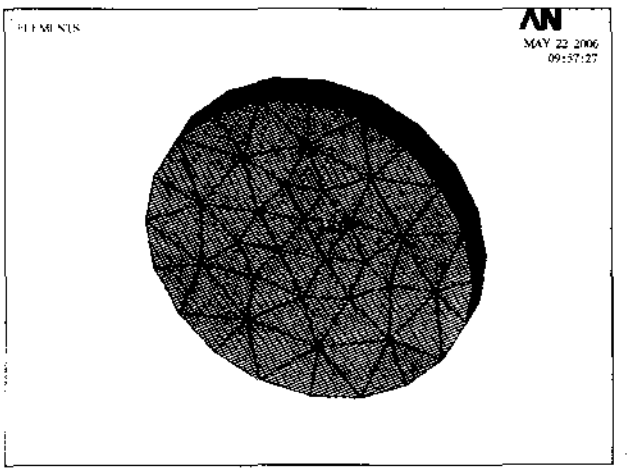


图5-8 层裂板的计算模型

单元应变数值超过峰值应力对应的应变后，即认为该单元进入峰后软化段，计算应变结果可得到进入软化段的单元数占总单元数的比例 k，以压力差 p_0 为横坐标，以 k 为纵坐标建立坐标系。改变 p_0 得到对应的 k 值，连成光滑曲线如图5-10所示。图5-10表明随着压力差的增大，进入软化段的单元数量增多，根据Dirichlet准则[10]，当系统总势能的二阶变分满足式（5-44）时，则系统失稳：

$$\int_{V_e} \delta\{\mathrm{d}\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D_e]\delta\{\mathrm{d}\varepsilon\}\mathrm{d}V + \int_{V_p} \delta\{\mathrm{d}\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D_p]\delta\{\mathrm{d}\varepsilon\}\mathrm{d}V \leqslant 0 \tag{5-44}$$

式中 $\mathrm{d}\varepsilon$——煤体的应变增量；

D_e，D_p，V_e，V_p——煤岩变形系统应变硬化和应变软化区的材料性质矩阵和体积。

数值模拟表明，随着压力差的增大，进入软化区的单元增多，当压力差达到某一特定值时（临界值），系统失稳，这与前述分析的结论是一致的。

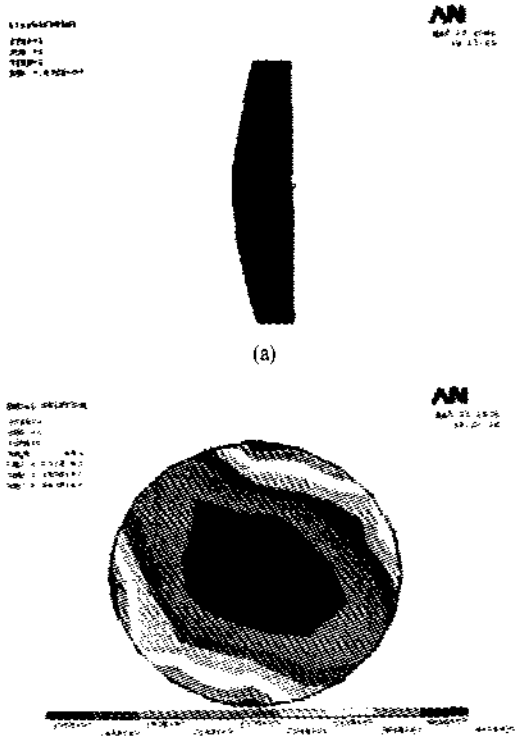


图 5-9　计算结果

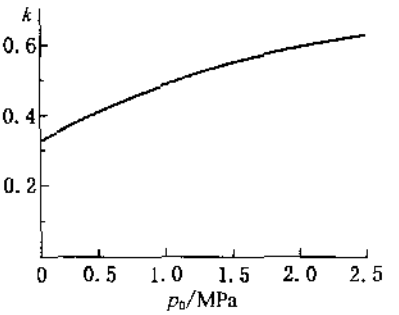


图 5-10　软化区体积占总体积的比例与压力差的关系

5.3　洞壁层裂屈曲岩爆突变模型

左宇军等[11]应用突变理论分析洞室层裂屈曲岩爆的准静态破坏情况，并对动力扰动下的层裂屈曲岩爆进行分析，探讨该类岩爆的发生机制。

5.3.1　力学模型

洞室层裂屈曲岩爆中的“劈裂成板”，可能由于岩爆段局部岩体属于板裂结构，也可能由于岩体中裂纹在多种组合因素作用下进行演化，将本来很完整的岩体“劈裂”成层状结构。这些层状结构之间存在着黏结力。当洞室还有支护时，沿室壁面的支护作用力使黏结力加强。根据板梁脆性弹簧力学模型[12]，洞室壁面向临空面的变形越大，内层岩体对外层岩体约束作用越强，所以，可以引入一函数 $f(w)$ 来表征内层岩体对外层岩体的约束作用的发展演化过程：

$$\sigma_N = \sigma_c f(w) \tag{5-45}$$

式中　σ_N——黏结力；

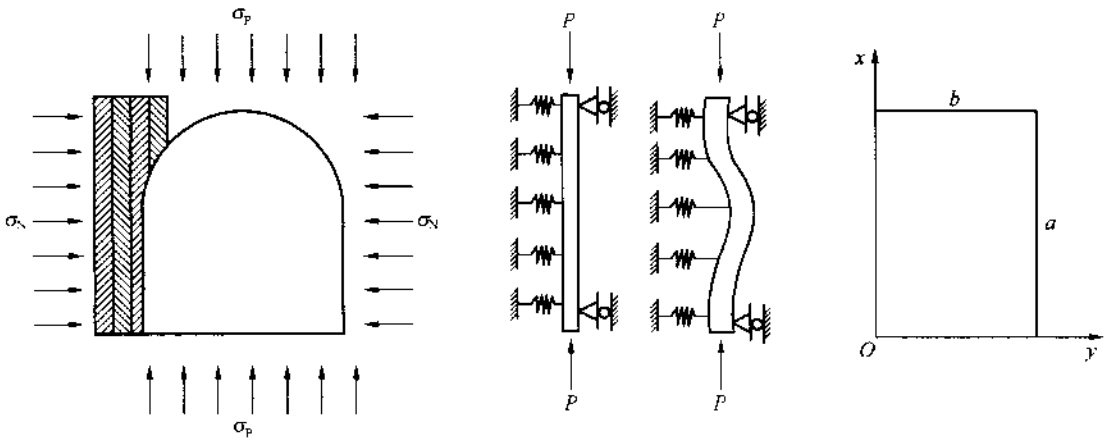
σ_c——最大黏结力，可用岩体抗拉强度来代替；

w——层状结构岩体某点的变形（挠度）；

$f(w)$——岩石性质、岩石结构、受力状态和位置的函数，可根据具体情况确定。

$f(w)$ 的取值范围为 [0, 1]，反映弹簧特性：当 $w = 0$ 时，$f(w) = 0$；当达到弹簧强

度时，$f(w)=1$，此时，岩石发生层裂破坏。在重力场和构造应力场作用下，层状结构岩体产生向临空面的变形，同时裂纹沿层裂面继续扩展，当变形到一定程度时，发生岩爆。根据洞室层裂屈曲岩爆的发生机理，可以简化成图 5－11 所示的力学模型，即将似层状结构岩体视为宽度为 b、高度为 a、厚度为 h 的板梁，板的竖向受力为 P、对应的应力为 σ_P，横向受力为黏结力 σ_N，矩形板在 $x=0$ 和 $x=a$ 的边为可移简支边，在 $y=0$ 和 $y=b$ 的边为不可移简支边。



(a) 洞室岩壁两维受力图　(b) 洞壁某裂开层的受力分析图(左)及屈曲示意图(右)　(c) 板梁结构示意图

图 5－11　板梁力学模型[11]

为了分析方便，将模型进一步简化，假设板梁变形后挠度 w 仅是 x 的函数，取 y 方向单位长度板梁进行分析。由于作用力的变化，上述力学模型不断从一个平衡状态变到另一个平衡状态。首先考虑其准静态运动过程。根据文献［13］，可假定板梁变形后的挠度曲线形式为

$$w=A\sin\frac{\pi x}{a} \tag{5-46}$$

式中　A——$x=a/2$ 处的挠度，是板梁在破坏之前的最大变形值；

a——板梁弯曲变形所涉及的长度。

假定函数 $f(w)$ 可粗略表述为

$$f(w)=\frac{w}{A}=\sin\frac{\pi x}{a} \tag{5-47}$$

由式（5－45）和式（5－47）可知，板梁黏结力大小随 x 方向呈正弦分布，板梁变形越大，板梁之间的黏结力越大，当黏结力大于其强度时，岩石发生失稳破坏。所以，式（5－47）基本上反映了局部岩石发生层裂时其内部黏结力的变化规律。

由弹性理论可知，任一结构体系的总势能 V 可表示为结构的应变能 U 和荷载势能的组合：

$$V = U - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i \tag{5-48}$$

式中 P_i——结构上的荷载；

δ_i——相应位移；

n——荷载个数。

对于上述模型，水平力在加载过程中做负功，因而，有

$$V = U - W_P + W_S \tag{5-49}$$

式中 W_P——垂直力所做的功；

W_S——水平力所做的功。

由弹性理论可知，板内储存的应变能力为

$$U = \frac{D}{2}\int_0^a k^2 \mathrm{d}s \tag{5-50}$$

式中 s——挠度曲线的弧长；

k——岩板的曲率；

D——岩板的刚度，$D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$；

μ——泊松比。

由式（5-50）得

$$U = \frac{D}{2}\int_0^a \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}}\mathrm{d}w \tag{5-51}$$

其中，式（5-51）中略去了 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ 的高次项。

$$W_S = \int_0^a \sigma_S h w \mathrm{d}x \tag{5-52}$$

$$W_P = \frac{1}{2}\int_0^a \sigma_P h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{5-53}$$

将式（5-51）~式（5-53）代入式（5-49），同时考虑式（5-45）和式（5-47），并对式（5-49）中的被积函数在 $A=0$ 处进行泰勒展开，然后积分，略去高于 A^4 的项，得

$$V(A) = \frac{Da}{32}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6 A^4 + \left[\frac{Da}{4}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 - \frac{\pi^2 h\sigma_P}{4a}\right]A^2 + \frac{ah\sigma_c}{2\pi}A \tag{5-54}$$

将式（5-54）中右边的各项分别简化，取

$$z = \left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\right]^{\frac{1}{4}} A \tag{5-55}$$

$$u = \left[\frac{Da}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 - \frac{\pi^2 h\sigma_P}{2a}\right]\left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{8}\right)^6\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{5-56}$$

$$v = \frac{ah\sigma_c}{2\pi}\left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\right]^{-\frac{1}{4}} \tag{5-57}$$

则式（5-54）可化为尖点突势函数的标准形式：

$$V = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}uz^2 + vz \tag{5-58}$$

式中 z——状态变量，主要与挠度有关；

u，v——控制变量。

u 主要与竖向受力 P 有关，v 主要与水平方向上的黏结力 σ_N 有关。令 $V'(z)=0$，得平衡曲面方程：

$$z^3+uz+v=0 \tag{5-59}$$

平衡曲面的分叉集应满足 $V''(z)=0$，经代换得

$$4u^3+27v^2=0 \tag{5-60}$$

分叉集为一半立方抛物线，在分叉集上的（u、v）点对应于系统的临界状态。

5.3.2 洞室层裂屈曲岩爆的条件

根据所建立的突变模型，可得出洞室层裂屈曲岩爆的条件[14]。

1. 岩爆的必要条件

只有当 $u\leqslant 0$ 时，点（u，v）才有跨越分叉集的可能[14]。由式（5-56）得到系统状态发生突变的必要条件：

$$\sigma_p \geqslant \frac{\pi^2 D}{a^2 h} \tag{5-61}$$

式中 σ_p——临界竖向应力。

所以，岩石处于一定的高应力状态是发生岩爆的必要条件，这与实际情况相符。若 σ_p 已知，则也可以预估岩爆的范围，即

$$a \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 D}{h\sigma_p}} \tag{5-62}$$

2. 岩爆的充分条件

突变理论认为，对于处在临界状态的系统，微小的外力扰动，便会使系统产生巨大的响应（突变），故分叉集方程便成了突变的充分条件。将式（5-56）和式（5-57）代入式（5-60）得

$$4\left[\frac{Da}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4-\frac{\pi^2 h\sigma_p}{2a}\right]^3\left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\right]^{-\frac{3}{2}}+27\left[\frac{ah\sigma_c}{2\pi}\right]^2\left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\right]^{-\frac{1}{2}}=0 \tag{5-63}$$

从式（5-63）可以看出，洞室层裂屈曲岩爆与否，不仅取决于岩体的内因，如几何尺寸和岩石性质等，而且还取决于外部作用力的大小。

从突变模型看，达到临界地应力 σ_p 的洞室也不一定会发生岩爆，其岩爆与否还取决于外界因素的组合情况。例如，如果对洞室进行支护时，支护的作用等于加大了岩层之间的黏结力 σ_N，就会抑制岩爆的发生；在开挖卸载时，岩层之间的黏结力 σ_N 会减小，从而可能诱发岩爆的发生。所以，岩爆的演化过程是一个复杂的过程，需要各种因素的有机组合。

3. 岩爆的能量释放估算

对于分叉集左支上各点的状态变量 Z 的值，在式（5-60）成立的条件下，当 $u=0$ 时，式（5-59）有三重零根，$z_1=z_2=z_3=0$；当 $u<0$ 时，有三重实根：

$$z_1=2[-u/3]^{\frac{1}{2}};\ z_2=z_3=-[-u/3]^{\frac{1}{2}}$$

跨越分叉集时状态变量发生突跳，突跳值为

$$\Delta z=z_1-z_2=3[-u/3]^{\frac{1}{2}} \tag{5-64}$$

可以用突跳前后系统的能量差来估算在岩爆过程中释放的能量。突跳前后系统的能量差为

$$\Delta V = \frac{1}{4}\Delta z^4 + \frac{1}{2}u\Delta z^2 + v\Delta z \tag{5-65}$$

设岩爆区的宽度为 b，则可得到岩爆区释放的能量表达式为

$$\Delta E = b\Delta V \tag{5-66}$$

由式（5-56）、式（5-57）和式（5-64）~式（5-66）得

$$\Delta E = b\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{Da}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{\pi^2 h\sigma_P}{2a}\right]^2\left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\right]^{-1} + \frac{\sqrt{3}ah\sigma_v}{2\pi}\left[\frac{\pi^2 h\sigma_P}{2a} - \frac{Da}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{Da}{8}\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} \tag{5-67}$$

可见，岩爆所释放的能量与岩体的内外因素均有关。

5.4 煤柱失稳灾变分析

5.4.1 突变方法描述冲击地压的适定性

随着煤矿开采向深部转移，冲击地压、煤与瓦斯突出等动力现象越来越凸现。如何认识冲击地压现象的本质和描述冲击地压的演化行为及其预防策略成为 21 世纪采矿行业所面临的重大问题。从发生冲击地压的地点来看，大多都发生在煤柱集中应力区。关于冲击地压这一现象的解释，最早源于 Cook[15] 1965 年提出的能量理论，即认为随着采掘范围的增大，当矿体－围岩系统失稳，其释放的能量大于所消耗的能量时，发生冲击地压。1972 年 Brake 提出冲击地压发生的刚度条件[16]，即矿体的刚度大于围岩的刚度是发生冲击地压的必要条件。我国著名冲击地压专家章梦涛教授[17]于 1993 年提出冲击地压失稳理论，即当煤岩介质的应力超过其峰值强度后，出现包括裂纹和裂缝在内的广义变形集中区，在此区域内的力学性质发生显著变化，使之处于非稳定的平衡状态，在外界扰动下产生动力失稳过程，即发生冲击地压。由此可以看出，冲击地压本身是一种灾变的动力过程，潘岳[18]、唐春安[19,20]曾经对突变理论处理冲击地压的适定性进行了讨论，其主要论点有以下 4 方面。

（1）突变理论适合于系统平衡位置的转变。冲击地压从本质上讲，是系统能量突发释放的结果。在能量释放过程中，总有一部分围岩破坏程度最为严重。一般而言，对于煤柱发生冲击地压的情形，主要表现在煤柱的周边区域破坏严重。这是因为在煤柱周边围岩，承受比原岩高的集中应力，随着该区域围岩裂隙的扩展，集中应力的高峰位置向着煤柱围岩深部转移，打破了原来应力的平衡态，形成了新的平衡态。因此，描述诸平衡态转变条件和形式的突变理论是非常适合冲击地压这类突然破坏问题的。

（2）突变理论适合于统一地描述稳态破坏和突变破坏。以图 5－12 所示的尖点突变模型为例，说明煤柱结构破坏的突变性。对于具有冲击倾向性的煤层，若不进行任何防治措施，在采掘工程的扰动下，将会沿着路径 1－4 变化，导致冲击地压的发生。当对煤柱进行松动爆破或注水等处理措施后，系统演化将沿着 1－2－3 的路径，导致围岩呈现稳态渐进破坏，而非突变，从而达到防治冲击地压的目的。

（3）适合于对冲击地压诱发因素的解释。从冲击地压的主要诱发因素来看，一是围岩本身在力学性质上往往表现为弹脆性；二是采掘工程扰动导致高应力集中，使得围岩失稳演化系统的控制点处于相应突变模型分歧点集的附近。松动爆破或注水软化主要使得系统控制点远离突变型分歧点集，而采掘工程的扰动造成的集中应力促使系统突变模型中的控制点越过分歧点集，使得系统平衡位置突变，导致冲击地压的发生。

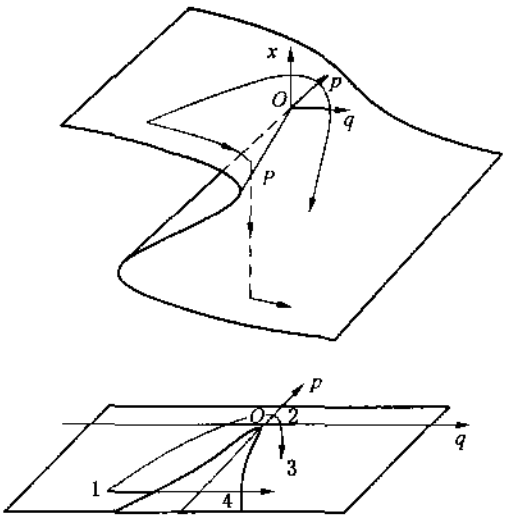


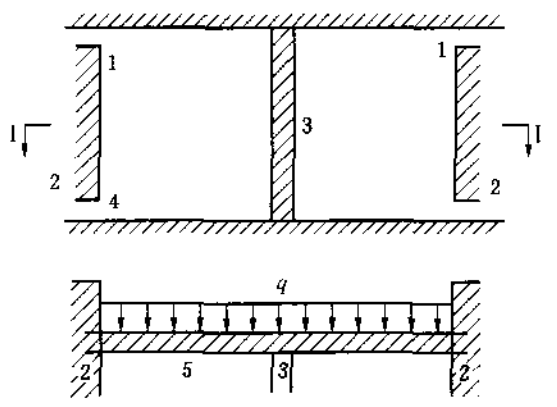
图 5－12　围岩灾变尖点模型

（4）适合于对冲击地压机理的理解。煤柱破坏区的产生，在于未破坏但承受高应力岩体释放的能量，促使煤柱周边围岩不断损伤；或者说通过煤柱周边围岩的不断损伤来吸收或消耗未损伤且承受高应力围岩释放出来的弹性变形能。如果煤柱周边围岩损伤所消耗的能量大于未损伤围岩系统释放的能量，则煤柱周边围岩的破坏属于稳态破坏，通过围岩的渐变损伤破坏及变形达到新的平衡态；反之，煤柱围岩将产生突变破坏。因此，可以根据具体煤柱围岩的组合状况和应力环境，引入围岩系统结构的损伤参量，建立起相应的突变模型，来确定围岩系统失稳的临界条件或突变模型中的分歧点集。该分歧点集恰好是煤柱围岩系统能量释放与能量吸收相同的点的集合。因此，突变理论也适合于对冲击地压机理的解释。

5.4.2　狭窄煤柱冲击地压的突变模型[21]

1. 狭窄煤柱冲击地压的分析模型

潘岳根据坚硬顶板刀柱工作面的情形，建立了尖点模型进行分析[21]，采场布置如图 5－13 所示。在煤层上方赋存坚硬岩层，煤柱由渐近破裂而发生冲击地压时，顶板岩层并不破坏而仅参与释放能量。设底板不变形，工作面很长，对于煤柱对称分布且其宽度远小于工作面推进度 l 的情况，在 I－I 剖面处取单位长度研究，可将顶板视为岩梁。岩梁的抗弯刚度为 EI；单位长度煤柱的支承力可视为作用在岩梁中点的集中力 F；岩梁自重及上覆岩层的作用简化为集度为 q 的均布荷载。煤柱相对狭窄，其压缩量远大于未采煤层的压缩量。简化处理的办法是假设未采煤层不可压缩，且梁两端固嵌其中。显然，这样假设的约束大于图 5－13 梁端实际所



1—工作面；2—未采煤层；3—孤立煤柱；4—巷道；5—岩梁

图 5－13　采场模型

受约束。实际问题中梁端不仅沉降，而且均有微小的向下倾角。相比之下，假设未采煤层为刚性，而梁两端铰接上图 5－14 所示的约束，对梁整体起到的效应，应更接近于图 5－13 中实际岩梁所受到的约束效应。

煤柱介质的应力－应变关系表达式为[22]

$$\sigma = E_1 \varepsilon \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^m \right] \tag{5-68}$$

式中 E_1——其初始弹模；

m——曲线同族指数，且

$$(1/m)^{1/m}\varepsilon_1 = \varepsilon_c$$

当 $m=1$ 时 $\varepsilon_1 = \varepsilon_c$，$\varepsilon_c$ 为峰值应力 σ_c 对应的应变。这样，煤柱对岩梁中点的作用力或煤柱的荷载位移关系（图 5－15）为

$$F(u) = \lambda u \exp\left[-\left(\frac{u}{u_1}\right)^m \right] \tag{5-69}$$

式中 $\lambda = E_1 b \times 1/h$；$b$、$h$ 分别为煤柱的原始宽度与高度；$u = h\varepsilon$，$u_1 = h\varepsilon_1$。

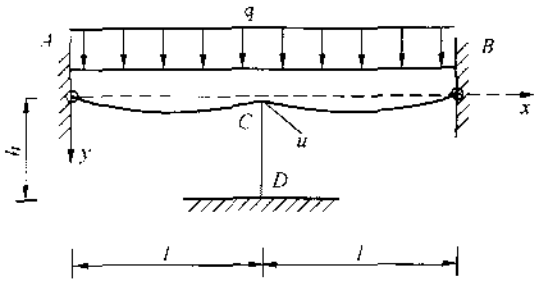


图 5－14 岩梁－狭窄煤柱系统的简化模型

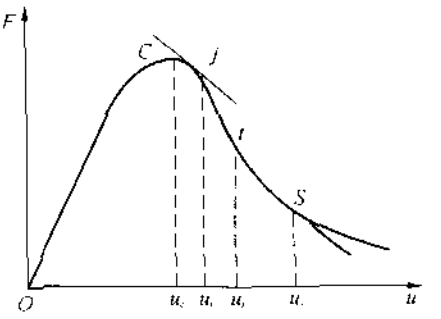


图 5－15 狭窄煤柱的荷载－位移曲线

2. 狭窄煤柱冲击地质的折迭突变模型

图 5－14 中若撤去煤柱支撑，岩梁将下沉，并处在自重与上方赋存岩体作用相协调的静平衡位置（图 5－16）。图中 $u_0 = q_0 l^4/24EI$，图 5－14 中煤柱的支承力使梁挠曲线上包括 C 点在内的各点位移都受到限制，但在重力荷载 q 作用下，梁挠曲线上各点总有恢复到图 5－16 中静平衡位置的倾向。铰支梁在均布力 q 和反向集中力 F（u）共同作用下，梁 AC 段的弯矩方程为

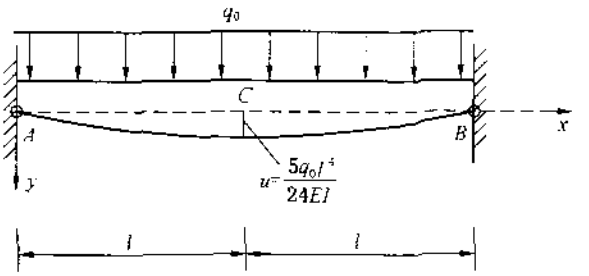


图 5－16 岩梁的挠曲线

$$M(x)=\left(ql-\frac{F}{2}\right)x-\frac{qx^2}{2} \tag{5-70}$$

由材料力学可得 AC 段梁的挠曲线微分方程：

$$EIy''=-M(x)=\frac{qx^2}{2}-\left(ql-\frac{F}{2}\right)x \tag{5-71}$$

利用边界条件：$x=0$ 时，$y(0)=0$；$x=l$ 时，$y'(l)=0$，可得 AC 段梁的挠曲线方程：

$$y=\frac{1}{EI}\left[\frac{q}{24}x^4-\left(ql-\frac{F}{2}\right)\frac{X^3}{6}+\frac{L^2}{3}\left(ql-\frac{3}{4}F\right)x\right] \tag{5-72}$$

再将 $x=l$ 时，$y(l)=u$ 的条件代入式(5-72)，可得梁中点 C 处的挠度 u 与 q 及 F 之间的关系式为

$$\frac{5}{4}ql=F+6\frac{EI}{l^3}u \tag{5-73}$$

煤柱岩爆是在其荷载－位移 $F(u)$ 曲线峰值强度后的软化段上发生的。在 $F(u)$ 曲线软化段上，岩梁－煤柱系统的平衡位置或其上端位移有准静态位移 $\mathrm{d}u$ 时，岩梁因其挠曲线上各点均向图 5－16 中平衡位置趋近而要释放弹性形变能 $\mathrm{d}U_e(<0)$；煤柱因其内微裂纹扩展、连通而耗散能量 $\mathrm{d}U_p(>0)$，当 $\mathrm{d}U_e<\mathrm{d}U_p$ 时，外力 q 在其作用点的位移上做功 $\mathrm{d}W(>0)$，补充能量，以使煤柱产生变形。由于处于准静态，无动能影响，因此由能量守恒原理可得关系式

$$\mathrm{d}U_e+\mathrm{d}U_p-\mathrm{d}W=0 \tag{5-74}$$

式（5－74）是以煤柱上端位移到 u 时的状态为参考态，建立的煤柱有微位移 $\mathrm{d}u$（>0）而系统处于准静态时的系统功、能增量平衡关系。

煤柱轴力 $N=F$，煤柱上端有位移增量 $\mathrm{d}u$ 时，煤柱内有应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon$，于是得

$$\mathrm{d}U_p=\int_0^h N\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}y=F\int_0^h\frac{\mathrm{d}u}{h}\mathrm{d}y=F\mathrm{d}u \tag{5-75}$$

相应岩梁释放的能量为

$$\mathrm{d}U_e=2\int_0^l M(x)\mathrm{d}k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{EI}\int_0^l M(x)\mathrm{d}M(x) \tag{5-76}$$

式中 $\mathrm{d}k(x)=\mathrm{d}M(x)/EI$ 是梁 C 点挠度 u，有增量 $\mathrm{d}u$ 时挠曲线上 x 处的曲率增量。外力功增量为

$$\mathrm{d}W=2\int_0^l q\mathrm{d}y(x)\mathrm{d}x \tag{5-77}$$

式中 $\mathrm{d}y(x)$ 是与 $\mathrm{d}u$ 相应的挠曲线上 x 点处的挠度增量。将式（5－71）代入式（5－76），再利用式（5－73）将 q 用 F 和 u 表示，并记 $k=EI/l^3$，可得

$$\mathrm{d}U_e=\frac{2}{EI}\int_0^l\left\{\left[\frac{4}{5}\frac{F}{l}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}lx\right)+\frac{24}{5}\frac{k}{l}\left(-\frac{1}{2}x^2+lx\right)\right]\times\left[\frac{4}{5}\frac{\mathrm{d}F}{l}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}lx\right)+\frac{24}{5}\frac{k}{l}\mathrm{d}u\left(-\frac{1}{2}x^2+lx\right)\right]\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{250k}\left[(F+6ku)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}+6k(F+256ku)\right]\mathrm{d}u \tag{5-78}$$

将式（5－75）、式（5－78）代入式（5－74）并在等式两边除以 du 后可得

$$\frac{1}{250k}(F+6ku)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}+\frac{6}{256}(F+256ku)+F-J=0 \tag{5-79}$$

式中 J——使煤柱产生单位位移时所需外界输入系统的能量，可称之为能量输入率[23,24]，且

$$J = \mathrm{d}W/\mathrm{d}u \tag{5-80}$$

式（5-79）是以煤柱上端位移到 u 时的状态为参考态，建立的煤柱上端有微位移 $\mathrm{d}u$（>0）而系统处于准静态时的平衡方程。从式（5-74）的物理意义知，当式（5-79）中的 $J>0$ 时，煤柱在作静态位移；当式（5-79）中的 $J=0$ 时，说明无须外力 q 做功、仅凭系统内部的能量（岩梁所蓄的弹性应变能）转移，煤柱位移便可自动增大。这表明系统处于临界状态，故可用

$$J=0 \tag{5-81}$$

来作为判定系统失去准静态或煤柱失稳破裂（岩爆）的临界条件。

图 5-15 中由式(5-69)表示的 $F(u)$ 曲线软化段上拐点 t 处的位移 u_t 满足 $F''(u_t)=0$ 的条件，可得 u_t 与 u_1 间的关系为

$$\frac{u_t}{u_1} = \left(\frac{1+m}{m}\right)^{1/n} \tag{5-82}$$

式（5-82）表明，曲线同族指数 m 大，u_t/u_1 小，即 $F(u)$ 曲线越陡，煤柱介质的冲击倾向越强。煤柱岩爆是在其 $F(u)$ 曲线峰值强度后的软化段拐点前某位置发生，而在拐点后某位置结束的，利用式（5-82）可将 $F(u)$ 曲线表达式（5-69）在 u_t 处展开，得

$$F(u) = au_t - am(u-u_t) + \frac{a}{6u_t}m(1+m^2)(u-u_t)^3 + \frac{a}{24u_t^3}(3m^2-11m+14)(1+m^2)(u-u_t)^4 + \cdots \tag{5-83}$$

式中，$a = \lambda\exp[-(1+m)/m]$。

将式（5-83）代入平衡方程式（5-82）可得

$$\frac{am(1+m)^2(a+6k)}{2u_t}(u-u_t)^2 + am(1-K)(am-6k)(u-u_t) - am(1-K)(a+6k)u_t - 250kJ + O(u-u_t)^3 = 0 \tag{5-84}$$

其中

$$K = \frac{256k}{am} = \frac{256k}{-F'(u_t)} \tag{5-85}$$

由式（5-83）知，$F'(u_t) = -am$。

以下讨论 K 在 1 附近取值的情况。由于 $(u-u_t)^2$ 项是式（5-84）中系数不为零的最低项次，据确定性原则[23]，式（5-84）对应的是突变理论中折迭突变模型的平衡方程，故可略去 $(u-u_t)^3$ 以上的项来讨论岩梁-煤柱系统的稳定性。将式（5-84）化成无量纲形式并略加整理后得

$$\left[\frac{u-u_t}{u} + \frac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)}\right]^2 - \left[\frac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)}\right]^2 - \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} - \frac{125KJ}{64(1+m)^2(1+24k/\alpha)F(u_t)} = 0 \tag{5-86}$$

作变量代换，得

$$\begin{cases} w = \dfrac{u-u_t}{u} + \dfrac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)} \\ a = -\left[\dfrac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)} + \dfrac{2(1-K)}{(1+m)^2}\right] + \dfrac{125KJ}{64(1+m)^2(1+6k/a)F(u_t)} \end{cases} \tag{5-87}$$

可将式（5－86）化成折迭突变模型平衡方程的正则形式[25]：

$$w^2 + a = 0 \tag{5-88}$$

式中 w——状态变量；

a——控制变量。

$A>0$ 时，系统空状态；$a \leqslant 0$ 时，式（5－88）的图形为一抛物线；$a=0$（或 $K-1$ 轴）将抛物线分成上下两枝，如图 5－17 所示。折迭突变模型的势函数为

$$D = \frac{w^3}{3} + aw \tag{5-89}$$

当 K 固定时，由式（5－89）知 $\partial^2 D/\partial w^2 = 2w$，在分枝 1（下分枝）上，$\partial^2 \Pi/\partial^2 w < 0$，系统的平衡状态不稳定；在分枝 2（上分枝）上，$\partial^2 \Pi/\partial^2 w > 0$，系统平衡状态稳定。式（5－87）中第 1 式将 $F(u)$ 曲线上 $u=\left[1-\dfrac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)}\right]u_t$ 的点反映到图 5－17 中 $w=0$ 的 $K-1$ 轴上。

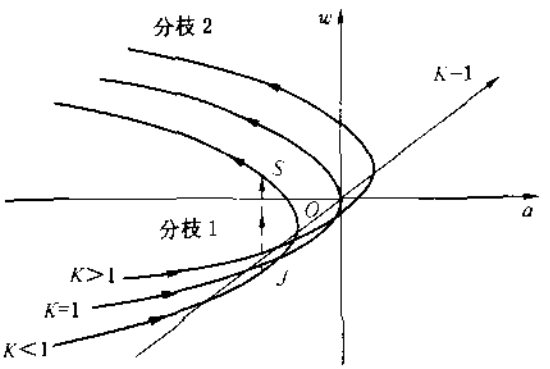


图 5－17 折迭突变模型的平衡曲面

将式（5－72）代入式（5－77），并利用式（5－73）将 $\mathrm{d}q$ 用 $\mathrm{d}F$ 和 $\mathrm{d}u$ 表示，得到外力功增量为

$$\mathrm{d}W = \frac{2}{EI}\int_0^l q\left[\frac{\mathrm{d}F}{30l}\left(x^4 - \frac{3}{2}lx^3 + \frac{1}{2}l^3\xi\right) + \frac{k\mathrm{d}u}{5l}(x^4 - 4lx^3 + 8l^3x)\right]\mathrm{d}x = \frac{ql}{200k(\mathrm{d}F + 256k)} \tag{5-90}$$

代入式（5－80）后得能量输入率为

$$J = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}l}{200k}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} + 256k\right) \tag{5-91}$$

J 是个变量，在 $F(u)$ 曲线软化段的某些区段上，式（5－91）中的 $J>0$，在这样的区

段上，式（5－86）可以写成式（5－92）和式（5－93）

$$\frac{u-u_t}{u}+\frac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)}=w_1=\frac{-1}{1+m}\times$$
$$\sqrt{\left[\frac{(1-K)(am-6k)^2}{(1+m)(a+6k)}\right]+2(1-K)+\frac{125KJ}{64(1+6k/a)F(u_t)}} \tag{5-92}$$

$$\frac{u-u_t}{u}+\frac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)^2(a+6k)}=w_2=\frac{1}{1+m}\times$$
$$\sqrt{\left[\frac{(1-K)(am-6k)}{(1+m)(a+6k)}\right]^2+2(1-K)+\frac{125KJ}{64(1+6k/a)F(u_t)}} \tag{5-93}$$

式（5－92）、式（5－93）是岩梁煤柱系统准静态平衡路径的两个分枝，它们分别对应 $F(u)$ 曲线软化段拐点以上和以下的某区段。煤柱破坏问题使得岩梁煤柱系统平衡位置最终要到达分枝2。图5－17中对于任一不为零的 a 值，都有两个平衡位置与之对应，当 K 值给定而 J 按式（5－91）变化时，平衡位置从分枝1经过原点或 $K-1$ 轴过渡到分枝2，煤柱将以渐进形式破裂；否则，平衡位置将以跳跃形式到达分枝2，煤柱将以岩爆形式破裂。

5.5 矿震胞映射－灰色光点突变预测模型[26]

周辉等[26]针对传统矿震预测理论和方法存在的问题及矿震本身的非线性动力学特征，基于胞映射理论和突变理论提出了“矿震系统的胞映射—突变预测模型”。该模型既考虑了矿震系统的非线性动力学本质，又利用胞映射理论消除了初值的随机性和矿震系统本身的内在随机性对预测结果的影响。

5.5.1 胞映射－灰色尖点突变基本模型

1. 胞映射方法

胞映射理论由Hsu提出[27,28]，是对非线性动力系统，特别是对强混沌性系统进行全局分析的一种有效工具。胞映射将点到点的映射转化为胞到胞的映射，可以“平滑”并削弱观测初值的随机性和系统的内在随机性对系统动力学模式的影响。

设 N 维动力系统的非线性动力学方程可以表示为

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_N;a_i) \tag{5-94}$$

式中 x_i——系统的状态变量；

a_i——控制变量。

把 N 维状态空间的每个坐标都分成许多小段，每段用一个整数 Z_i 表示，离散化状态空间的 N 维有限单元称为胞，以 N 个整数 $Z_i(i=1,2,\cdots,N)$ 构成向量 Z（称为胞向量）来表征。

将系统的动力学行为（从 n 时刻到 $n+1$ 时刻）用胞对胞的映射 c 表示为离散化的整数方程

$$Z(n+1)=cZ(n) \tag{5-95}$$

若每个胞都只有一个相应的映射胞，则称为狭义胞映射；若每个胞对应多个映射胞，则称为广义胞映射。对于广义胞映射，需要计算出每个胞在下一时刻映射到多个胞 i 中的

概率，记为 ξ。把这些概率汇总成胞概率向量，记为 $\xi(t)$（t 为时间）。在实际计算中，$\xi(t)$ 可按下面的方法进行计算：

将第 j 个胞离散细化为若干个子胞，设第 k 个子胞的中心点状态向量为 $X^d(n)$，则其一次映射后的状态向量可由式（5-94）经差分运算求得

$$X^d(n+1)=F[X^d(n)] \tag{5-96}$$

设胞 j 的所有子胞经上述映射后落入胞 i 的个数为 M_{ij}，则从胞 j 到胞 i 的一次转移概率为

$$P_{ij}=M_{ij}/N_s \tag{5-97}$$

式中 N_s———一个胞内子胞的总数。

由 P_{ij} 构成 Markov 一次转移概率矩阵 P，则系统的动力学行为可用概率方程表示为

$$\xi(n+1)=P\xi(n) \tag{5-98}$$

利用式（5-98），可以分析非线性动力系统的各种演化特征。

2. 时间序列的灰色-尖点突变预测模型

为了弱化矿震系统变量观测信息的随机性，可采用灰色建模理论思想，首先对原始观测数据进行累加。令 $x^{(0)}$ 为原始观测序列，$x^{(1)}$ 为其一次累加生成（AGO）序列，即

$$x^{(1)}(k)=\sum_{j=1}^{k}x^{(0)}(j) \qquad (j,k\leqslant m) \tag{5-99}$$

若视时间序列 $x^{(1)}$ 为来自于时间的连续函数 $\hat{x}^{(1)}(t)$ 的一组离散解，则可进行 Taylor 展开，并截取至 5 次项，从而将 $\hat{x}^{(1)}(t)$ 近似表示为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+A_3t^3+A_4t^4+A_5t^5 \tag{5-100}$$

对式（5-100）求导，即可得到还原后的模型表达式为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\frac{\mathrm{d}\hat{x}^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=A_1+2A_2t+3A_3t^2+4A_4t^3+5A_5t^4 \tag{5-101}$$

令

$$y=\hat{x}^{(0)}(t),a_0=A_1,a_1=2A_2,a_2=3A_3,a_3=4A_4,a_4=5A_5 \tag{5-102}$$

则式（5-102）可简化为

$$y=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4 \tag{5-103}$$

对式（5-103）进行 Tschirnhaus 变换[9]，即令

$$x=t-A,A=\frac{a_3}{4a_4} \tag{5-104}$$

则式（5-103）可化为

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_4x^4 \tag{5-105}$$

作进一步代换，令

$$x=\sqrt[4]{\frac{1}{4b_4}z}\quad(b_4>0)\quad 或\quad x=\sqrt[4]{-\frac{1}{4b_4}z}\quad(b_4<0) \tag{5-106}$$

这里仅就 $b_4>0$ 的情况进行讨论（对于 $b_4\leqslant 0$ 的情况，可将方程的两端同乘以 -1，从而化成与 $b_4>0$ 相同的方程形式）。合并式（5-105）和式（5-106）得

$$y=\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{2}az^2+bz+c \tag{5-107}$$

式中 $a = \frac{b_2}{\sqrt{b_4}}, b = \frac{b_1}{\sqrt[4]{4b_4}}$；略去与突变无关的 c，式（5－107）即为尖点突变的标准形式。

由突变理论可知，式（5－107）的平衡曲面方程和相应的分叉集方程分别为

$$z^3 + az + b = 0 \tag{5-108}$$

$$4a^3 + 27b^2 = 0 \tag{5-109}$$

分叉集方程是稳定平衡状态区与非稳定平衡状态区的分界线，系统的演化只有越过这个分界线才有可能从一个平衡状态突变到另一个平衡状态。

如图 5－18 所示，分叉集将控制变量空间划分成两部分：在区域 E，$4a^3 + 27b^2 > 0$，系统是稳定的；在区域 J，$4a^3 + 27b^2 < 0$，系统有三个平衡点，其中位于平衡状态曲面的上叶、下叶的平衡点是稳定的，而位于中叶的平衡点是不稳定的，且不稳定平衡点满足：

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 3z^2 + a < 0 \tag{5-110}$$

由平衡曲面方程式（5－108）求解 z：$a=0$ 时，$z_1 = z_2 = z_3 = 0$；$a<0$ 时，方程有三个实根：

$$z_1 = 2\left(-\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, z_2 = z_3 = -\left(-\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-111}$$

式中解 z_1 位于上叶（或下叶）；解 z_2 和解 z_3 合并于中叶与下叶（或上叶）的交线（分叉集的一枝）上；解 z_2 和解 z_3 所处的点即为系统状态在分叉集上发生突变的位置（图 5－19）。

由图 5－19 和式（5－111）可求得 Δz 为

$$\Delta z = z_1 - z_2 = 3\left(-\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-112}$$

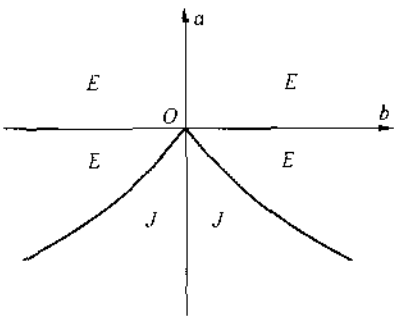


图 5－18 分叉集与平衡状态空间的划分

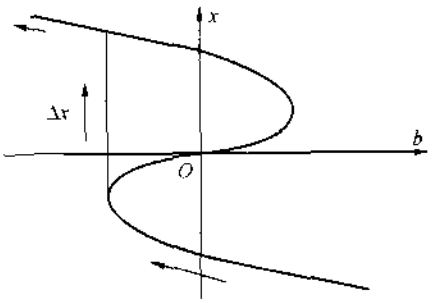


图 5－19 状态变量突变示意图

还原状态变量 z 和控制变量 a，可得到由临界点到发生突变的时间差为

$$\Delta t = \Delta z(4b_4)^{-\frac{1}{4}} = (-3a)^{\frac{1}{2}}(4b_4)^{-\frac{1}{4}} \tag{5-113}$$

利用式（5－113），即可对系统的突变时间进行确定性预测。

5.5.2 矿震系统的胞映射－突变预测步骤

式（5－113）对系统所作的突变预测是确定性的，考察灰色—尖点突变模型的理论基础和混沌系统的动力学特征可以看出，方法本身存在如下不足：没有考虑观测数据中存在的随机误差以及混沌系统本身具有的内在随机性，预测结果受观测误差的影响甚大；灰

色－尖点突变模型只能分别对单个变量进行突变预测，这显然不能从系统整体上反映系统演化直至突变的动力学本质。针对灰色－尖点突变预测模型的上述缺点，人们提出了矿震系统的胞映射—突变预测模型和实现步骤。

（1）利用灰色－尖点突变模型对时间序列进行突变预测，初步判定系统在时刻 t 是否处于临界状态以及相应的系统突变时间。

（2）利用观测数据反演系统的非线性动力学方程；应用反演的动力学方程和临界时刻 t 的状态向量进行若干次差分迭代（迭代次数视变量的演化速率而定），从而确定在临界点以后一定时间内系统可能的状态空间；划分状态空间为胞空间，并应用胞映射理论计算一次转移概率矩阵。

（3）以临界时刻 t 的系统状态所对应的胞向量为初始胞向量，与一次转移概率矩阵迭代一次即得到 $t+1$ 时刻的胞向量（预测值）。

（4）$t+1$ 时刻的预测胞向量及其与系统突变特性的关系：在 $t+1$ 时刻的胞向量反映了在临界点后第一时刻系统状态的概率分布，但这种概率向量描述方式比直接有效期分迭代所给出的确定值表达方式更客观；系统的演化是一个动态过程，因此其突变特性也是一个随时间和内、外界影响因素而变化的动态演化过程；在临界时刻 t 后的系统突变特性的演化趋向由 $t+1$ 时刻的系统状态（胞向量）决定，且系统在 $t+1$ 时刻的预测胞向量“表象”客观地描述了系统在 $t+1$ 时刻的状态分布，所以可以用系统 $t+1$ 时刻的预测胞向量来讨论系统在临界时刻后的突变特性和演化趋势；同时，由于随着时间的增加，预测胞向量会逐渐“忘记”初始信息而趋于极限状态概率分布，且由 $t+1$ 时刻的状态概率分布能够足以精确地反映系统在临界时刻 t 后的短期演化趋势，因此无论是从精度方面考虑，还是从对系统短期演化描述的充分性方面考虑，用 $t+1$ 时刻的预测胞向量来讨论系统在临界时刻后的突变特性都是必要和可行的。

（5）设由观测数据和式（5－113）预测得到系统在 t 时刻处于临界状态，且相应地在 t_1 时刻将发生突变，则这一预测结果与以下 4 种可能情况相对应。

①若在 $t+1$ 时刻，预测得到系统仍处于临界或失稳状态，且相应的预测突变发生时间较 t_1 提前，则说明在 t 时刻系统因某种因素的作用正在加速“奔向”突变状态。在这种情况下，系统的突变将较预测时间 t_1 提前发生。

②若在 $t+1$ 时刻，预测得到系统仍处于临界或失稳状态，且相应的预测突变发生时间较 t_1 滞后，则说明在 t 时刻系统正在减速“奔向”突变状态。在这种情况下，系统的突变将较预测时间 t_1 滞后发生。

③若在 $t+1$ 时刻，预测得到系统仍处于临界或失稳状态，且相应的预测突变发生时间与 t_1 相同或差别不大，则说明在 t 时刻系统正在等速“奔向”突变状态。在这种情况下，系统的突变将在预测时间 t_1 附近发生。

④若在 $t+1$ 时刻，预测得到系统不处于临界或失稳状态，则说明系统在预测突变时刻 t_1 不会发生突变。因为 $t+1$ 时刻的系统状态决定了系统突变行为的演化特性，所以也可以利用 $t+1$ 时刻的预测胞向量定量地评价 t 时刻系统处于以上 4 种情况的可能性，从而计算在临界点预测突变提前、滞后、准时发生和不发生的概率。方法如下所述。

在由观测数据预测得到系统在 t 时刻处于临界状态且相应地在 t_1 时刻将发生突变的前提下，设事件 A 为“发生突变”，事件 B 为“提前发生突变”，事件 C 为“准时发生突

变”，事件 D 为“滞后发生突变”，事件 E 为“不发生突变”，事件 $F(i)$ 表示系统状态在 $t+1$ 时刻处于胞 i，$P(\cdot)$ 为事件 $(\cdot)$ 发生的概率，则

$$\left.\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P[F(i)]P[B/F(i)] \\ P(C) &= \sum_{i=1}^{n} P[F(i)]P[C/F(i)] \\ P(D) &= \sum_{i=1}^{n} P[F(i)]P[D/F(i)] \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P[F(i)]P[A/F(i)] \\ &= P(B) + P(C) + P(D) \\ P(E) &= 1 - P(A) \end{aligned}\right\} \tag{5-114}$$

式中 n 为胞的总个数；$P[F(i)]$ 由 $t+1$ 时刻的预测胞向量计算得到。

$P[B/F(i)]$，$P[C/F(i)]$ 和 $P[D/F(i)]$ 由样本法求得，即在胞 i 中均匀地取 m 个状态样本点，利用灰色－尖点突变模型分别判别在 $t+1$ 时刻系统处于样本点 $j(j=1\sim m)$ 的突变性。若胞 i 中有 m' 个样本点使事件 B 发生，则

$$P[B/F(i)] = \frac{m'}{m} \tag{5-115}$$

同理也可计算出 $P[C/F(i)]$ 和 $P[D/F(i)]$。

5.5.3 应用实例

表 5－2 所列为门头沟矿某工作面矿震系统变量的观测数据，其中 x_0 为声发射频度，x_1 为声发射能率，x 为光弹应变差。利用上述胞映射－突变预测模型对表 5－2 中的变量 x_0 进行预测，结果见表 5－3。对比表 5－3 中的预测结果与现场实录可以发现：

表 5－2　门头沟矿某工作面矿震系统变量的观测数据

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_0	13	119	18	10	24	30	28	3	32.2	35	391	349	3.6	21	224
x_1	856	6294	1283	454	2068	2220	1742	45	176	2900	4129	126	229	404	2313
x_2	9	17	0	36	5	5	55	37	－19	－18	23	541	29	－19	－10

表 5－3　矿震系统的胞映射－突变预测结果

预测项目	预　测　结　果					
关键点	6	7	9	10	14	15
预测突变日期	10.79	11.96	15.36	21.77	23.82	24.65
突变提前发生的概率	100%	100%	12.32%	0	18%	0
突变准时发生的概率	0	0	0	0	0	0
突变延时发生的概率	0	0	0	0	0	0
突变发生的概率	100%	100%	12.32%	0	1.18%	0
突变不发生的概率	0	0	87.68%	100%	98.82%	100%

（1）在6月10日，监测到数次大的顶板振动，并记录到“一次巨响”，“Y_3孔前方待采煤体应力集中程度较大，并波及到Y_1、Y_2监测孔附近的煤体”；自6月10日起，“Y_1、Y_2、Y_3各孔的监测值同时或交替出现跃变，预示工作面可能出现某些变动”。而预测结果显示在第10.79天和第11.96天分别将以100%的概率发生突变，且提前发生的概率为100%。可见，预测结果与现场实际记录基本吻合。

（2）在6月9日，预测到系统将以12.32%的概率在第15.36天发生突变，且提前发生的概率为12.32%。可见，虽然预测表明在6月15日前后将有可能发生突变，但这种可能性却较小。而实际情况是“Y_3孔从6月15日至17日连续出现监测值跃升……Y_1、Y_2孔亦于6月16日出现较大峰值”。但总的来看，在6月15日前后并没有发生明显的突发性矿压显现和矿震。因此，预测结果与实际情况基本是一致的。

（3）在6月10日、6月14日和6月15日，预测到系统将分别以0、1.18%和0的概率于第21.77天、第23.82天和第24.65天发生突变，仅由预测结果就可以判定工作面在上述预测突变日期发生突变的可能性很小。而实际上，尽管工作面自6月18日开始出现较明显的矿压显现，但这些显现都是渐进发生的，未发生显著的突发性现象，与预测评价结果基本一致。

参 考 文 献

[1] Saunders PT. An Introduction to Catastrophe Theory, Cambridge Univ. Press, 1980.

[2] R Thom (translation by D H Fowler). Structural Stability and Morphogenesis. Reading Mass: Benjamin, 1972.

[3] 林振山. 非线性力学与大气科学 [M]. 南京：南京大学出版社，1993.

[4] 林振山. 非线性科学及其在地学中的应用 [M]. 北京：气象出版社，2003.

[5] Brcocker T, Lander L. Differentiable germs and catastrophes [M]. In London Mathematical Society Lecture Notes: vol 17. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

[6] 蒋承林，俞启香. 煤与瓦斯突出的球壳失稳机理及防治技术 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1998.

[7] 赵志刚，谭云亮，程国强. 煤巷掘进迎头煤与瓦斯突出的突变机理分析 [J]. 岩土力学，2007 (5).

[8] 徐芝纶. 弹性力学 [M]. 北京：人民教育出版社，1982.

[9] 周辉，翟德元，王泳嘉. 薄隔水层井筒底板突水的突变模型 [J]. 中国安全科学学报，1999，9 (3)：44－48.

[10] 梁冰，章梦涛，潘一山，等. 煤和瓦斯突出的固流耦合失稳理论 [J]. 煤炭学报，1995，20 (5)：492－496.

[11] 左宇军，李夕兵，赵国彦. 洞室层裂屈曲岩煤的突变模型 [J]. 中南大学学报，2005，36 (2)：311－316.

[12] 王桂尧，孙宗颀，卿笃干. 隧洞岩爆机理与岩爆预测的断裂力学分析 [J]. 中国有色金属学报，1999，9 (4)：841－845.

[13] 黄润秋，许强. 工程地质广义系统科学分析原理及应用 [M]. 北京：地质出版社，1997.

[14] 吴晓. 屈曲黏弹性矩形板的非线性振动分岔 [J]. 力学与实践，2001，23 (1)：41－43.

[15] Cook N G W. The failure of rock, [J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1965, 2: 389－403.

[16] Hudson J A, Grouch S L, Fairhurst C. Soft, stiff and servo－controlled testing machines－A review with

reference to rock failure [J]. Eng Geol, 1972, 6 (3): 155 - 189.
[17] 章梦涛. 冲击地压失稳理论与数值模拟计算 [J]. 岩石力学与工程学报, 1987, 6 (3): 197 - 204.
[18] 潘岳, 耿厚才. 地压动力现象的灾变理论方法 [C] //第二次岩石力学与工程学术大会论文集. 北京: 知识出版社, 1989.
[19] 唐春安, 徐小荷. 岩石破裂过程失稳的尖点灾变模型 [J]. 岩石力学与工程学报, 1990, 9 (2): 100 - 107.
[20] 唐春安. 岩石破裂过程中的灾变 [M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1993.
[21] 潘岳, 张孝伍. 狭窄煤柱岩爆的突变理论分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (11): 1797 - 1803.
[22] Karcinovic D. Statistical aspects of the continuous damage theory [J]. Int. J. Solids Structures, 1982, 18 (7): 551 - 562.
[23] 凌复华. 突变理论的历史、现状和展望 [J]. 力学进展, 1984, 14 (4): 389 - 404.
[24] 潘 岳. 岩石破裂过程的折迭突变模型 [J]. 岩土工程学报, 1999, 21 (3): 299 - 303.
[25] Saunders P T. 突变理论入门 [M]. 凌复华译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983.
[26] 周辉, 冯夏庭, 谭云亮. 矿震系统的胞映射 - 突变预测模型 [J]. 中国有色金属学报. 2002, 12 (1): 156 - 160.
[27] HSU C S. A theory of cell - to - cell mapping dynamics systems [J]. ASME J Appl Mech, 1980 (47): 931 - 939.
[28] HSU C S, Guttalu R S. An untraveling algorithm for global analysis of dynamical systems: an application of cell - to - cell mappings [J]. ASME J Appl Mech, 1980 (47): 940 - 948.
[29] 王连国, 宋扬, 缪协兴. 基于尖点突变模型的煤层底板突水预测研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22 (4): 573 - 577.

6 岩石力学自组织

6.1 自组织基本含义及其特征

6.1.1 自组织的基本含义

20 世纪 60 年代末 70 年代初，以普利高津的耗散结构论[1]和哈肯的协同学[2,3]为代表的关于复杂系统从无序到有序进化机制的系统自组织理论相继诞生。自组织是系统科学的一个重要概念，它是复杂系统演化时出现的一种复杂现象，是复杂性的特征之一。“自组织”一词英文是“self－organization”，即自我自主地组织化、有机化的意思。作为自然进化论的一个基本概念，“自”是指客观事物或客观系统本身，包括无机系统、有机系统、社会系统和文化系统等，组织化是指一事物或系统从无到有、从简单到复杂、从无序到有序、从低级到高级的发展进化过程。

C. Lucas[4]认为，“自组织的本质是指系统的结构（至少是部分）出现，没有外部压力或来自外部系统的强加干预。换句话说，组织力来自系统内部，是系统内部要素相互作用的结果，组织能以时间或空间的方式演化，能保持一种稳定的形式，或表现为短暂的现象。”

普利高津在发展不可逆热力学的研究中创立了“耗散结构”理论，指出对一个开放系统，在远离平衡的条件下，它会自发地从无序走向有序，形成一定的结构。这一原理是从研究大量的客观事物中总结出来的，它适用于自然界各种物理的、化学的以及生物进化和社会发展的各种现象与过程。19 世纪，热力学获得了巨大的发展。从热力学第二定律来看，世界总是朝着形成一个最大的无序态进行，最后全部有序态将分崩离析，成为不可能再平静的状态，外界并没有对它加以搅动的特定干预，它是由于另一种过程热传导的干预，自发地产生了过程演化。从这个角度来考虑，则可以理解哈肯的本意，可能是由于找不到合适、妥切的语言来表达，因此说成是“在没有外界的特定干预下”。实际上，“热传导”也是一种外界特定的干预，但它与液体的运动是两种不同性质的过程，它们两者之间看起来没有显式的直接联系，但它们之间的关系是明确地存在着的，不过是隐式的而不是显式的，其中隐藏着复杂的演化机制。

例如，1900 年 Benard 发现了对流有序现象[5]，他在一个圆盘中倒入一些液体（图 6－1），当从下面加热这一薄层液体时，刚开始上下液面温差不太大，液体中只有热传导；当上下液面温差 ΔT 超过某一临界值 ΔT_c 时，对流突然发生，并形成很有规律的对流花样。从上往下俯视，是许多像蜂房那样的正六角形格子（图 6－2），中心液体往上流，边缘液体往下流，或者相反。这是一种宏观有序的动态结构。

其实，这就是一个典型的“自组织”过程。因为对这个开放的传热系统，当加大传热温差，使下壁面的壁温过热度超过一个更高阈值时，亦即是它进一步远离平衡时，就会在下加热壁面的活化空穴上形成沸腾泡核。热量通过沸腾气泡底部的液体微层以微层导热

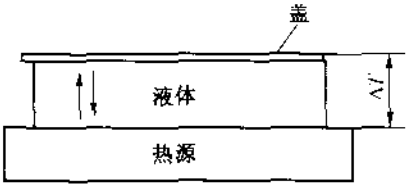


图 6-1　加热示意图

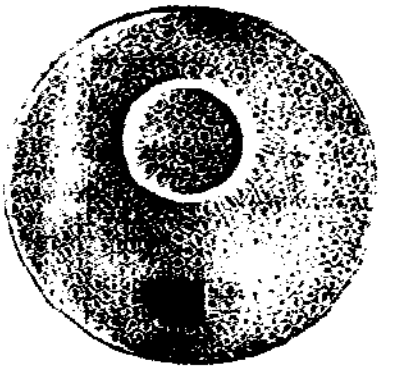


图 6-2　Benard 流

的方式由壁面传给液体，由于微层导热的速率较 Benard 元胞的对流传热快得多，它在竞争中处于优势，替代了对流传热，同时使其相应的加热壁面温度降低。而当沸腾气泡长大到其浮力胜过表面张力时，气泡的脱离是一个必然的趋势，它脱离壁面形成了一个液体的强烈扰动。此时，微层导热消失，传热就以对流传热的方式进行，同时使相应的加热壁面温度重新升高。当壁温提高到相应的阈值时，下一沸腾泡核又会生成，传热又以微层导热的方式进行。这样，沸腾传热中所包含的沸腾泡核形成，微层导热、气泡脱离、扰动使对流传热增强以及酝酿着下一个沸腾泡核生长等一系列子过程，就形成了一定的序列交替进行。这些子过程相互协作，每一个子过程都为下一子过程准备了条件；它们又相互竞争，当自己处于优势时就替代其他子过程，这样自发地组成了一定的时空结构。



图 6-3　云街

再如，有时天空中的云形成整齐的鱼鳞状排列或带状间隔排列，即所谓的云街（图 6-3）。由高空水汽凝结会形成非常有规则的六角形雪花，图 6-4 所示为雪花冰晶中能见到的一些骨架图案，真实的雪花冰晶当然更为丰富多彩。由火山岩浆形成的花岗岩中有时会发现非常有规则的环状结构，如图 6-5 所示。

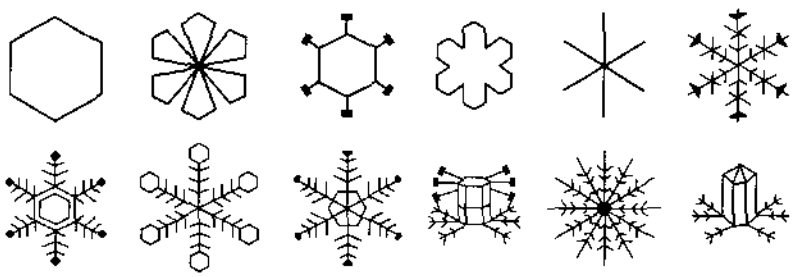


图 6-4　一些雪花骨架图案

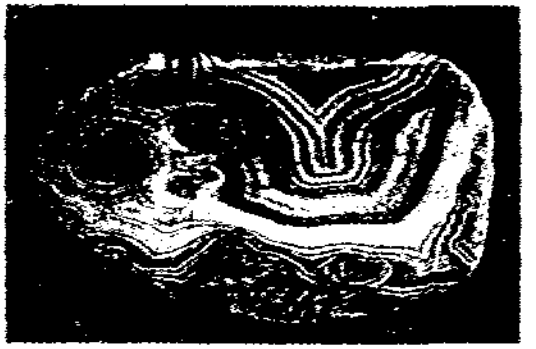


图 6-5　花岗岩中的环状结构

从上述例子也可以看到，“自组织”中的“自”是指“自发”，其中的“组织”是指系统中所包括的这些子过程以一定的顺序和结构组织起来进行运动和演化，是一个活的有序的运动和变化过程。用哈肯的协同论来分析，是可以阐述得清楚的，这是协同论的重要意义。而对于系统中的演化与外界的关系，则以耗散结构理论来分析，更为明确。显然，将协同论与耗散结构理论结合起来阐述自组织原理，将能把问题阐释得更完整合理。

6.1.2　自组织的基本特征

自组织的基本特征包括以下三个方面。

1. 自组织过程

自组织是系统自发走向复杂系统的能力和途径，是开放的复杂系统在大量子系统合作下出现的宏观上的有序结构。在系统内外两方面因素的复杂非线性相互作用下，内部要素的某些偏离系统稳定状态的涨落可能得以放大，从而在系统中产生更大范围的更强烈的长程相关，自发组织起来，使系统从无序到有序、从低级有序到高级有序。复杂系统随着时间而变化，经过系统内部和系统与环境的相互作用，不断适应、调节，通过自组织作用，经过不同的阶段和不同的过程，向更高级的有序化发展，涌现出独特的整体行为与特征，具有自适应、自组织地趋向有序化的功能。

自组织过程分为三类[6]：“第一，由非组织到组织的过程演化；第二，由组织程度低到组织程度高的过程演化；第三，在相同组织层次上由简单到复杂的过程演化。”自组织这三个过程都具有本质区别。第一过程，是从非组织到组织，从混乱的无序状态到有序状态的演化，它意味着组织的起源，需要研究的是组织起点和临界问题；第二过程，是一个组织层次跃升的过程，是有序程度通过跃升得以提升的过程，研究的是组织复杂性问题；第三过程，标志着组织结构与功能在相同组织层次上从简单到复杂的水平增长。从总体上看，耗散结构对于理解复杂系统的自组织演化具有重要意义。协同学阐述了复杂系统子系统之间的竞争和协同推动系统从无序到有序的自组织演化，总体上推动了对于系统自组织演化内部机制和动力的认识。可以这样讲，充分开放是系统自组织演化的前提条件，非线性相互作用是自组织系统演化的内在动力，涨落成为系统自组织演化的原初诱因，循环是系统自组织演化的组织形式，相变和分岔体现了系统自组织演化方式的多样性，混沌和分形揭示了从简单到复杂的系统自组织演化的图景[7]。

2. 自组织演化

一个复杂系统通常都是由许多子系统组成的，各组成之间，不同层次的组成之间相互关联，相互制约，以某种或多种方式发生复杂的非线性相互作用，而且相互作用也是多种多样的。非线性意味着无穷的多样性、差异性、可变性、非均匀性、奇异性、创新性。在非线性条件下才有可能出现初始条件导致不同的结果的复杂情况。而这些事件的发生，恰恰意味着物质的丰富多样化，即新生事物的产生。

非线性相互作用是自组织系统演化的内在动力。元素之间、子系统之间的非线性相互作用是系统产生自组织的根本内在机制，自组织只能出现在非线性系统。自组织系统内部必须存在非线性相互作用，使系统内各个要素之间产生协同作用和相干效应；相互作用就是矛盾双方的排斥和吸引、竞争和协同。在线性作用下，各种相互作用之间缺乏关联，不可能产生合作作用，同时也就谈不上竞争作用，系统实际上就不是一个有机的整体；在非线性相互作用下，各种相互作用之间密不可分，相互之间有了竞争，并成为有机的整体系统，表现出强烈的整体行为。复杂系统自组织演化可以认为是趋于吸引子一个复杂的系统能有许多吸引子，而且它们能随系统非线性相互作用（突变）或参数的变化而变化。研究自组织系统也就是探索系统的吸引子，以及它们的形态和动力。自组织是复杂的、非线性的现象，而不是维持稳定结构的相对简单程序。随机涨落的变化驱使自组织，容许到新的状态空间探索，这与系统的吸引区有关，随机涨落促使系统向吸引子方向的轨道移动，由一个状态进入另一个状态，经过一段时间，由于吸引子的作用系统能迅速发展直到它们达到最适宜的结构，这就是自组织。

伴随非线性相互作用出现的自组织现象也可以通过反馈循环来理解。正反馈循环使系统产生自催化、自生长，导致了系统的新结构，产生自组织过程。负反馈循环则保持系统结构稳定，不会出现新的有序结构。正反馈循环激发了自然选择，能提供比竞争结构更有选择优势的结构，使系统可能产生复杂的和不可预知的新结构。

3. 涨落的影响

在热力学系统中，宏观参量温度 t、压力 p、熵 S 系统大量微观组分随机运动的统计效应，只能测得平均值，实际参量值总是在平均值附近波动（图 6－6），称之为涨落（fluctuation）。因此，序参量作为一种统计的平均值，涨落的存在是必然的。

涨落的作用：涨落是一种随机现象，一般是相互独立的，但随着过程逼近临界点，不同涨落之间发生关联，随着关联范围的增大，新相的序参量连续地从初始状态生长起来，该点称为临界点。

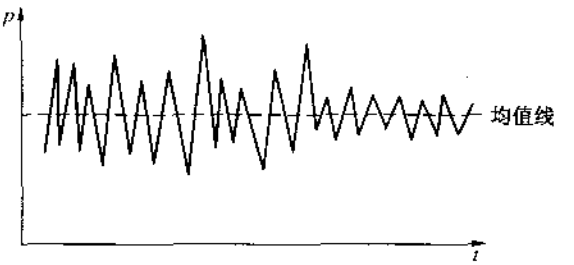


图 6－6　微观粒子压力 p 涨落示意图

对于涨落而言，由于涨落造成空间的不均匀，使序参量成为空间坐标的函数，涨落越大，表示系统微观组分之间相互作用关联范围和强度就越大。关联的强弱可用关联长度 ξ 来表示，它是涨落的平均尺度，与约化温度 t 的经验公式为

$$\xi = \alpha \cdot |t|^{-\gamma} \tag{6-1}$$

其中 γ 是一临界指数，刻画关联长度 ξ 的临界行为；ξ 在临界点处发散，因而是导致系统处于临界状态行为出现种种奇异的重要原因。

涨落的存在是一切实际系统的固有特征。对于非平衡相变，涨落是至关重要的。

涨落的特点是大小、形状和范围都是随机变化的，无法在宏观上加以预见和控制。按照涨落尺度的不同，大体上可区分为小涨落、大涨落和巨涨落。涨落的尺度因条件而变化，可以长大，可以衰减。涨落是对稳定性的挑战，对对称性的破坏。因周围条件和本身特点的差别，不同涨落对系统的作用也不同。

随机涨落是相对于系统平均状态的偏差波动，对系统的自组织过程起着触发、催化作用。随机涨落是系统自组织演化的原初诱因。系统从无序向有序转化是通过随机涨落作用实现的。随机涨落是促使系统从不稳定状态跃迁到一个新的稳定有序结构的杠杆，是使系统进化阶段中更有序状态的诱因。通过随机涨落，首先是个别子系统超越常规，“认识”到其他新的状态，而后当新的发现得到其他子系统的响应并在整个系统内得以放大时，系统就被诱导进入新的或更有序的状态。

随机涨落对实现自组织起着关键性的作用。随机涨落驱动了系统中的子系统在取得物质、能量和信息方面的非平衡过程，使系统中出现了差距，并且加大了这种差距，产生了对称性破缺，特别是在临界区域附近的涨落由于非线性相互作用得以放大时，又进一步加剧了这种过程，使得慢变量与快变量区分开来，慢变量形成序参量，并成为系统自组织的支配力量。由此可见，随机涨落的确是不稳定因素，但在一定条件下也可以变为建设性因素，诱发系统的自组织过程。

外部环境的各种随机因素影响系统自组织过程。自组织理论在强调系统自组织演化的根源来自内在动力的同时，也十分重视外部环境对系统形成有序结构的作用。科学证明，任何与外界无交换关系的封闭系统，只会导致系统有序程度下降，最终趋于无序、混乱状态，从而走向“衰亡”。耗散结构论认为，系统只有和外界进行物质、能量、信息的交换，从外界引入足够大的负熵流，并大于系统自向熵的产生，才会向有序方向进化，这是外部条件对系统自组织作用的一个重要方面。另一方面，系统演化达到临界点上时，往往同时面临多个可能的分支，系统最终进入哪个分支，要受到外部环境的各种因素影响。如系统边界环境的尺度、形状和加之于系统的表面条件，向系统输入物质流、能量流和信息流的流速、流量及各量的比例，外部环境的稳定性等。但是，外部条件对系统自组织的作用只有通过内因，才能转化为推动系统自组织演化的负熵流。

6.2 散体岩石的自组织性

6.2.1 砂堆的自组织临界性

自从 P. Bak 等[8-10] 1987 年提出了著名的砂堆模型来阐述他们提出的自组织临界性（Self - organized criticality，简称 SOC）概念以来，作为系统演化自组织行为的重要特征，

自组织临界性已经越来越受到关注。这是由于砂堆模型作为自组织临界性的范例，该试验能够反映出这类系统包含着众多的发生短程相互作用的组元，并自发地向着一种临界状态演化，且能维持在临界状态。在临界状态下小事件引起的连锁反应能对系统中大量数目的组元发生影响，从而导致大规模事件的发生。虽然这类系统发生的小事件比大事件多，但是遍及所有规模的连锁反应是动态特性的一个必不可少的部分，因此所有的时空关联函数都是幂次（Power－law）的，故幂律可以作为自组织临界性的证据。

P. Ghaffari[11]提出了新的变化的砂堆模型，由不同的分类办法，大概有以下几种：

（1）根据粒子由静止到运动的临界判断条件，可分为临界高度模型（Critical height model）和临界倾角模型（Critical slope model）。

（2）根据粒子的运动方向，可分为定向模型（Directed model）和非定向模型（Undirected model）。

（3）根据粒子一次运动的范围，可分为局域模型（Local model）和非局域模型（Nonlocal model）。

（4）根据从外界加粒子的过程分为离散模型（Discrete model）和无限模型（Unlimited model）。

（5）根据粒子在运动过程中的耗散程度，分为守恒模型（Conservational model）和耗散模型（Dissipation model）等。

1. BTW 模型

一维 BTW 砂堆模型[9,10]是由 P. Bak，C. Tang 和 K. Wiesenfeld 提出，简称 BTW 模型，如图 6－7、图 6－8 所示。

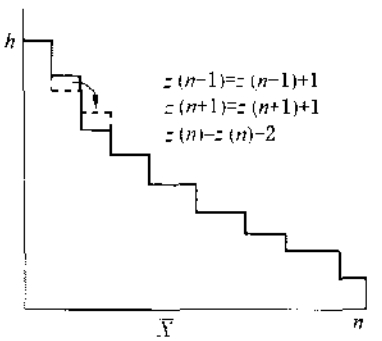


图 6－7　开放边界的一维 BTW 模型

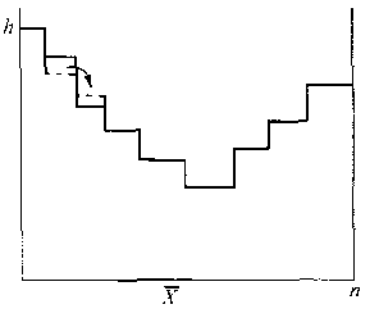


图 6－8　封闭边界下的一维 BTW 模型

1）一维 BTW 砂堆模型算法

考虑离散化的一维空间，$h(n)$表示 n 格点处砂堆的高度，$z(n)\equiv h(n)-h(n+1)$表示 n 处的局域倾角。动力学过程分为加粒子过程和粒子弛豫过程。

（1）加粒子过程。n 为随机选取（或某固定位置），使

$$h(n)\rightarrow h(n)+1 \tag{6-2}$$

其等效于

$$\begin{cases} z(n)\rightarrow z(n)+1 \\ z(n-1)\rightarrow z(n-1)-1 \end{cases} \tag{6-3}$$

（2）粒子弛豫过程。如果 $z(n) > z_c$（临界值），则粒子的运动规则为

$$\begin{cases} h(n) \rightarrow h(n) - 1 \\ h(n+1) \rightarrow h(n+1) + 1 \end{cases} \tag{6-4}$$

其等效于

$$\begin{cases} z(n) \rightarrow z(n) - 2 \\ z(n \pm 1) \rightarrow z(n \pm 1) + 1 \end{cases} \tag{6-5}$$

2）二维 BTW 砂堆模型算法

拓广到二维情况，算法规则如下所述。

（1）加粒子过程。随机选取格点（x，y），使

$$\begin{cases} z(x-1,y) \rightarrow z(x-1,y) - 1 \\ z(x,y-1) \rightarrow z(x,y-1) - 1 \\ z(x,y) \rightarrow z(x,y) + 2 \end{cases} \tag{6-6}$$

（2）粒子弛豫过程。如果 $z > z_c$（临界值），则粒子的运动规则为

$$\begin{cases} z(x,y) \rightarrow z(x,y) - 4 \\ z(x \pm 1,y) \rightarrow z(x \pm 1,y) + 1 \\ z(x,y \pm 1) \rightarrow z(x,y \pm 1) + 1 \end{cases} \tag{6-7}$$

BTW 模型预言了颗粒系统中自组织临界性的存在，并试图解释 $f-1$ 噪声[9,10]，然而仅仅有一些试验找到了砂堆自组织临界性的证据，支持了 BTW 模型，而且此模型对于描述真实的颗粒系统有很大差距。例如，系统如何置现实世界中显然的随机性不顾，而发展到一个自组织态；特定的位形如何能做到对无关紧要的细节十分敏感，而临界性又如何能做到总的来说十分稳固；对临界高度的选取应遵循什么规律才能更好描述真实颗粒系统中的崩塌等，都有待于进一步研究。

2. 临界单面坡砂堆模型试验[12,13]

G. A. Held[14] 等用一套精密的装置进行了砂堆试验，选用粒径为 1.00 ~ 1.25mm 的砂粒，采用在圆盘上逐粒加砂的方式构造砂堆。当砂堆的倾角达到临界角附近时，加入的砂粒数量与落在边缘之外的砂粒数量总体上达到平衡，砂堆停止增长。此时对新添加砂粒（可视为一种干扰）的响应是无法预测的，砂粒可能固定在砂堆上，也可能引起小范围砂粒的滑动，还可能导致更大规模的“雪崩（avalanche）”，但崩塌规模和发生频率的关系与幂律相符。

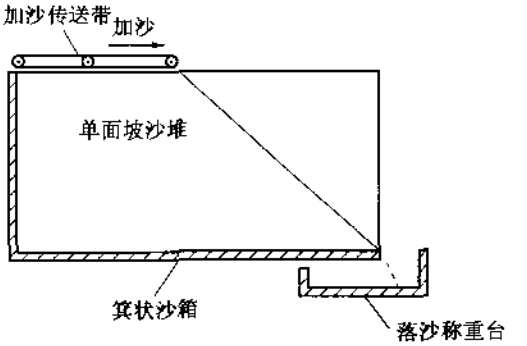


图 6-9　单面坡砂堆试验装置

苏凤环[12]、何越磊[13] 等对临界单面坡砂堆模型试验，试验是在长为 40 cm、深为 70 cm、高为 30 cm 一端开口的有机玻璃箱中进行的，在砂箱上部建一传送带作为加砂装置（图 6-9）。

选用经过筛分、干燥的天然河砂，用 4 组均匀砂石（0.5 ~ 1.0，3.0，2.5 ~ 5.0，5.0 ~ 10.0mm）和 9 组非均匀砂石。级配见表 6-1，非均匀系数 $\varphi = (d_{75}/d_{25})^{0.5}$，$d_{75}$、$d_{25}$ 分别为粒度累积曲线上，纵坐标等于 75% 、25% 时对应的粒径，级配砂石的中值粒径大致相

同。首先构建一个大致处于休止角的单面坡砂堆，砂堆长 38 cm、深 70 cm、高 30 cm，然后进行加砂试验，每次加砂 105 g（级配与砂堆的级配相同）。

表 6-1 砂堆级配表[12]

组号	粒径/mm										
	0.4	0.7	1.2	3.0	4.0	5.1	7.0	8.0	10.8	17.0	20.0
Ⅰ（φ=1.53）	10.49	13.11	19.29	56.00	76.67	80.55	83.73	91.89	95.81	98.99	100.00
Ⅱ（φ=2.55）	7.70	19.47	29.99	53.90	65.69	69.87	73.03	80.70	86.25	96.42	100.00
Ⅲ（φ=2.85）	10.00	21.20	30.20	50.00	60.00	66.00	70.00	75.00	88.50	95.00	100.00
Ⅳ（φ=2.96）	11.00	23.85	33.14	52.00	61.85	66.68	70.46	78.89	86.87	98.78	100.00
Ⅴ（φ=3.41）	9.00	26.92	34.37	51.00	62.92	65.38	67.88	76.69	83.91	93.96	96.00
Ⅵ（φ=4.00）	12.00	29.00	36.42	42.97	50.11	57.84	69.00	75.00	82.30	91.86	95.00
Ⅶ（φ=4.50）	11.50	29.00	32.00	40.80	52.70	63.90	68.00	71.50	75.00	83.00	93.00
Ⅷ（φ=5.00）	10.00	28.02	34.26	51.00	57.77	60.32	61.92	66.79	71.01	78.54	100.00
Ⅸ（φ=6.00）	25.00	30.00	36.30	44.20	46.10	54.20	60.80	66.00	72.20	85.00	100.00

表 6-2 试验结果统计表[12]

组号	样本数	崩塌砂石质量 X 的均值/g	X 的方差	统计分布类型（显著性水平 α=0.01）
0.5～1.0mm	60	725.00	165852.0	非幂律分布
3.0mm	52	2459.00	2387308.0	非幂律分布
2.5～5.0mm	52	1662.00	1346433.0	非幂律分布
5.0～10.0mm	60	1122.00	1284645.0	非幂律分布
Ⅰ（φ=1.53）	52	628.00	105139.0	非幂律分布
Ⅱ（φ=2.55）	52	663.00	334175.0	非幂律分布
Ⅲ（φ=2.85）	52	321.00	266843.0	负幂律分布：Y=4.94－0.48lnX
Ⅳ（φ=2.96）	52	160.00	28689.0	负幂律分布：Y=－0.64－0.78lnX
Ⅴ（φ=3.41）	82	103.10	52317.8	负幂律分布：Y=4.53－0.39lnX
Ⅵ（φ=4.00）	61	77.45	22378.4	负幂律分布：Y=1.99－0.42lnX
Ⅶ（φ=4.50）	68	88.10	63529.0	准周期分布
Ⅷ（φ=5.00）	130	93.30	231650.0	准周期分布
Ⅸ（φ=6.00）	65	97.20	42715.0	准周期分布

在每组试验中，试验方法和步骤基本相同。建造一处于临界状态的干燥砂石单面坡后，用设于坡顶、与箱同宽的传送带，缓慢而均匀地添加 105g 干燥砂石（与砂坡砂石级配相同，匀铺于传送带上）进行扰动，而后称量扰动后坍滑出砂箱的砂石质量，完成一次试验。接着再继续在坍滑后的残余坡面上加砂，称量每次的落砂质量。每组试验均不少于 50 次。

各组试验结果统计特征值见表 6-2。颗粒均匀或较均匀（Ⅰ、Ⅱ组）时，落砂量为非幂律分布；颗粒非均匀度较大（Ⅲ～Ⅵ组）时，落砂量为负幂律分布；非均匀度继续增大（Ⅶ～Ⅸ组）时，落砂量则为非幂律分布。同时，试验呈现以下三种不同的现象：

（1）现象1。对于均匀砂和非均匀系数 $\varphi < 2.85$ 的砂堆，初始坡面较平坦，起伏平缓。大规模坍塌呈现准周期分布，两次大规模坍塌之间出现的是小规模坍塌。一次大规模坍塌之后，系统偏离临界态，处于亚临界态，砂堆的坡度降低2°～5°，继续加砂，砂堆的坡度增大，系统逐渐向临界态演化。

（2）现象2。非均匀系数较大（$2.85 \leqslant \varphi \leqslant 4.50$）时，坡面状态随着每次加砂逐步进行调整，但呈现出很大的不确定性或多样性。

（3）现象3。非均匀系数很大（$\varphi > 4.50$）时，砂堆形成以后，继续加砂，容易形成较粗大的颗粒积聚在下部，而较细小的颗粒积聚在上部的形态。上部的小颗粒休止角较小，而下面的大颗粒休止角则较大，整个坡面变成两部分。继续加砂，小颗粒易停留在上坡面，使上部坡角增大，直到上部坡角与下部坡角接近时，坡面上部处于超临界态，再继续加砂，可能发生大规模崩塌。

当非均匀系数 $\varphi \leqslant 4.50$ 时，崩塌砂石质量的均值随着非均匀度的减小而逐渐增大，即发生“雪崩”的概率逐渐增大。“雪崩”概率超越一定阈值，量变产生质变，即鲁棒性被破坏。但是，当非均匀系数 $\varphi > 4.50$ 时，崩塌砂石质量的均值随着非均匀度的增大而逐渐增大。

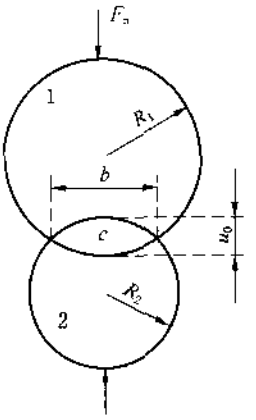
由此可以看出，不同非均匀系数 φ 对砂堆崩塌自组织临界特征具有极为主要的影响。

6.2.2 大粒散体岩石 2D－Ball 模拟原理

苏风环、何越磊等所作的临界单面坡砂堆模型试验主要是针对粒度在1mm以下的砂粒堆积的自组织性进行研究。但随着岩石颗粒直径的增大，其动力学行为将有很大的不同，此时颗粒的质量、速度、颗粒之间接触关系等将不能忽视。为此，在 Cundall[15,16] 颗粒离散单法基础上，开发了能够模拟散体流动规律（如破碎顶煤运移）及放煤过程的2D－Ball 程序，其原理如下所述。

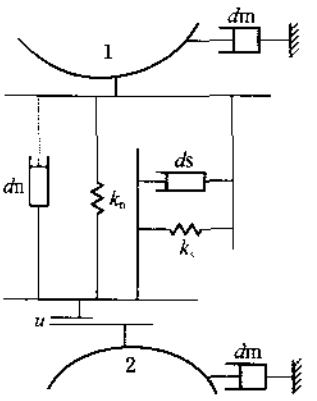
6.2.2.1 力与位移的关系

与多边形单元一样，圆形单元也是靠它们之间接触的“叠合”作用的（图6－10），图6－10中 R_1 和 R_2 分别是两单元的半径，c 是接触点，b 是接触宽度，F_n 是单元之间的对心压力。与图6－10所对应的力学模型如图6－11所示。



1，2—球的编号

图6－10 两个相互接触的圆颗粒



1，2—球的编号

图6－11 颗粒接触的力学模型

对于圆形颗粒，两个颗粒之间的法向力增量 ΔF_n 和切向增量 ΔF_s，分别与它们之间的法向位移增量 Δu_n 和切向位移增量 Δu_s 成正比，即

$$\begin{cases} \Delta F_n = k_n \Delta u_n \\ \Delta F_s = k_s \Delta u_s \end{cases} \tag{6-8}$$

式中 k_n, k_s——接触点的法向、切向刚度。

颗粒在接触点的法向刚度的导出式为

$$\frac{k_n u_n}{b} = E \frac{u_n}{2(R_1 + R_2)}$$

或

$$k_n = \frac{Eb}{2(R_1 + R_2)} \tag{6-9}$$

式中 E——颗粒的弹性模量。

接触点的切向刚度 k_s 为

$$k_s = \lambda k_n \tag{6-10}$$

式中 λ——刚度折减系数，一般取 0.1～1.0 之间的值。

另外，Kiyama 提出颗粒之间法向刚度的计算式[16]为

$$k_n = \frac{\pi E}{2(1-\mu^2)\left[1.5 + \ln\left(\frac{4R_1}{b}\right) + \ln\left(\frac{4R_2}{b}\right)\right]} \tag{6-11}$$

$$b = \left[\frac{8R_1R_2}{\pi(R_1 + R_2)}\left(\frac{1-\mu^2}{E}\right)F_n\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中 μ——泊松比。

其他符号意义同前。

对于球形颗粒，可以应用弹性力学中的赫兹接触理论，建立作用力和位移的关系为

$$u_n = \theta \pi^2 q_0 r_c \tag{6-12}$$

$$\theta = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi E}$$

$$q_0 = \left[\frac{3F_n(R_1 + R_2)^2}{2\pi^5 R_1^2 R_2^2 \theta^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$r_c = \left[\frac{3\theta R_1 R_2 F_n}{2(R_1 + R_2)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

式中符号意义同前。

由式（6-12）可以求出两个单元之间的法向力 F_n 与位移 u_n 关系为

$$F_n = H \cdot (u_n)^{\frac{3}{2}} \tag{6-13}$$

$$H = \frac{2E}{3(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

由于对切向力的计算比较复杂，仍然假定切向力的增量 ΔF_s 与切向位移的增量 Δu_s 成正比关系，由理论推导可得

$$\Delta F_s = k_s \Delta u_s \tag{6-14}$$

$$k_s = \left(\frac{E}{1+\mu}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left[12\ (1-\mu)\ \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2} F_n\right]^{\frac{1}{3}}}{2-\mu} \tag{6-15}$$

式中 k_s——切向刚度系数。

由式（6-15）可知，切向刚度系数与法向力有关。

若两个颗粒的性质不同时，则它们之间的接触刚度为

$$k_{12} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tag{6-16}$$

式中 k_{12}——颗粒1和颗粒2之间的接触刚度；

k_1——颗粒1的接触刚度；

k_2——颗粒2的接触刚度。

下面以两个圆形颗粒的接触为例，推导接触力 ΔF_n 与 ΔF_s 的计算公式。

规定法向力 F_n 使单元受压为正，切向力 F_s 使单元产生逆时针旋转为正（图6-12）。设单元1和单元2的圆心坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)；速度矢量分别为 $\dot{u}_{(1)i} = \{\dot{u}_{(1)x}, \dot{u}_{(1)y}\}$ 和 $\dot{u}_{(2)i} = \{\dot{u}_{(2)x}, \dot{u}_{(2)y}\}$；角速度分别为 $\dot{\theta}_{(1)}$ 和 $\dot{\theta}_{(2)}$，都为逆时针方向；半径分别为 $R_{(1)}$ 和 $R_{(2)}$；质量分别为 $m_{(1)}$ 和 $m_{(2)}$；$P_{(1)}$ 和 $P_{(2)}$ 分别为单元1和单元2与它们连心线的交点（图6-13）。

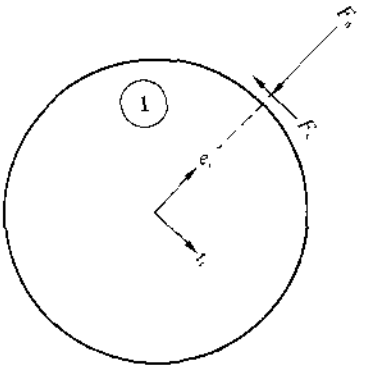


图6-12 符号约定

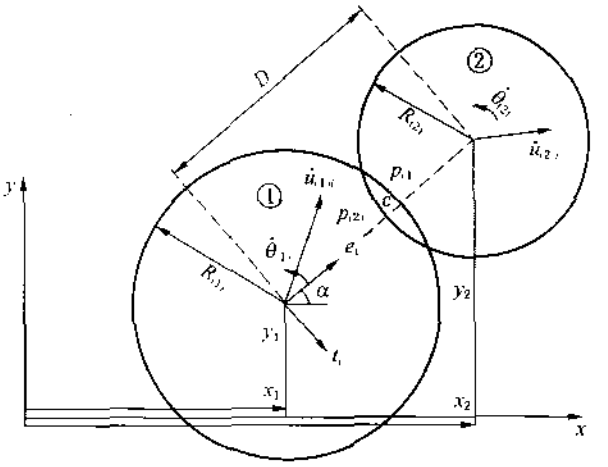


图6-13 力-位移关系

若两个单元满足关系式：

$$D < R_{(1)} + R_{(2)}$$

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

则认为它们接触，接触点 c 在 $P_{(1)}$ 和 $P_{(2)}$ 两点的中央（图6-13）。

若引入两个相互垂直的单位矢量 e_i 和 t_i，则法向力和切向力增量为

$$\begin{cases} \Delta F_n = k_n \Delta u_n = k_n \{[\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}] e_i\} \Delta t \\ \Delta F_s = k_s \Delta u_s = k_s \{[\dot{u}_{(1)i} - \dot{u}_{(2)i}] \times \\ t_i - [\dot{\theta}_{(1)} R_{(1)} + \dot{\theta}_{(2)} R_{(2)}]\} \Delta t \end{cases} \tag{6-17}$$

6.2.2.2 球体之间的接触关系

大量的试验研究表明，无论是土体，还是煤岩块体之间都不是简单的刚体接触关系，其之间的接触本构关系，与块体之间的黏聚力 C 和摩擦因数 f 有关。因此，球体之间的接触本构关系，可近似用 Coulomb – Mohr 准则来判定，即

$$|F_s| \leqslant C + F_n + \tan\varphi \tag{6-18}$$

式中 C——黏聚力；

φ——块体之间内摩擦角；

F_n、F_s——块体之间的法向力和切向力。

6.2.2.3 边界条件

1. 刚性壁边界

当用刚性壁作边界时，边界条件可以用坐标原点为 C 的两个平移速度和一个转动速度来定义（图 6-14），也可以采用伺服控制机理保证刚性壁所受的法向力不变。

2. 颗粒边界

当边界是由颗粒自身所组成时，边界是一个凸多边形，并且可以将其想象为由位于边界颗粒形心处的桩钉所拉紧的弹性皮筋。内部颗粒向外运动，当其形心接触到边界上任意两个相邻颗粒形心的连线时，将变为边界颗粒。颗粒边界条件有 4 种控制方式，如下所述。

1）应变控制边界

应变控制边界是由边界颗粒的速度来表示的。此方法不考虑边界颗粒所受的外力，并且假定边界颗粒没有角速度。在边界上，每个颗粒形心的速度 $\dot{u}_i$ 为

$$\dot{u}_i = \dot{e}_{ji} x_j \tag{6-19}$$

式中 $\dot{e}_{ji}$——给定的应变率张量；

x_j——颗粒相对于颗粒体中心的坐标矢量。

2）应力控制边界

当选择应力控制边界条件时，必须给定边界上的平均应力张量。一般情况下，平均应力张量可以通过对边界颗粒施加集中力来实现。如图 6-15 所示，平均应力张量作用在虚线上，每条边中点所受的等效集中力为

$$F_i = \sigma_{ij} n_j L \tag{6-20}$$

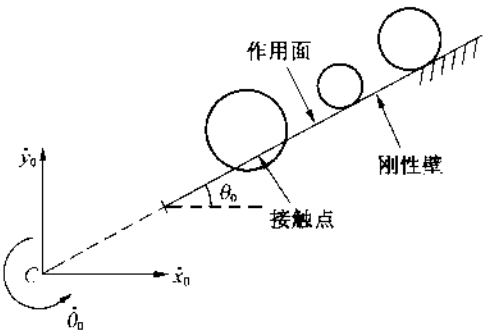


图 6-14 刚性壁边界

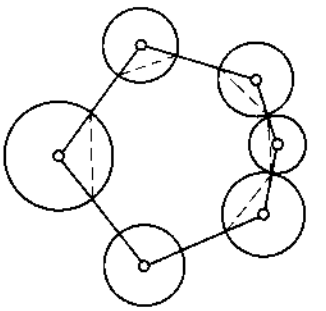


图 6-15 应力控制边界

式中 F_i——集中力矢量；

σ_{ij}——所施加的应力张量；

n_j——边的单位外法线矢量；

L——边的长度。

每条边上的力如何传递到颗粒形心上，这取决于该边的类型。对于连接颗粒 A 和 B 的边，集中力可根据力和力矩平衡原理分配到两个颗粒的形心上（图 6-16）。

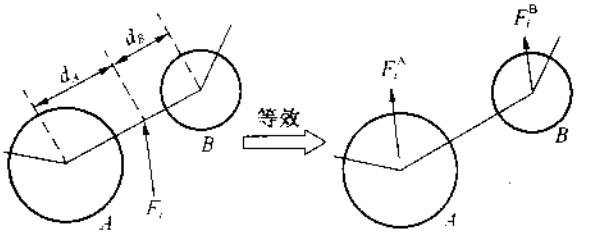


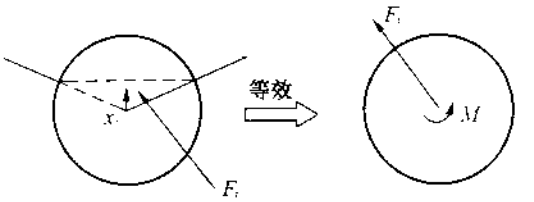
图 6-16 集中力的分配图

$$\begin{cases} F_i^A = \dfrac{d_B}{d_A + d_B} F_i \\ F_i^B = \dfrac{d_A}{d_A + d_B} F_i \end{cases} \tag{6-21}$$

对于位于颗粒内的边，力可直接作用在颗粒的形心上，但应附加一个平衡力矩（图 6-17），即

$$M = -\varepsilon_{ij} F_i x_j \tag{6-22}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



6-17 集中力的等效变换

式中 x_j——颗粒形心到边中点的距离矢量。

在一般情况下，由于形心与边的距离很近，力矩 M 是非常小的。当应力接近颗粒体的强度时，应力控制边界上的颗粒将会出现不稳定现象。虽然应变控制的边界不会出现上述现象，但也有其不足之处。例如，各应力分量在计算过程中总是变化的，这给结果的解释带来了许多麻烦，特别是与物理试验对照时更为困难。因此，为了弥补以上两种边界的不足，又提出两种控制边界：伺服控制边界和平均应力的控制边界[16]。

6.2.3 散体顶煤放出自组织过程 2D-Ball 系统模拟

6.2.3.1 2D-Ball 系统的特点及功能

2D-Ball 软件，是在 Cundall 的颗粒元的基础上，用 VC++语言平台开发的，其目的是将煤岩块体视为不同尺寸的圆球体，用于模拟散体煤岩自组织流动规律。该软件与 AutoCADR14 绘图软件平台对接，这样既实现了放煤建模时可通过界面友好的 Windows 下拉菜单进行模型参数的输入，又可将煤岩块体的几何形状、力场、速度场及位移场以醒目的方式进行图显。

2D－ball 系统的主要功能有：

（1）该系统已自动设置好放煤模型格式，用户可以按照菜单的选项进行操作。其主要包括壁几何与物理参数的输入、球几何与物理参数的输入、运行参数及图形类型控制等。

（2）能够绘出某一时刻各球所处的状态、力、速度及位移等。

（3）提供了对边界壁的移动、删除和添加功能，可以方便地对所研究问题进行有效仿真。

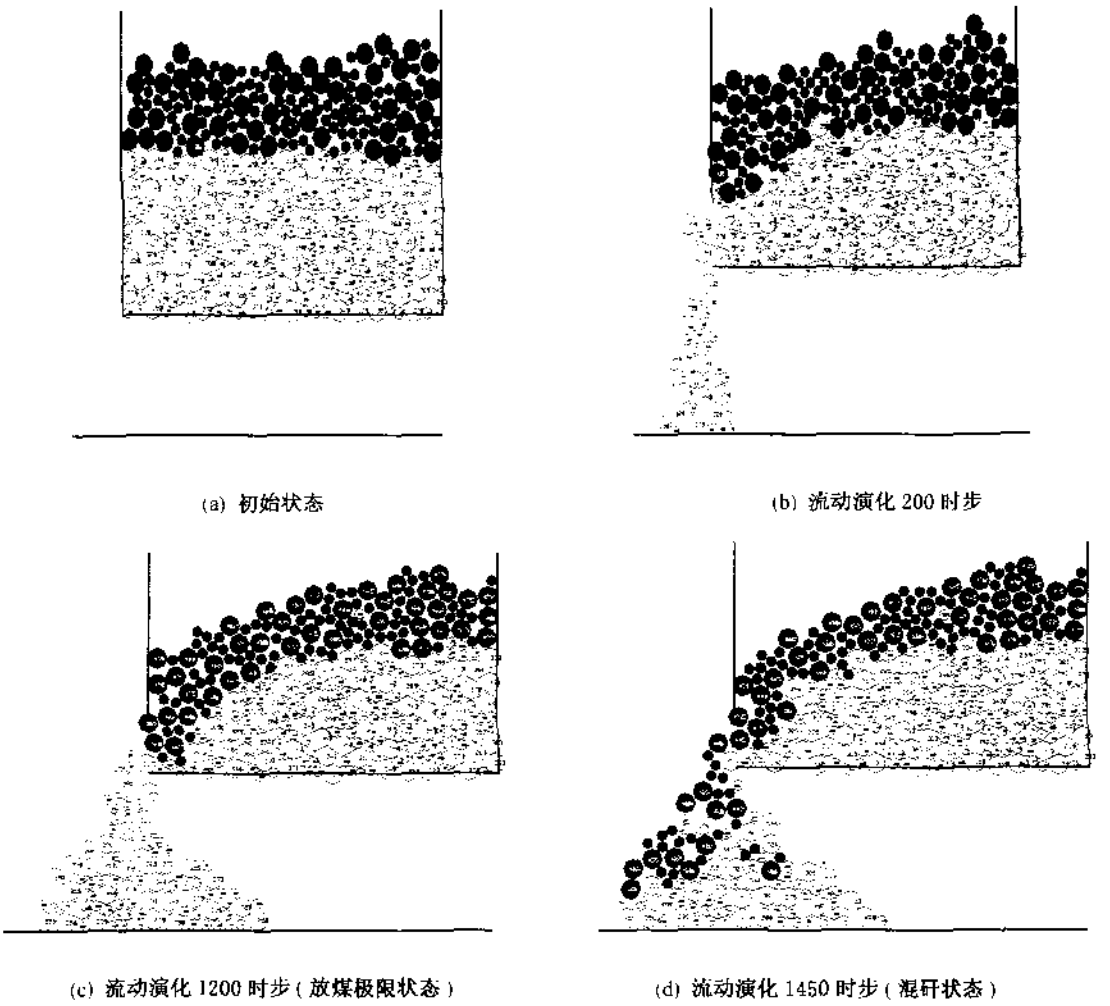
6.2.3.2 顶煤放出自组织过程模拟分析

对垂直煤层走向的单口放煤、沿工作面倾斜方向两个口同时放煤不同放煤顺序下煤及矸石散体自组织流动形态、力场及速度场进行了模拟。

1. 垂直于煤层走向的单口放煤

1）煤岩自组织流动放出形态

如图6－18所示，当把放煤口打开后，在放煤口附近的煤体竞相从放煤口流出。随着



(a) 初始状态　(b) 流动演化 200 时步

(c) 流动演化 1200 时步（放煤极限状态）　(d) 流动演化 1450 时步（混矸状态）

● 矸石；□ 煤块

图6－18 单口放煤状态图

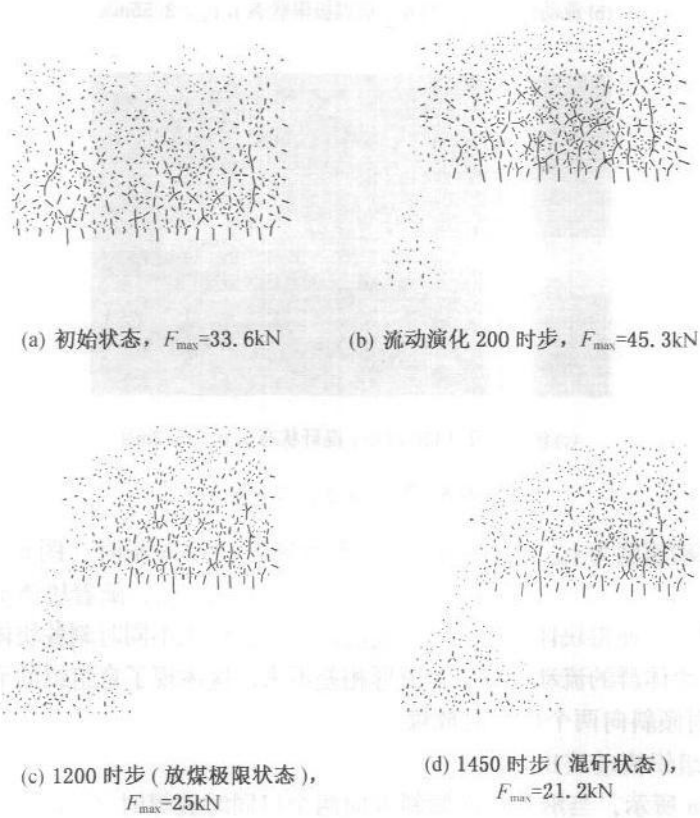
煤体不断放出，上部矸石不断下移，这时未放出的煤体慢慢形成近45°左右的稳定坡度角；当流动演化达到1200时步时，放煤达到极限状态（图6-18c）；若进一步进行放煤，则出煤矸混合放出，而且是以矸石为主，这时未放出煤体的稳定坡度角变化不大，仍为45°左右（图6-18d）。因此，放煤见矸后，加大放煤的时间，只能增加矸石放出量，对放出煤量的提高量很小，因为上部的破碎矸石将成为该阶段自组织流动体的主体。

2）力场

如图6-19a所示，在放煤的初期，松散煤岩中块体之间的作用力较大，当流动演化200时步时，最大力为F_{max}=45.3kN（图6-19b）；随着煤的放出，块体之间的作用力减小，当流动演化1200时步时，放煤达到放煤极限状态，块体之间的最大作用力为F_{max}=25kN（图6-19c）。这说明，各煤岩块体之间相互作用力在不断自组织调节分配中，因为一开始，其间的作用力以静力为主，但随着块体运动的出现，动力作用和静力作用并存，导致块体之间作用力增加；随着煤岩块体的进一步放出，块体数量减少，从而块体之间的动力和静力减少，这充分体现了在重力场内块体之间相互作用的自组织性。

3）速度场

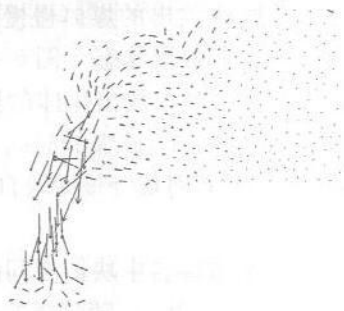
如图6-20所示，随着煤体的不断放出，散体介质的运动速度越来越快，且最大运动速度出现在放煤口附近。当流动演化200时步时（图6-20a），煤块体最大运动速度在放煤口附近，为v_{max}=1.36m/s；当流动演化1200时步时（图6-20b），处于极限放煤状态，



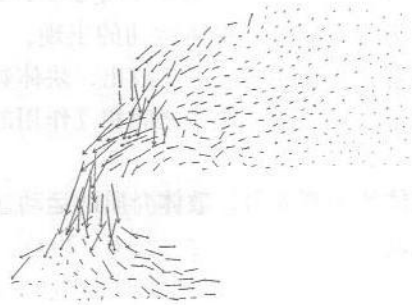
(a) 初始状态，F_{max}=33.6kN　(b) 流动演化200时步，F_{max}=45.3kN

(c) 1200时步（放煤极限状态），F_{max}=25kN　(d) 1450时步（混矸状态），F_{max}=21.2kN

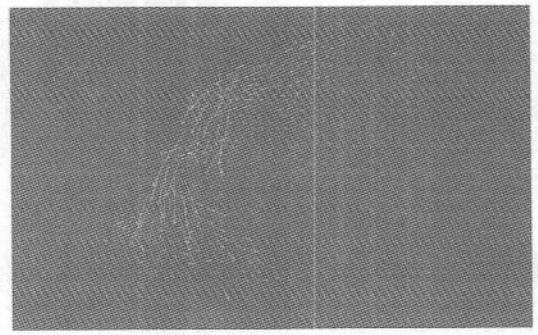
图6-19　单口放煤力场



(a) 流动演化 200 时步（放煤极限状态），v_{max}=1.36m/s



(b) 流动演化 1200 时步（放煤极限状态），v_{max}=3.55m/s



(c) 流动演化 1450 时步（混矸状态），v_{max}=5.2m/s

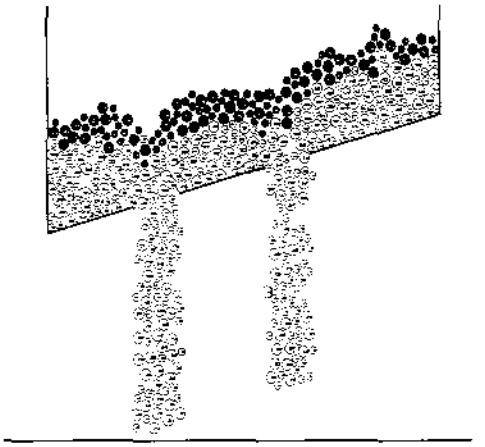
图 6-20　单口放煤速度场

煤岩块体所达运动速度为 v_{max} =3.55m/s；当流动演化 1450 时步时（图 6-20c），处在混矸状态，块体的最大运动速度为 v_{max} =5.2m/s。与力场不同的是，随着块体不断放出，破碎顶煤和矸石数量减少，使得块体自组织流动速度加快。虽然在不同时刻各块体流动速度方向在变化，但是整个块体群的流动速度矢量流形相差不大，这体现了自组织的平均场特征。

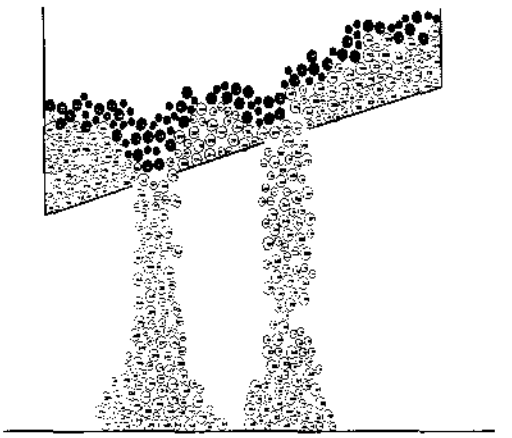
2. 沿工作面倾斜向两个口同时放煤

1）煤岩自组织流动放出形态

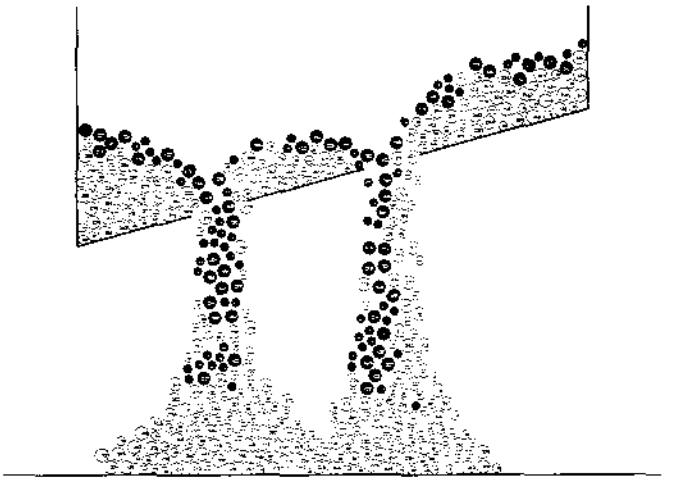
如图 6-21a 所示，当沿工作面倾斜方向两个口同时放煤时，每个口处上部若干煤将慢慢发育成典型漏斗状，两个放煤口之间将有一部分“死煤”，即使在煤矸混放状态，也难以将该部分“死煤”放出（图 6-21c）。这与单口放煤相比较，所不同的是在两个放煤口



(a) 流动演化 300 时步



(b) 流动演化 1150 时步（放煤极限状态）



(c) 流动演化 1200 时步（混矸状态）

● 矸石；□ 煤块

图 6－21　两向两个口同时放煤状态图

之间，形成一个不对称倾斜“砂堆”，而且该“砂堆”随着煤岩的放出在不断自组织坍塌。

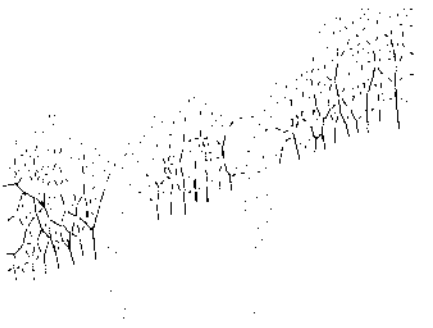
2）力场

如图 6－22 所示，在放煤的开始，两个放煤口处煤岩形成“拱状”结构，块体之间最大作用力 $F_{max}=91.6$kN（图 6－22a）；随着放煤工作的进行“拱状”力场逐步消失，块体间的作用力逐步减弱，当流动演化 1950 时步时，“拱状”力场完全消失，最大作用力也降低为 $F_{max}=48.5$kN（图 6－22c）。与单口放煤所不同的是，在两个放煤口之间形成一个不对称倾斜“砂堆”，该“砂堆”起桥或支座的作用，从而自组织形成了不断演化的自然平衡拱。

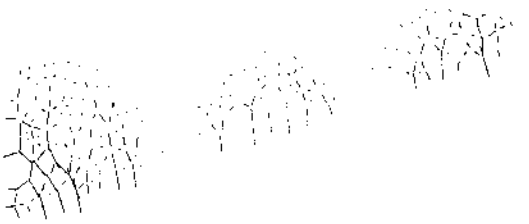
3）速度场



(a) 流动演化 300 时步，F_{max}=91.6kN

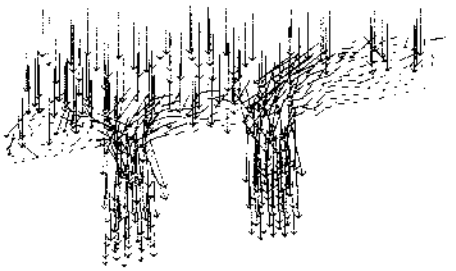


(b) 流动演化 1150 时步（放煤极限状态），F_{max}=65.3kN

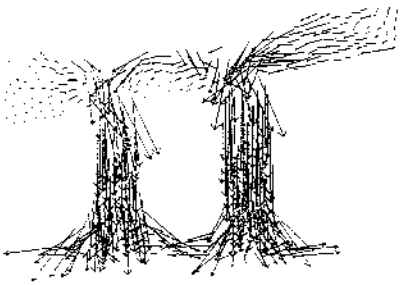


(c) 流动演化 1950 时步（混矸状态），F_{max}=48.5kN

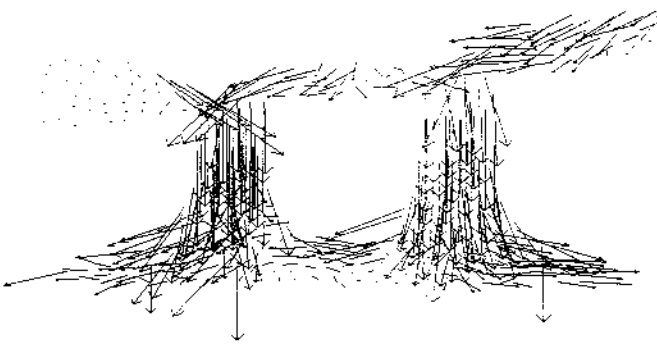
图 6－22　倒向两个口同时放煤力场



(a) 流动演化 300 时步，v_{max}=1.36m/s



(b) 流动演化 1150 时步（放煤极限状态），v_{max}=3.55m/s



(c) 流动演化 1950 时步（混矸状态），v_{max}=5.22m/s

图 6－23　倒向两个口同时放煤速度场

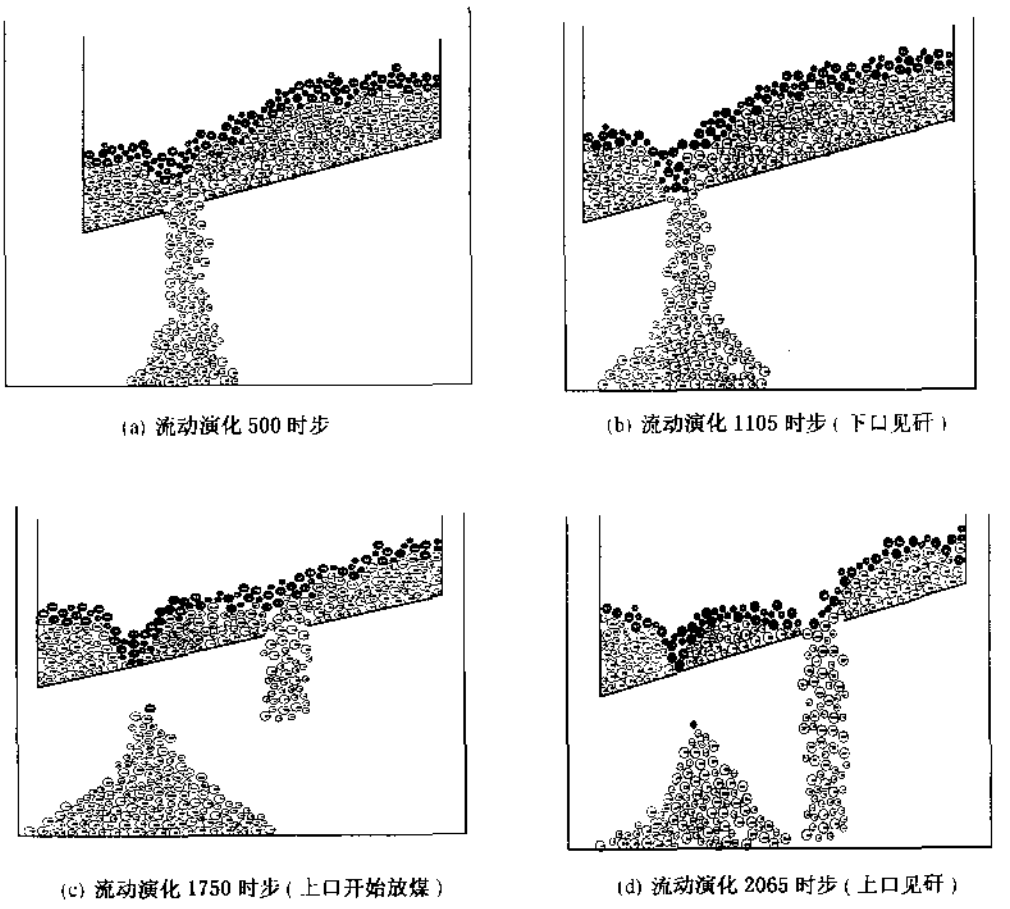
如图 6－23 所示，两个口随着煤体的放出，上部煤矸，逐步由从开始的以垂直移动为主，演化为以水平为主，其速度量值也在增大，从放煤初期（图 6－23a）$v_{max}=1.36m/s$，增大到混矸状态（图 6－23c）$v_{max}=5.22m/s$。与单口放煤所不同的是，在两个放煤口之间形成一个不对称倾斜“砂堆”，随着“砂堆”的减少，未放出煤岩体的速度由开始的垂直方向，向着水平方向演化，而已放出体的速度场与单口的速度场流形特征相似。

3. 上下不同顺序放煤

1）放煤形态

如图 6－24 所示，沿工作面倾斜方向先放下口，再放上口。与如图 6－25 所示的沿工作面倾斜方向先放上口，再放下口相比，前者两口之间的“死煤”将明显多于后者。对中间煤岩体部分而言，由于上口所临的是“逆坡”，顶部的矸石在自重力驱动下，在顺坡自组织下滑倾向下，不易逆坡流动，而下部的煤体沿着放煤口自组织流动无法改变。因此，先放上口再放下口，更有利于放出煤量的提高。

2）力场

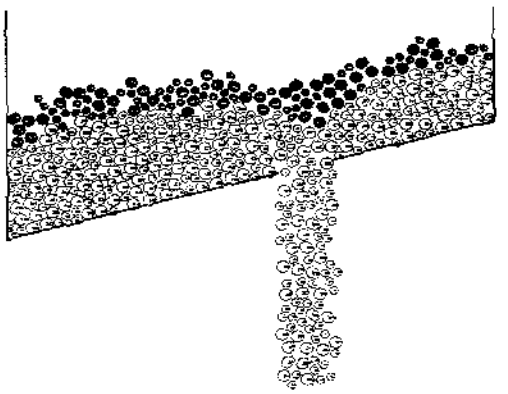


(a) 流动演化 500 时步　(b) 流动演化 1105 时步（下口见矸）

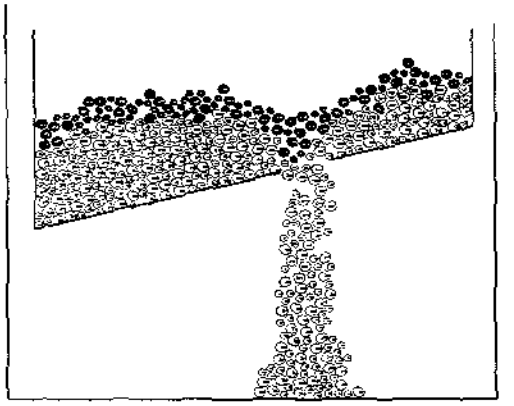
(c) 流动演化 1750 时步（上口开始放煤）　(d) 流动演化 2065 时步（上口见矸）

● 矸石；○ 煤块

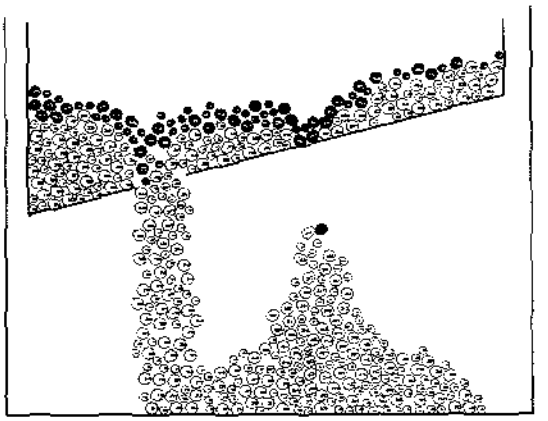
图 6－24　先下后上放煤状态



(a) 流动演化 500 时步



(b) 流动演化 1210 时步（上口见矸）



(c) 流动演化 1860 时步（下口见矸）

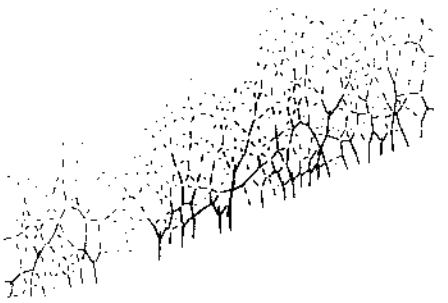
● 矸石；○ 煤块

图 6－25　先上后下放煤状态

如图 6－26、图 6－27 所示，“先下后上”放煤与“先上后下”放煤力场的分布规律基本一致，所不同的是：先下开始放煤时，上部块体之间的作用力大，下部块体之间作用力小；先上开始放煤时，下部块体之间作用力大，上部块体之间的作用力小。这充分体现了作为开放系统，自组织向着能量态演化的基本规律。

3）速度场

如图 6－28 所示，当“先下后上”放煤时，煤矸沿着倾斜方向上的运动，一直是上部煤矸移动的主体；当“先上后下”放煤时（图 6－29），在放上口时，煤矸的速度场主要指向放煤口，在放下口时，既有指向该口的速度场，又有上部沿倾斜方向移动的速度场。这是因为先放下口煤时，下部已经有了足够空间，为上部煤岩在自重力驱动下自组织下滑流动提供了条件。因此，先放上部煤，再放下部煤，将有利于减少窜矸现象。



(a) 流动演化500时步



(b) 流动演化1105时步（下口见矸）

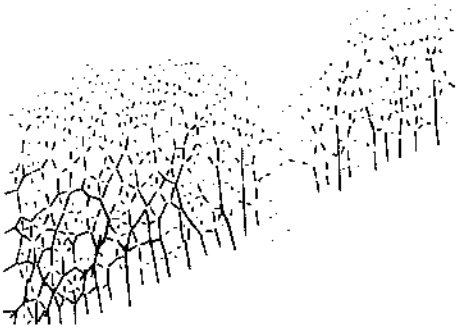


(c) 流动演化1750时步（上口开始放煤）



(d) 流动演化2065时步（上口见矸）

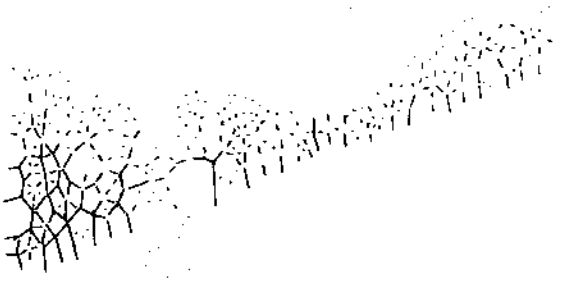
图 6－26　先下后上放煤状态



(a) 流动演化500时步，F_{max}=99.6kN



(b) 流动演化1210时步（上口见矸），F_{max}=121.6kN

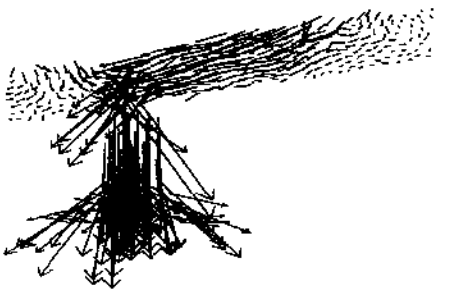


(c) 流动演化1860时步（下口见矸），F_{max}=78.6kN

图 6－27　先下后上放煤力场



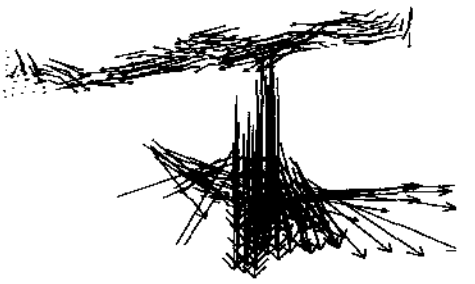
(a) 流动演化500时步，v_{max}=4.78m/s



(b) 流动演化1105时步（下口见矸），v_{max}=7.55m/s

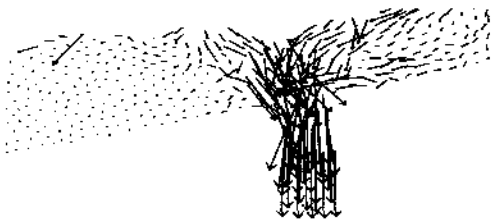


(c) 流动演化1750时步（上口开始放煤），v_{max}=13.2m/s



(d) 流动演化2065时步（上口见矸），v_{max}=16.3m/s

图 6-28　先下后上放煤速度场



(a) 流动演化500时步，v_{max}=4.78m/s



(b) 流动演化1210时步（上口见矸），v_{max}=7.55m/s



(c) 流动演化1860时步（下口见矸），v_{max}=13.2m/s

图 6-29　先上后下放煤速度场

6.3 不同尺度岩体破坏演化的自组织性

6.3.1 细观岩石破坏演化的自组织性

在一定外界应力作用下，岩石材料的变形破坏过程会表现出扩展的裂纹及其破裂过程是由随机、分散分布向最终破裂面丛集，从无序向有序演化的自组织特征[17-19]。在加载过程中，岩石承受的载荷逐渐加大，当载荷超过某一临界值（长期强度）时，岩石微破裂表现出连锁反应式的发展，既使所加载荷保持恒定，破裂仍会不断地以不可遏制的方式累进性地进行，直至完全破裂。

1. 细观岩石破坏演化的自组织机理

J. Lemaitre 等[20]从损伤力学的角度，考虑到材料损伤过程，提出了连续介质力学的概念，并建立了一维损伤模型，即

$$\sigma = (1 - D)\sigma_e = E(1 - D)\varepsilon \tag{6-23}$$

式中 σ——柯西应力或视压平均应力；

σ_e——有效应力；

E——无损岩石介质的弹性模量；

D——损伤参量，它表示材料体积单元中存在的微裂纹（微孔隙、微缺陷）的比率。

由式（6-23）可知，随着加载过程中实际应力 σ 的不断增大，岩石试样中破坏单元个数增加（即 D 不断增大），使得式（6-23）中分子不断增大，分母不断减小，这必然导致岩石中未破裂单元所承受的荷载 σ_e 呈现非线性增长趋势。由于岩石中各微元强度的分布具有不均匀性，则当某一时刻某些单元的强度低于该时刻的 σ_e 时首先会发生破裂。

尹光志等[17]对单轴压缩应力状态下砂岩破裂过程进行了试验研究，其结果表明，砂岩在单轴压缩应力作用下的最终宏观断裂破坏是其内部大量微裂隙的产生、扩展、密集、相互影响、相互连接，进而相互贯通的结果，这正是岩石宏观断裂破坏与其微观断裂发展过程间的本质联系。通过回归分析得出裂纹总数目 N 和总长度 L 与轴向应力 σ/σ_c 的表达式为

$$N = 162.36\ln(\sigma/\sigma_c) + 114.94 \tag{6-24}$$

$$L = 77.601\ln(\sigma/\sigma_c) + 19.797 \tag{6-25}$$

式（6-24）、式（6-25）的相关系数分别为0.9108和0.9375，这两个表达式较好

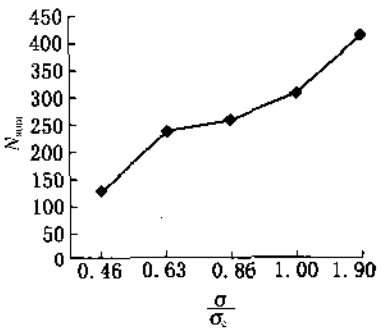


图6-30 砂岩裂纹总数目与应力关系曲线[17]

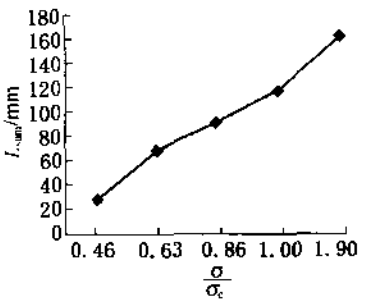


图6-31 砂岩总长度与应力关系曲线[17]

地描述了微裂纹总数目 N 和总长度 L 与轴向应力 σ/σ_c 的相互关系，如图6－30、图6－31所示。更进一步，可以得到

$$L/N = 0.478[\ln(\sigma/\sigma_c) + 0.225]/[\ln(\sigma/\sigma_c) + 0.708] \tag{6-26}$$

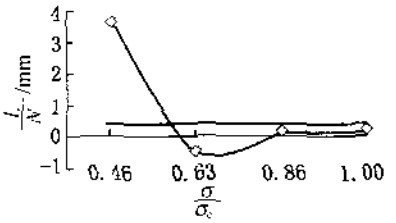


图6－32　微裂纹平均长度 L/N 与轴向应力 σ/σ_c 的关系曲线[17]

图6－32所示为微裂纹平均长度 L/N 与轴向应力 σ/σ_c 的关系曲线。从图6－32中可以看出，通过对砂岩事件在单轴应力状态下的微观断裂发展全过程的试验研究，得到微裂纹的平均长度 $L/N=0.478$mm，其数值决定于砂岩的粒径，是砂岩宏观断裂破坏的参考值。令 $L=0$，解式（6－25），得 $\sigma = e^{\ln\sigma_c - 0.255}$，这是微裂隙产生的应力值，这一应力值对理解岩石的长期强度是非常重要的。

物质世界中任何开放系统都处于一定的自组织演化过程中。1987年，Bak，Wiesenfeld 和 Chao Yang 对某一长度（规模）L 的微裂纹数目（频率）N 进行了统计（图6－33），结果表明：在无标度区域内，岩石微裂隙在生长和演化过程中，微裂纹数目的对数与微裂纹长度呈很好的线性关系；在不同应力阶段，岩石在单向应力作用下微裂纹的长度与频率之间的确遵守幂律规则。这样根据各个应力阶段微裂纹分布的幂律规则，可以定性地预测岩石在不同应力阶段某种长度微裂纹的数目，例如从图6－33中 $\sigma=0.86\sigma_c$ 曲线

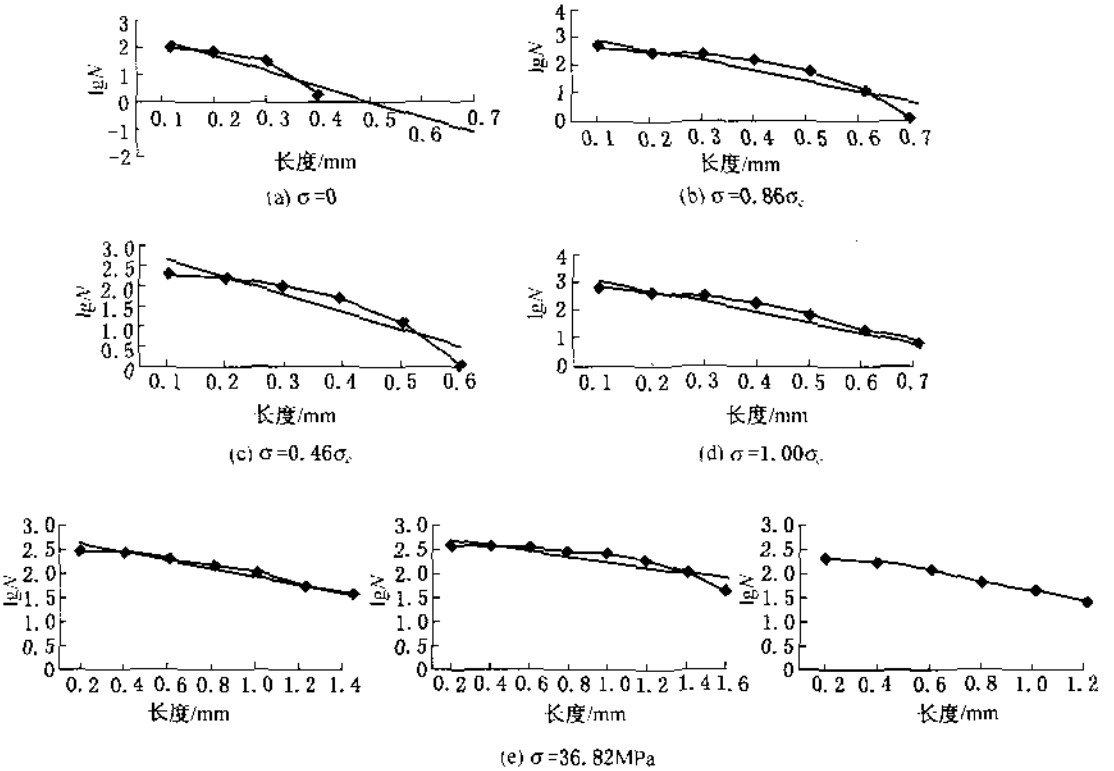


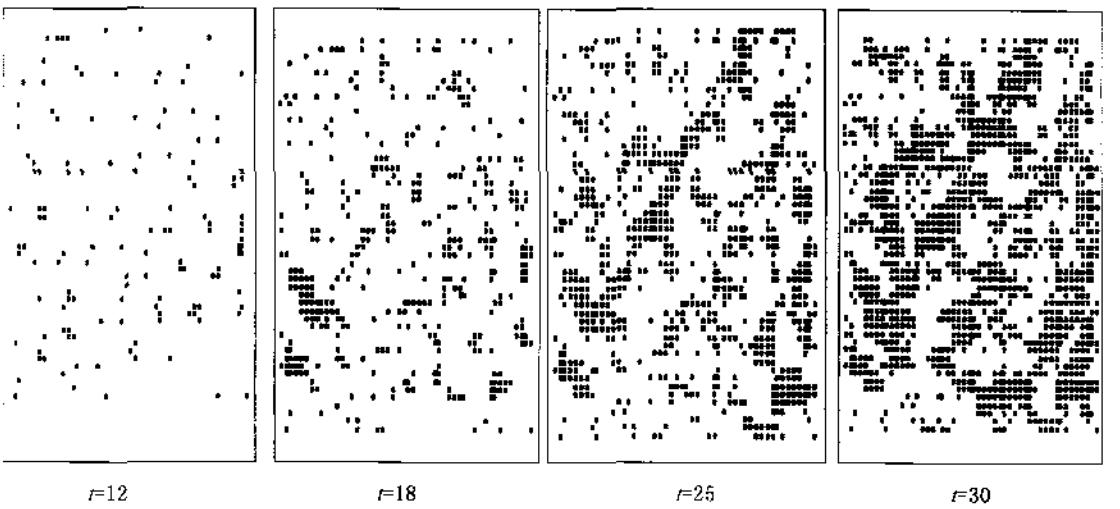
图6－33　各级应力状态下砂岩微裂纹长度与频率的关系曲线

的总趋势出发，可以大致推测该应力状态下长度大于0.5mm的微裂纹数目。由此可见，岩石在单向应力状态下微裂纹产生的规模和频率符合幂律规则，具有自组织特征。

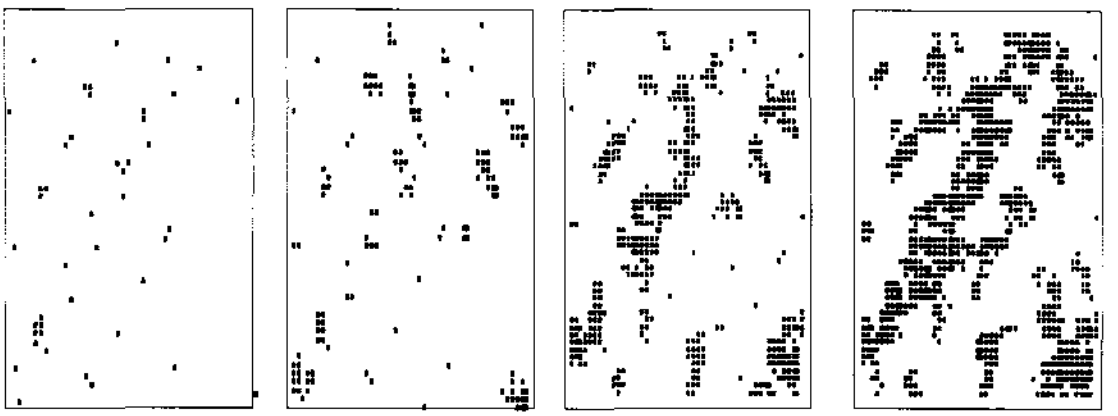
根据岩石在单向应力状态下微裂纹演化过程及微观断裂过程的试验研究结果，采用现代非线性科学的分岔、混沌和自组织理论对岩石微观断裂及微裂纹演化过程中的分岔与混沌特征进行了研究。研究结果表明，岩石在单向应力状态下微观断裂过程及演化过程可用Logistic方程来描述，因而具有分岔与混沌特征。同时，对微裂纹演化过程中岩石在各个应力阶段的微裂纹数目和规模进行了研究，结果表明微裂纹演化遵守幂律规则，具有自组织特征。

2. 细观岩石破坏自组织演化数值模拟分析[21-23]

由于岩石非均质性将影响到岩石破裂演化的自组织行为细观演化，因此为了模拟不同均质度对岩石破坏行为的影响，采用细观非均质物理元胞自动机PCA（其原理在后续章节专门叙述）对$m=5$、$m=10$两种不同均质度岩石材料的破坏模式进行了模拟[21-23]，其结果如图6-34所示。



(a) $m=5$



(b) $m=10$

图6-34　不同均质度岩石材料破裂过程PCA模拟

从图 6－34 可以看出，均质度对岩石破坏行为有着显著的影响。当岩石材料组分和结构不均匀（即均质度较小）时，岩石内部微破裂演化分布杂乱无章；当岩石材料组分和结构比较均匀（即均质度较大）时，尽管刚开始岩石内部微破裂演化分布也呈现出一定的随机性，但随着加载演化的进程，岩石微裂纹逐步成核而形成主破裂面，最后表现为裂纹间的汇合贯通，产生宏观破坏。这与张后全等[24]通过建立平面应力模型，并采用 RFPA 软件模拟的岩石在单轴压缩条件下的破裂过程相一致，如图 6－35 所示。

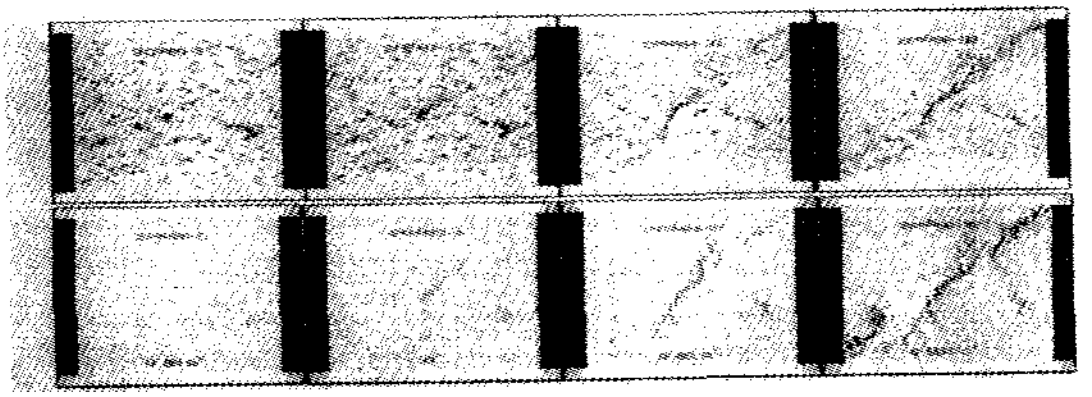


图 6－35　岩石压缩破裂渐进过程 RFPA 模拟结果[24]

因此，岩石在整个加载过程中，各单元所集聚的能量达到其极限状态时将破裂，并将能量力转移给相邻单元，从而造成裂纹尖端单元因能量集中而发生破坏，这样不断地累进性进行，必然引起岩石破裂的连锁反应式发展，直至宏观断裂面的形成。由此看来，此阶段的单元破坏不再是随机独立地进行，相邻单元、甚至是在整个系统的微元之间，都存在着协同的相互作用，这样就导致了岩石破裂过程中裂纹由随机、分散分布向最终破裂面丛集，从无序向有序演化的自组织行为。由此，便可理解岩石力学试验中岩石由稳定破裂阶段向不稳定破裂阶段演化时必然存在某一临界状态，即自组织的临界性（SOC）。

采用 PCA 方法，取元胞单元个数为 2500 个，各单元强度按照采用 Weibull 随机分布，其概率密度函数为

$$\varphi(u) = \frac{m}{u_0}\left(\frac{u}{u_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m} \tag{6-27}$$

式中　u——材料的强度；

$\varphi(u)$——不同单元强度的分布密度；

u_0——材料强度的总体平均值；

m——整体单元强度的均匀程度参数。

参数 m 值越大材料的均匀度越高；反之，m 值越小，材料的均匀度越低。图 6－36 所示为不同 m 值对应的密度变化曲线。

模拟结果如图 6－37 所示。从图 6－37 可以看出：当演化 100 时步时，岩石内部出现无序的微破裂点；当运行演化 108 时步时，图 6－37b 的左下角和右上部出现两个集中破坏带，整个岩块处于临界破坏状态；演化到 110 时步时，岩石内部各单元将迅速出现集中

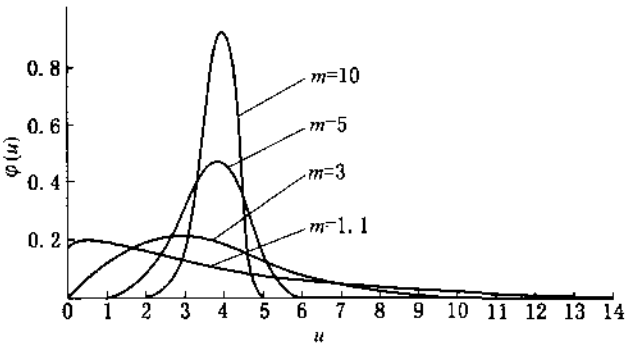


图 6-36 Weibull 分布密度变化曲线

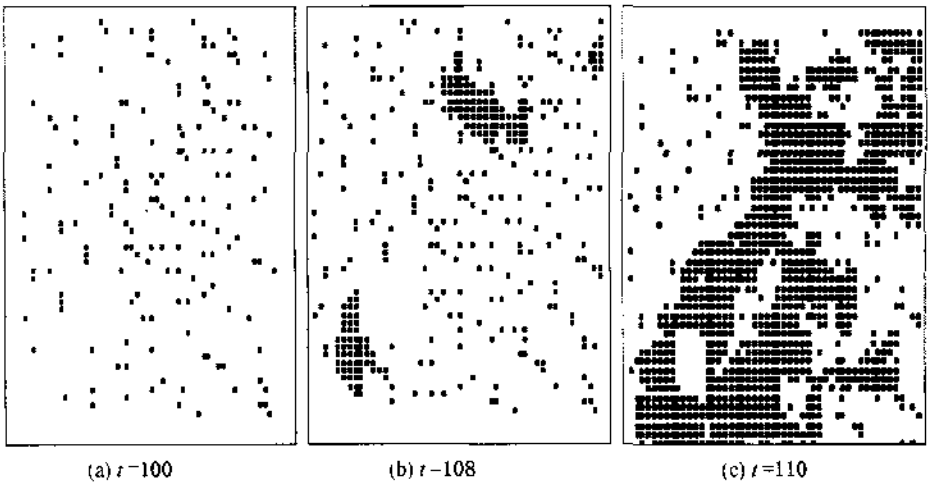


图 6-37 岩石破坏自组织临界模拟

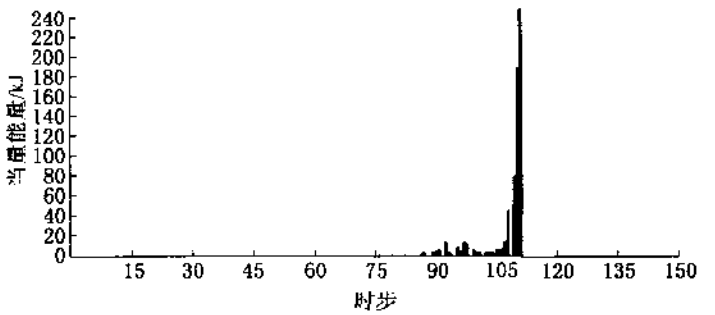


图 6-38 岩石自组织破坏临界现象能量图

"溃坏"，由分散的随机破坏变为宏观破坏，此时各单元因破坏释放的能量出现尖峰，如图 6-38 所示。

6.3.2 反应-迁移-力学耦合多作用下岩石断裂自组织性

岩石断裂作用是一个复杂的动力学体系和动力学过程，受到岩石结构、应力、流体迁移、化学反应等多种地质因素和过程的耦合控制。谭凯旋等[25]建立了岩石断裂作用的反

应－迁移－力学耦合动力学模型，并编制了模拟程序，模拟表明不同岩石的断裂作用强度和断裂渗透率演化是断裂与岩石、流体间耦合产生的正反馈和自组织作用。

1. 大尺度岩石断裂各影响因素分析

岩石断裂作用是一个复杂的动力学体系和复杂的动力学过程，受到许多因素和过程的耦合与反馈作用，如下所述。

1）岩石性质

断裂与其岩石性质（结构、矿物组成和力学性质）密切相关，同时断裂作用又对岩石性质产生重要影响。一条断裂可以同时通过力学性质相差很大的不同的岩石，如花岗岩、砂岩、页岩等。深部与浅部的断裂作用方式也有较大差异，一般深部为韧性断裂，浅部为脆性断裂。断裂引起的岩石流变参数的改变可影响到整个应力张量，继而又影响到随后的断裂作用。

2）流体流动

一些学者开始认识到断裂与流体的相互作用[26-28]。断裂作用是一种非连续变形，可以引起体系演化的不均一性。断裂不仅确定了流体流动方向，而且也引导了岩石强度弱化的方向。随着断裂张开，一方面岩石总体积增大，断裂中的流体压力挤压岩石，增大了正交于断裂面的压应力；另一方面，断裂的打开，提供了流体逃逸路径。由于流体流动和孔隙体积增大引起流体压力降低，流体压力降低和体积应变一起增大侧向应力，从而减小断裂生长速率。

3）断裂与流体－岩石化学反应

断裂与流体－岩石化学反应的耦合作用、流体－岩石间的化学反应对断裂体系的动力学演化同样有重要影响，流体－岩石反应可影响岩石的矿物组成、结构和力学性质，进而影响到断裂作用；同时，断裂通过压溶作用和热效应影响化学反应的进行，岩石的矿物、化学组成直接影响流体－岩石的反应。断裂作用影响岩石的渗透率和流体流动，从而也可影响流体－岩石反应的进行，断裂中流体活动产生的矿物沉淀可以填充断裂空间、堵塞流动通道、影响断裂渗透率的寿命以及使断裂产生愈合，从而导致“断裂—流体流动—流体压力释放—断裂愈合”的循环[29,30]。

综上所述，断裂受到岩石性质、流体流动、化学反应和力学等多种因素和多过程的联

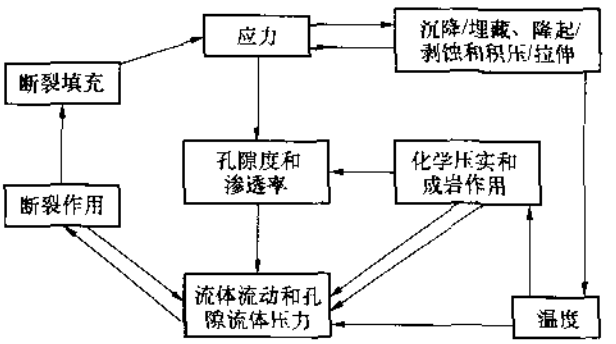


图 6－39　断裂体系的反应－迁移－力学耦合与反馈网络图[29]

合控制，并且这些因素和过程间都是强烈耦合和具有反馈作用的。断裂体系的反应－迁移－力学耦合与反馈关系，如图6－39所示。

2. 断裂动力学模型和模拟方法

根据图6－39的耦合关系，将断裂作用与固体和流体相质量、动量和能量守恒方程耦合起来，可以建立包含地球化学反应、流体和能量迁移、岩石力学的数学和物理化学的断裂体系演化动力学模型[29]，如下所述。

1）断裂作用

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = R(\Gamma, F) \\ F = aJ_1 + \sqrt{J_2} - b \\ \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \dfrac{G_f}{\mu(\Gamma)}[2\varepsilon\mu(\Gamma) - \tau] \\ \mu = \mu_0 \Gamma^8 \end{cases} \tag{6-28}$$

式中 Γ——岩石强度变量；

F——破裂函数；

J_1——有效应力张量的第一不变量；

J_2——有效应力张量偏量的第二不变量；

τ——剪应力；

ε——总剪切应变速率；

G_f——弹性剪切模量；

μ——剪切黏滞度，随岩石强度增大而增大；

μ_0——未断裂时的剪切黏滞度。

式（6－28）反映了断裂与岩石强度、剪应力之间的关系。

2）断裂网络动力学

描述断裂长度、宽度、方向和断裂渗透率演化的方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}L_m}{\mathrm{d}t} = R(L_m, a_m, p, \sigma, \Gamma) \\ \dfrac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}t} = A(L_m, a_m, p, \sigma, \Gamma) \\ \hat{n}_m = \hat{n}(\sigma, p) \\ K_{\mathrm{fr}} = \sum\limits_m \phi\beta \dfrac{(a_m)^2}{12}(\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \end{cases} \tag{6-29}$$

式中 L_m，a_m——第 m 条断裂的长度和宽度（张开度）；

σ——正应力；

p——流体压力；

$\hat{n}$——断裂平面的单位法线，下标 k、l 表示断裂的两个面的法线；

K_{fr}——断裂渗透率；

β——考虑断裂连通性的因子；

ϕ——岩石的总孔隙度。

式（6－29）中断裂长度和宽度扩展速率取决于正应力、流体压力和岩石强度。

3）流体质量守恒

$$\phi\beta_f\rho f\frac{dp}{dt} = -\rho_f\varepsilon - A\frac{K\rho_f}{\mu_f w^2}(p-p^*) + B \tag{6-30}$$

式中 A——无量纲岩石性质参数；

ϕ——岩石的总孔隙度；

K——岩石渗透率；

μ_f——流体黏度；

ρ_f——流体密度；

β_f——流体压缩系数；

p^*——上部流体逸出处的流体压力；

w——压力弥散的特征长度；

B——进入体系的流体流量。

4）固相质量平衡

$$\frac{d\phi}{dt} = (1-\phi)\varepsilon \tag{6-31}$$

5）动量守恒

$$q = -\frac{k}{\mu_f}(\nabla p - \rho_f g) \tag{6-32}$$

式中 q——达西流；

k——渗透率张量。

6）能量守恒

$$\left(\sum_m \phi_m\rho_m C_m + \phi_\rho C_f\right)\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(K_T\nabla T - \rho_f C_f qT) \tag{6-33}$$

$$K_T = \sum \phi_m K_m + \phi K_f$$

式中 ρ_m——第 m 矿物密度；

C_m——第 m 矿物热容；

ϕ_m——第 m 矿物的体积分数；

C_f——流体热容；

K_T——流体与岩石的联合热导率；

K_m——第 m 矿物的热导率；

K_f——流体的热导率。

7）溶质质量守恒

$$\frac{\partial(\phi c_i)}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\phi v c_i - \phi D_i\nabla c_i) = R_i \tag{6-34}$$

式中 c_i——流体中 i 组分的浓度；

v——流体的流速；

D_i——水溶液中 i 组分的扩散系数；

R_i——包含 i 组分的总化学反应速率。

式（6－28）~式(6－34）将断裂作用与岩石强度、应力、固体和流体相质量、动量和能量守恒方程耦合起来，构成了一个多过程、多因素耦合与反馈的岩石断裂动力学模型，可以模拟断裂网络的生长、几何、方向和强度。断裂作用引起的体积应变将断裂的成核、生长或愈合直接与应力计算相耦合。

3. 实例

以湖南水口山矿田康家湾铅锌金多金属矿床为实例，通过动力学模拟分析断裂作用的自组织及其对流体成矿的影响。湖南水口山是一个大型铅锌金多金属矿床，主要有两种类型矿床，即与花岗岩有关的接触交代型的老鸦巢矿床和与岩体无关的断裂破碎带型的康家湾矿床。康家湾矿床主要受矿区 F_{22} 逆冲断层和康家湾倒转背斜的控制，与岩浆岩体没有直接的成因关系，而是与断裂和流体的作用有关。矿体主要产于 F_{22} 断层附近及下盘的栖霞组与当冲组的层间断层破碎带硅化角砾岩中。流体包裹体和同位素地球化学研究表明，成矿流体主要为大气降水形成的低温、低盐度、低压力的 $NaCl + CO_2 + H_2O$ 型流体，成矿物质主要来自上地壳，即由于水－岩反应而溶解地层中的成矿物质，同时也有部分来自深源岩浆。低的成矿流体压力现象表明成矿经历了明显的构造减压作用，构造扩容空间和减压对成矿有较大的控制作用。

断裂渗透率是描述断裂作用强度及断裂与岩石和流体耦合作用的重要参数。断裂渗透率随深度演化（图6－40）的模拟结果表明：断裂渗透率大小在剖面上变化很大，并且这种变化随地层岩性的不同而不同，特别是栖霞组中断裂渗透率比相邻的上覆当冲组地层大约高4个数量级。断裂与岩石性质间存在强烈的耦合作用，相同应力条件下，不同的地层岩性其断裂作用强度有很大差异，因而断裂渗透率的大小和演化特征也有很大差异。这主要是因为不同岩性的力学性质不同所致，特别是断裂与流体的耦合与反馈作用可以引起岩石断裂渗透率的空间非均匀性增强。

图6－41所示为康家湾矿床主要成矿控矿断裂 F_{22} 断裂的断裂渗透率、切应力和流体流动势（流动方向）的二维综合模拟结果。从图6－41可以看出，高的断裂渗透率、高的切应力和流体流动汇聚区三者完全吻合在一起，均分布于下部的断裂通过栖霞组地层的

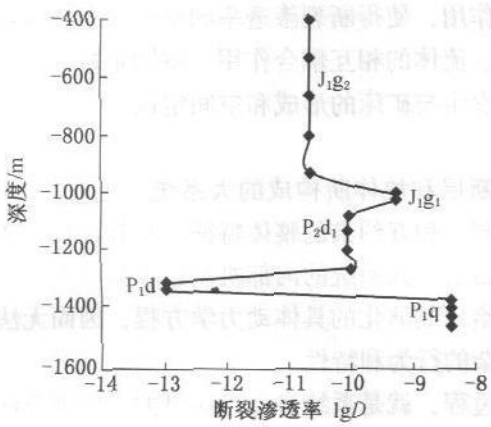


图6－40　不同地层中断裂渗透率的分布特征[25]

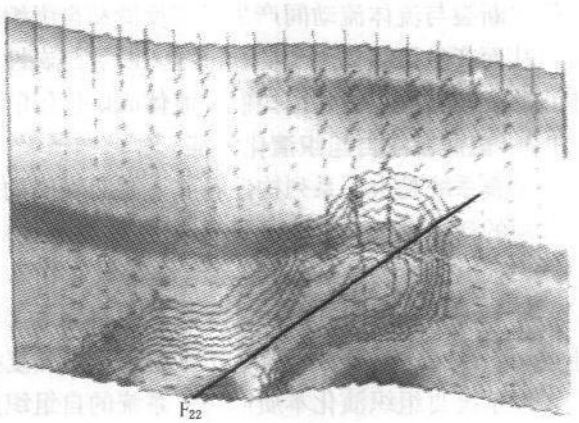


图6－41　康家湾矿区主要成矿断裂 F_{22} 的断裂渗透率、切应力和流体势演化的空间分布模拟结果(t =20Ma)[25]

部位，上部当冲组的低断裂渗透率可起到阻挡流体分散、促使流体汇聚的作用。当流体中溶解有较高浓度的成矿所需的化学组分时，则可以在这种断裂高渗透部位沉淀金属矿物而形成矿体。

康家湾 F_{22} 断裂的模拟结果（图 6－42）表明，高断裂渗透率部位即栖霞组地层断裂中确实产生了方铅矿、闪锌矿和金的沉淀，各种矿物沉淀的体积分数与现在的品位基本相似，其中闪锌矿的体积分数大约是方铅矿的 1.8 倍，但方铅矿的密度约是闪锌矿的 2 倍，因此两者的沉淀量基本相同。该模拟结果与地质事实一致，康家湾矿床的主要工业矿体即产于 F_{22} 断裂的栖霞组与当冲组的层间断层破碎带中，铅与锌的品位接近。

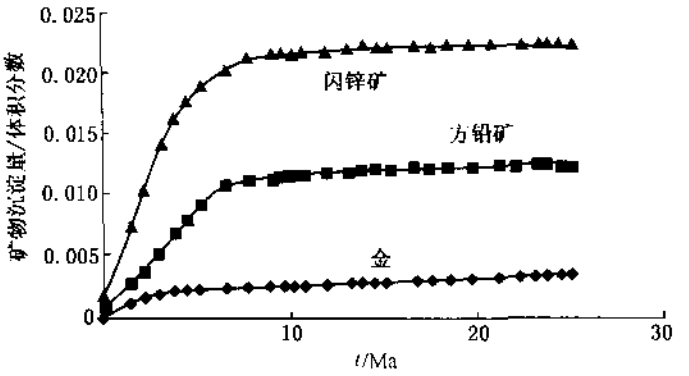


图 6－42　康家湾矿区栖霞组地层断裂过程中金属矿物沉淀量的演化[25]

上述模拟结果表明：由于岩性空间分布具有原始非均匀性，断裂与流体之间可以发生强烈的耦合与正反馈作用，即岩性的非均匀分布引起断裂渗透率的初始非均匀分布。在流体的参与下，初始断裂渗透率高的地方有利于流体的流动从而聚集更多的流体，流体的聚集产生高的流体压力而促进断裂的进一步扩展，使断裂渗透率进一步增大，渗透率的增大又促进了流体流入量的增大，流量的增大又引起压力增大、断裂扩展和断裂渗透率增高。这样在断裂与流体流动间产生了正反馈和自组织作用，使得断裂渗透率的空间非均匀性增强，从而产生聚流作用和矿物沉淀。断裂与岩性、流体的相互耦合作用，特别是断裂与流体间的反馈与自组织作用控制了流体成矿作用的发生与矿床的形成和空间定位。

6.3.3　盆震系统自组织演化特征

盆震系统是由一系列构造各异、层次不同的断层和块体所构成的大系统，是非线性、非平衡的耗散系统，其演化具有时空域内相互协同、相互约束的整体特征。在其演化过程中，表现出一系列复杂的构造微动态特征。由于目前对该系统的内部机制还不甚明了，再加上外界许多随机因素的不断干扰，暂时还无法给出其演化的具体动力学方程，因而无法通过动力系统的模型分析及数值求解来探索其复杂的行为和特性。

就系统自组织演化本质而言，系统的自组织过程，就是系统自动走向目的，实现有序和达到稳定的过程，即稳态→非稳态→奔向某种吸引子的新稳态的演化过程。

按照哈肯的观点[3]，系统演化的内在特性表现为各子系统的独立运动和彼此之间协同运动的矛盾和统一；控制变量对系统的作用则是系统演化的外在条件；序参量则从宏观

上突出地反映了系统演化过程的转换特征，它来自系统内部各子系统之间的协同作用，它一旦出现，将会主宰系统的有序过程，以其反馈作用支配着子系统的行为，使系统由无序走向有序。

当系统处于平衡态时，表现为混乱无序的状态，此时具有最大熵；当系统处于有序状态时，各子系统之间的协同作用占统治地位，系统具有减熵特征。系统的自组织过程是一个减熵、有序化的过程。

6.3.3.1 蕴震系统的复杂性

黄清华[31]就蕴震系统的复杂性与自组织演化进行了研究。这一点为解释蕴震系统的自组织演化过程提供了基础。黄清华等认为在周缘板块挟持挤压，局部地慢对流及多种环境动力因子的共同作用下，蕴震系统的各子系统之间强烈地相互作用，产生了一系列复杂的整体动态行为；地震往往成组地孕育并在相对集中的一定时空域中发生，形变场等前兆场具有大时空尺度的复杂而多变的整体协同性。

在一个地震活跃期来临或一个大地震逼近时，会出现远超过震源区的广阔区域内的构造微动态运动，不仅会出现偏离正常基准态的异常动态背景场，而且会出现多个“潜在震源区”。对某一个位于某一构造部位和一定局部自然环境中的前兆台站，其观测结果必然是构造运动背景场、构造微动态背景场、多个潜在震源和震源场以及局部环境动力因子的复杂叠加。无论怎样提高观测精度，其观测序列与地震的关系都不大可能是绝对一一对应和完全确定的。而对某一潜在震源（子系统）而言，是否发生地震（断层黏滑或破裂），不仅与应力应变累积程度有关，而且与断层面强度的主动变化有关（液体作用，化学、热力学因素等），同时还与周围断层活动及其他地震孕育与发生有关。

6.3.3.2 蕴震系统的自组织演化

蕴震系统总体上受印度洋、太平洋等周围板块的挤压和多种环境动力因子的联合控制与调制。在蕴震大系统内部某些子系统（断块、活动断层等）中会出现程度不同的应力积累和地壳运动等，并形成多个“潜在震源”。每个子系统及“潜在震源”的演化前景，与各子系统之间的相互作用、子系统与大系统及环境的相互作用密切相关。大系统在协同作用下将表现出一种整体的动态行为，因而它具有自己的“吸引子”。只有在“吸引子”上，系统才是稳定的；反之则不稳定。为了达到新的稳定态，必须自动地走向“吸引子”。

对于一个子系统，例如某条活动断层，同样也存在着自己的“吸引子”，如大地震复发周期、形变循同等，而且此系统还可进一步划分为更次一级的子系统，如黏滑段、蠕滑段等，它们之间也存在着协同作用，并和控制因素一起决定着子系统的演化。

稳态→非稳态→奔向某种吸引子的新稳态，体现了蕴震大系统演化的自组织过程（图6-43）。在走向新的稳态的过程中，每个具体的系统和子系统，可以有自己特有的表

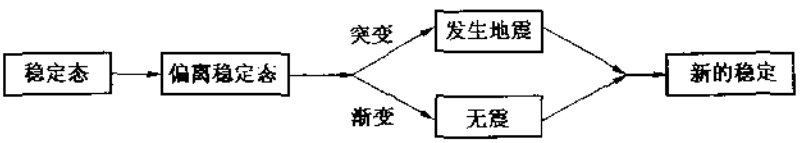


图6-43 蕴震系统自组织演化过程

现形式，也可以走不同的路径（“突变”或“渐变”），但它们都要通过相互协同，共同走向系统的新稳态。不管这种稳态是以何种吸引子（定常、周期、拟周期或混沌）的形式体现，在奔向新稳态（有时也可视为是回复和保持原有的状态）的过程中，都会出现减熵、降维和有序化演化趋向。

6.3.3.3 *蕴震系统构造微动态特征*

1. 应力场或应变场

综合断层面解可得到区域应力场最大主压应力轴的方向特征，而短边测距网资料则可用来计算区域应变场。这两种方法的研究结果表明，应力场或应变场的方向随时间变化的幅度不仅与断层网络本身的构造环境有关，而且同地震的孕育过程也密切相关。

车兆宏等[32]对北京圈短边测网资料所做的计算表明：京西地区应变大小和方向在大同地震前后均有较明显的变化（图6－44），而京东地区对应参数的变化不大。京东、京西测网在同一复测周期中使用的仪器及标定参数都是相同的，但计算得到的应变场存在着明显的差异。区域应变场变化剧烈的地段靠近震中，主压应力方向（基本与最小应变方向一致）发生明显偏转；区域应变场相对平静的地段远离震中，这证明，从有关的结论来分析，该方向特征可能存在某种吸引子（稳定态），由于各种构造因素及外界环境的作用，在孕震阶段，可能会出现偏离稳定态的现象（表现为相应的方向发生不同程度的扰动）；进入临震阶段，则可能会出现一些异常现象；随着破裂的发生（地震发生），该方向可能会逐步奔向另一种新的稳态（也可能回复到失稳前的稳态，这表现为相应的方向又回复到失稳前的位置）。

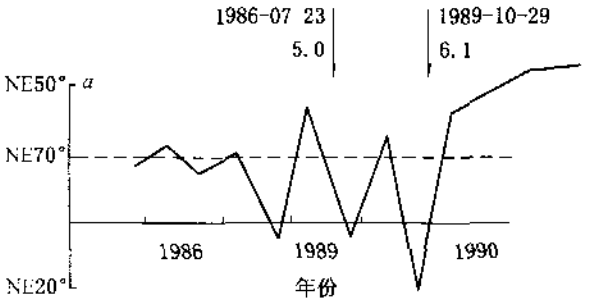


图6－44 京西区域最小主应变方向动态图[32]

总之，无论是应力场还是应变场，其大小和方向不仅受自身构造环境的影响，还受地震孕育过程及邻近多种动力因子的作用，在这诸因素的协同作用下，其演化呈现出一幅复杂的动力学图像。通过对相应合成时序图的跟踪、研究，可推断其演化具有某种自组织规律：平静期，断层活动杂乱无章，在整体合成上表现为活动水平较低，呈现出一种围绕正常基准的波动态；进入孕震阶段，断层活动受构造应力场等作用，可能逐步呈现出某种有序演变，宏观上表现为群体活动水平不断增强；进入临震阶段，断层网络各断层可能呈现协同作用，宏观上表现为断层运动出现群体巨涨落；震后，随着能量的释放，断层又回复到继承性运动状态，各自呈现出原来杂乱无章的微动态，宏观上表现为群体活动水平骤减，回复到绕正常动态基准波动的相对稳定态。以上演化即为一种从稳态、偏离稳态、失

稳、新稳态的自组织过程，而且这种演化与地震的孕育有着密切的联系。

2. 前兆信息场

断层形变测量可直接测定活断层的定常蠕滑、场前兆性蠕滑、源前兆性蠕滑（黏滑前的预滑）、同震位错（黏滑）和震后具有对数规律的蠕滑。以列线阵及小网的方式还可测定断层两侧的近场形变（由不连续面蠕滑到黏弹性再到弹性应变）。设置自记连续观测仪器，还可测到各种短周期的断层蠕滑（如前兆蠕滑、间歇性蠕滑等）。通过对断层网络的总体观测和分析还可得到断层各段、交叉网络、源内和源外（场）蠕滑与应力场时空动态演化的总体信息。以上所述的多种断层前兆构成了断层网络复杂的前兆信息场，其构造微动态特征如下所述。

1）群体异常效应

通过信息合成分析，发现大时空尺度内断层运动表现出群体异常效应，即群体速率异常、异常概率效应及异常频次效应等。

2）临震前涨落放大

在孕震阶段，断层网络出现应力应变积累，同时断层面强度也发生主动变化，还受周围各种环境因子的影响，这一系列的共同作用，导致了不少前兆现象的出现。在临震阶段，细涨落会被有选择地放大为巨涨落，表现出不同的前兆，有的会出现明显的异常（被选择放大），有的则没有发现明显的异常（本次孕震未被选择放大）。当巨涨落达到一定程度时，即可触发系统的相变，驱使系统走向不同的可能性空间（突变时发生大震，伴随断层的黏滑及震后的对数蠕滑等；渐变表现为断层的蠕滑和一系列小震的发生）。

3）群体协同性

在临震阶段，相距遥远的活断层在各自不同的稳态背景上相互呼应地出现了非线性慢形变的准同步现象。例如，在空间范围相当广阔的源外区，可出现形态各异的构造性前兆蠕滑。

6.3.4 地震系统自组织漏阈值描述方法[33]

地震作为宏观复杂动力学系统，在时空尺度上具有多重性，长程相关导致局部各态历证动力学的存在，耗损效应导致了“漏阈值”动力学行为，J. B. Rundle[33] 等建立了地震自组织行为的“漏阈值”动力学描述方法。

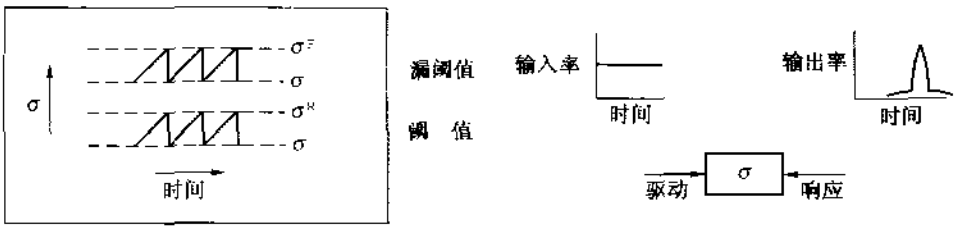
如图 6－45 所示，受驱动的非线性阈值系统是由非线性“单元”相互作用的空间网络构成的，每个单元各自具有：

（1）一个或多个输入。

（2）一个作为输入响应随时间演化的内在状态变量 $\sigma(t)$。

（3）一个或几个输出。

一般来说，一个单元的输入和输出是与其他单元通过一种相互作用的网络和一个外部关于 σ 的源相联系。当一个单元受到一个持续的并通过时间不断增加 σ 值的外部作用时，阈值动力学出现，直到达到一个预先设定的阈值状态 σ^{F}。这时，这个单元“激发”或“失稳”，因此，σ 的值降低到一个残差值 σ^{R}（图 6－45）。当平静无序状态到来时，残留应力和内部状态的阈值被修正，并且其动力学也可被噪声或非无序状态的存在修正。导致这些系统动力学自组织单元间的相互作用，可能是活跃的（积极的），在这种意义上，连接临近单元的弹簧失稳会引起一个单元接近激发态，或在相反的情况受到抑制（消极的）。



(a) σ和时间的关系　　(b) 态的变化率和时间的关系

图 6－45　在稳恒加载率下的时间函数通过对阈值单元的态变量 σ_0 显示漏（$\alpha>0$）和非漏行为（$\alpha=0$）

近年来，地震和摩擦滑动已经作为受驱动的阈值系统自组织的范例。最早出现在 Burridge－Knopoff（简称 BK）的滑块模型中，受驱动阈值系统的模拟研究是在每个阈值通过摩擦面块体的滑动单元时实现的。事实上，这些滑块表示断层上的黏性点或障碍体。所有块体通过刚性系数为 K_L 的弹簧与加载的板块相连接。此外，每个块体通过耦合的弹簧与 q 个其他的块体相连，每支弹簧的刚性系数是 K_C/q。这样，相互耦合的弹簧网络表示输入和输出的网络。对于这些模型，状态变量 σ 表示由直到静摩擦力达到失稳阈值 σ^F 导致的切应力，每个滑块都在阈值点开始滑动，并持续到滑块应力减少到动摩擦应力 σ^R。在滑动过程中，应力通过耦合弹簧从滑动块体转移到其他滑块。由于 BK 模型描述了一个平面断层，所有内块体的相互作用都是活跃的，意味着 $K_C>0$（约束的相互作用会使 $K_C<0$）。假定滑块滑动增加了与他相连的块体的应力。因此，失稳块体的雪崩会从单个不稳定的块体开始。失稳块体的雪崩描述了模型中的一个地震。

按照平均场阈值系统的自组织过程的物理学观点，在滑动块体情况下，模型可由 $qK_C\to\infty$ 的条件描述。在平均场的条件下，相互作用的范围变得比较大，导致了涨落的阻尼和平均场内的静止点，空间广延系统稳定性的经典极限的出现。考察这一极限，当受驱动的阈值系统以一个均匀速率驱动时，受驱动的阈值系统显然是局部的各态历经并展现出一种均衡的行为。因此，标度、临界现象及成核出现的物理起源均在于平均场的各态历经属性。进一步的研究表明，平均场或近平均场系统也和能量情况的出现相关联，这和其他均衡系统是相似的。

1. 静止点方程

考虑上述 $d=2$ 的平均场的滑动块体系统，每个块体用常数为 K_C/q 弹簧与 q 个其他块体相连接，所有块体也都通过刚度为 K_L 的弹簧与表面强迫速度为 v 的加载平板相联系，其粗粒动力学方程式为

$$\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial t}=K_L v-f\left[\sigma(x,t),\ v(t)\right]+\eta(x,t) \tag{6-35}$$

式中　$\sigma(x,t)$ ——以 x 为中心的 q 个块体体积内的粗粒应力；

t——时间。

式（6－35）描述了在 x 处累积的应力速率 $K_L v$ 与平均滑块的应力耗散速率 $f\left[\sigma(x,t),v\right]$ 之间的平衡关系，$\eta(x,t)$ 是一个随机噪声项。用 $\langle\ \rangle$ 表示对滑动表面

的空间平均，定义 $<\sigma(x,t)>=\sigma(t)$。滑动滑块穿过表面的速度是 $u(x,t)$，空间平均速度是 $u(x,t)=<u(x,t)>=\partial<s(x,t)>/\partial t=\mathrm{d}s(t)/t$，其中 $s(x,t)$ 是在 x 点表面上的粗粒滑动，通常来说，$u\neq v$。$f[\sigma(x,t),v]$ 是一个 $|\sigma(x,t),v|$ 的广义函数，也依赖于 σ^{F}、σ^{R} 及振幅为 β 的热化噪声。

2. 漏阈值方程

通常使 $qK_{\mathrm{C}}\to\infty$，此外，描述加载弹簧的弹性方程式为

$$\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}=K_{\mathrm{L}}[v(t)-u(t)] \tag{6-36}$$

由于受平均场的限制，式（6-35）中的噪声项被抑制，则

$$\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}=K_{\mathrm{L}}v-f[\sigma(t),v(t)] \tag{6-37}$$

将式（6-36）和式（6-37）合并，得

$$K_{\mathrm{L}}u=f(\sigma,v) \tag{6-38}$$

式（6-38）可视为关联域状态的热力学方程。

将 $f[\sigma(x,t),v(t)]$ 展开成 $\sigma(t)$ 的幂级数，设 v 为常数，用狄拉克 δ 函数把阈值不稳定性参数化，可以得到简单滑块的漏阈值方程，即

$$u(t)=\frac{f[\sigma(t),v]}{K_{\mathrm{L}}}\approx\left[\frac{\sigma(t)-\sigma^{R}}{K_{\mathrm{L}}}\right]\left[a+\sum_{k}\delta(t-t_{\mathrm{F},k})\right] \tag{6-39}$$

其中 $t_{\mathrm{F},k}$ 是任意 k 次通过 $\sigma(t_{\mathrm{F},k})=\sigma^{\mathrm{F}}$ 条件下定义的。当 $a=0$ 时，式（6-39）就变成一个纯粹和严格的阈值方程。在摩擦力的实例中，非零 a 的存在意味着，在 $t=t_{\mathrm{F}}$ 的不稳定状态之前，那里就存在着稳定的无震滑动。这种滑动经常在摩擦试验中观测到，在应力与滑动对比图上，修改数据的锯齿形式，使其得到曲率是向下凹的。

在式（6-39）表示的漏动力学作用下，当 $a>Q$ 时，滑块系统的应力变化逐渐减小（应力滤波）；当 $a<Q$ 时，滑块系统的应力变化逐渐增加（应力粗粒化）。考虑两个滑块的情况，彼此通过耦合弹簧 K_{C} 和依赖于加载弹簧 K_{L} 的加载体连接在一起，用 s_1 和 s_2 分别表示滑动量和应力，则滑块 1 的方程式为

$$u_1=\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\sigma-\sigma^{\mathrm{R}}}{(K_{\mathrm{L}}-K_{\mathrm{C}})^{a}} \tag{6-40}$$

$$\sigma_1=K_{\mathrm{L}}(v_{\mathrm{L}}t-s_1)+K_{\mathrm{C}}(s_2-s_1) \tag{6-41}$$

滑块 2 的方程式与滑块 1 的方程式类似。如果 $t=0$ 时，应力差 $\delta\sigma(0)=\sigma_2(0)-\sigma_1(0)$，那么在 t 时刻

$$\delta\sigma(t)=\delta\sigma(0)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{6-42}$$

$$\gamma=a\frac{K_{\mathrm{L}}+2K_{\mathrm{C}}}{K_{\mathrm{L}}+K_{\mathrm{C}}}$$

由式（6-39）可知，a 是热力学导出量，其表达式为

$$a\equiv\left.\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right| \tag{6-43}$$

曲线 $f-\sigma$ 的斜率 a 决定漏动力学是发生应力光滑还是应力粗糙。对于通常的二维断层网络系统模型，应力光滑、应力粗糙以及它们从光滑到粗糙过渡的可能性都有可能出

现。花岗岩的滑动试验数据表明，$a \sim \frac{0.1}{T_R}$，其中 T_R 是不稳定滑动的间隔时间。

3. 速率状态方程

利用单滑块的一般形式，式（6－38）的平均场方程 $K_1 u = f[\sigma(t), v(t)]$，可以得到试验中观测到的速度状态摩擦方程的一般表达式，并可赋予方程各项一个清晰的物理意义。在这些试验中，一个非常刚性的设备驱动滑块通过两个粗糙表面之间一个厚度为 H 的过程带。当仪器的弹性刚度 $K_{mach} \to \infty$ 时，可以假设加载速度 v 被严格操控，并假设弹性体内的应力 σ_E 等于摩擦应力，因此 $\sigma = \sigma_E$。穿过过程带的滑动状态可通过应变仪来监控，它与自动控制装置相连接以确保 $K_{mach} \to \infty$，在这些试验中，当加载速度从 v_1 突跳到 v 时，观测到的摩擦应力的演化可表示为

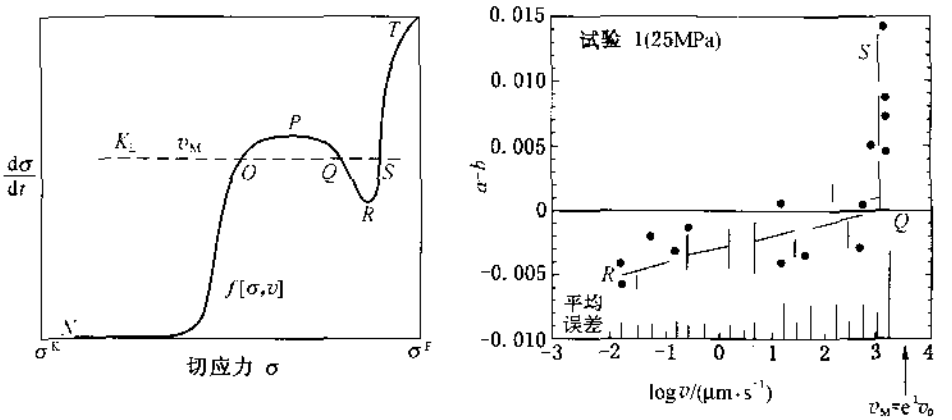
$$\sigma = \sigma_1 + A\log\left(\frac{v}{v_1}\right) + B\theta \tag{6-44}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_1}{L_1}\left[\theta + \log\left(\frac{v}{v_1}\right)\right] \tag{6-45}$$

其中参数 A、B 和 L_1 是由试验数据的经验拟合得到的；只有 L_1 具有物理意义，它是速度变化后导致应力从 σ_1 到 σ 变化的长度尺度；θ 是一个“状态变量”，其物理意义还存在较大争议。

综上所述，只有当速度变化步长较小时，式（6－44）和式（6－45）才是准确的，$|(v-v_1)/v_1| < 1$，且 A 不依赖于速度，而 B 本身依赖于速度，$B \sim \log v$。数据也表明随着应力的增加而增加（$A-B$），其值的正负变化是由特征加载速度 v 的特征决定的。（$A-B$）为负意味着随速度的增加应力下降，（$A-B$）为正意味着随应力的增加而增加。

由上面的描述可以看出，速率状态试验通常用自动控制装置来操控滑动，以使滑块在仪器加载过程中不会出现“失控”。在试验过程中，应力随速度的增加而减小，如图 6－46a 所示，它意味着实验室的试验正在探索图 6－46a 中从 R 到 Q 的分岔。当 v 变得更大时，应力开始随 v 的增加而急增。因此，这些试验应当反应在前面所述的 v_M 速度下，从 RQ 到 ST 的突跳。



(a) 应力耗散函数示意图　　(b) $a-b$ 和 $\log v$ 的关系图

图 6－46　实验室分岔试验图[33]

利用式（6－38）$K_L u = f(\sigma, v)$，并且假设 $u = v$ 为常数，这种假设在分析试验时，推导式（6－44）的第一项。不失一般性地考虑两个速度 v 和 v^*，可以写出：

$$\log\left(\frac{v}{v^*}\right) = \log\left(\frac{f[\sigma, v]}{f[\sigma^*, v^*]}\right) \tag{6-46}$$

将式（6－46）右端关于（σ^*，v^*）展开，得

$$\log\left(\frac{v}{v^*}\right) \approx \log\left(\frac{v^*}{v}\right) + \frac{1}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{6-47}$$

根据式（6－43）定义一个长度尺寸 L_0，则

$$\frac{1}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \sigma}\bigg|_{u^*} \equiv \frac{1}{K_L L_0} = \frac{a_0}{f[\sigma^*, v^*]} \tag{6-48}$$

由式（6－48）可知，L_0 的物理意义实际上是在速度 v^* 和应力 σ^* 作用下，通过过程带时的剪切偏量，因此，$u(t) = \mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t = \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$，类似地，$K_L$ 被解释为通过过程带的剪切刚度。当 v 接近 v^* 时，有

$$\sigma = \sigma_0 + K_L L_0 \log\left(\frac{v}{v^*}\right) \tag{6-49}$$

如果允许 L_0 是 v 的任意函数，即 $L_0 \to L = L(v)$，式（6－49）就可以推广到任意 v 的情况，其表达式为

$$\sigma = \sigma_0 + K_L L(v) \log\left(\frac{v}{v^*}\right) \tag{6-50}$$

4. 宏观尺度下自组织动力学讨论

阈值系统的自组织过程出现在宏观尺度、实验室和原子尺度。对这些系统合作行为负责的时空强相关作用起因于阈值动力学以及相互作用的平均场（长程）特征。受驱动的阈值系统可以被认为是，当驱动速度是稳恒连续时的纯状态动力系统，因此，所有位置整体的应力耗散或激发速度是接近稳定的，只不过常有小涨落的期望，即

$$f[\sigma(x, t), v] \mathrm{d}x \approx 常数 + 小随机涨落 \tag{6-51}$$

其中“常数”是指体积内的所有活断层的驱动应力 $K_L v$ 的积分值，因此，平均来说，应力耗散和应力供给的速度是相等的。在像地震断层这样的阈值系统中，应力供给通常是稳定的，但应力借助地震的耗散却是阶段式的。因为在模拟和真实两种阈值极限系统的平均场的特征中，都发现当系统的尺度增加时，小涨落衰减的幅度是 $1/\sqrt{N}$。

通过使用模拟和观测的地震数据，在其他地方，发现阈值激发或地震的时空图像可用希尔伯特空间中时间关系系统态矢量表示。态矢量的长度描述了整个区域事件的时间频度，它非常接近应力耗散速度率 $f(\sigma, v)$。根据式（6－51）可以推出，系统状态的信息仅由状态矢量的相角决定，因此称为“相位动力学”。态矢量范数的改变，表明它仅仅是随机的波尔兹曼型涨落，因此，本质上可要求系统的态矢量具有恒定的范数。

受驱动平均场阈值系统可以作为一种相互作用的结果发展成强相关。当平均场相互作用和微观噪声或混沌的源都作为热能化影响作用时，这些系统显示了局部各态历经行为，可以使用统计力学方法分析它们。在摩擦系统或地震现象中，最具有物理意义的是应力耗散函数 $f(\sigma, v)$。$K_L u = f(\sigma, v)$ 是描述一种摩擦过程带的状态方程，它为计算地震活动系统的状态矢量提供了物理基础。在实验室“微观”尺度上，$f(\sigma, v)$ 的形式和这些

系统的标度性质，是数据中所观测到的自组织过程的标志。这些过程导致了不同的标度指数、摩擦方程的速度状态以及其他数据的标度指数。基于区域地震断层系统的“宏观”尺度，自组织导致了态动力学，以及表现系统的地震活动演化状态旋转的态向量的出现。系统的动力学行为产生的原因在于，由$f(\sigma, v)$来表达提供和耗散应力间的平均速率的平衡结果。

6.4 岩石力学的逾渗问题

6.4.1 几何相变与逾渗概念

1. 几何相变

例1 图6-47所示为几何相变试验，绝缘球（白色）和金属球（黑色）无规地混合堆放在一个玻璃杯中，杯底和杯顶各放一块铝箔，分别连接在电池的两极上。电路中还接有电流计，用来测量通过的电流。设金属球在混合物中所占的比例为p，当p值变化时，测量的电流I显然是p的函数。那么“$I(p)$具有怎样的函数形式？能使电流通过的导电金属球的最小比例是多少？”这是美国哈佛大学一年级物理实验的题目。可以想象，如果p太小，则不能形成导电通路，就不会有电流通过。如果$p=1$，即全部都是金属球，则整个混合物就成了导体，此时电流最大。因此p从0到1变化的过程中，电流是在p等于某个临界值（用p_c表示）时突然出现的，这是与相变十分类似的突变，但它不是由于温度变化引起的，而是由于金属球和绝缘球堆积的几何结构的改变引起的，所以称为“几何相变”。当p达到临界值p_c时，形成导电通路，电流突然出现并很快达到饱和，如图6-48所示。

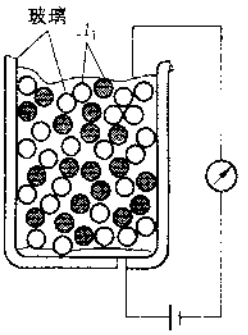


图6-47 几何相变试验

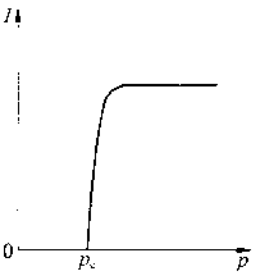


图6-48 电流饱和图

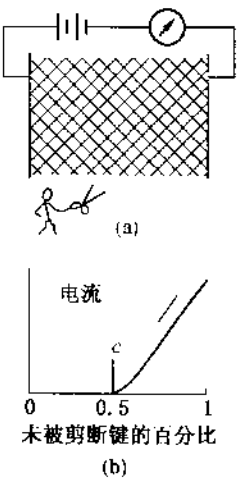


图6-49 无规剪断的网络

例2 图6-49所示为另一个几何相变的假想试验。图6-49a表示一个电路网络。设想有一个醉汉手持剪刀，无规地剪断网络中的电线，以破坏电路的连通。试问，至少要（无规地）剪断多少比例的电线会使电路中断？图6-49b是这个假想试验的结果。p代表

未被剪断的电线的百分比，试验曲线表明：电流 I（p）随 p 的减小而减小，当 p 达到临界值 p_c 时，电流突然变为零，即电路网络的长程联结突然消失；当 $p<p_c$ 时，电流 I 保持为零，网络已被破坏。

上述由于系统几何结构的变化导致其某种性质发生突变的现象，称为几何相变。与自然界中某些实际问题有密切的联系，如多孔岩石中的石油依赖岩石的孔隙得以渗出，这类现象称为逾渗（或渗流）。

2. 逾渗

“逾渗”一词是1954年英国S. R. Broadbent[34]在一次关于Monte Carlo（蒙特卡罗）计算方法的讨论会上提出的。这种气体面罩内含有许多多孔的碳粒，碳粒内的细孔构成了一个很细小的、互相连通的隧道无规网络，气体流经这些细小通道而被吸收。但如果这些细小通道组成的网络不适当，气体就难以流通了。这与前面所述的例子一样，对于碳粒的细孔及其联结的通道存在一个临界值。超过这个临界值，气体由不能通过的状态突然转变为能通过的状态。这种“流体通过无规介质的问题”是具有普遍意义的，S. R. Broadbent 和数学家 J. M. Hammersley[35]在1957年首次用“逾渗过程”来描述流体在无规介质中的流动。

流体通过多孔无规介质的逾渗过程，可以用一组相互联结的无规通道网络来模拟，如图6－50所示。联结性图（图6－50b）与上部的管道系统（图6－50a）对应，管道中间的阀门被无规地开启或关闭，导致有的管道不能让流体通过，整个网络因此不能长程连通。相应的联结性图中标出了几个粗线联结的集团，其中一个是表示逾渗通路的无界集团。上面描述的过程称为键逾渗，一条键相当于一根管道。设每条键以有限的几率 p 连通打开阀门，否则被堵塞（关闭阀门），则堵塞的几率为（$1-p$）。如果将阀门放在管道的接头处，无规地开启或关闭，这一过程称为座逾渗。这时每条键是连通的，但每个接头（称为格点或座）或连通或被堵塞。同样可以假设每个格点（座）连通的几率为 p，被堵塞的几率为（$1-p$）。图6－51所示为座逾渗及其管道系统类比图。无论是键逾渗还是座逾渗过程，都存在一个逾渗阈值 p_c，当 $p\geqslant p_c$ 时，介质中就形成无界通道，流体就会流过整个无规介质。逾渗阈值的意义不难理解，以键逾渗为例，逾渗阈值 p_c 就是介质中能形成无界通道时，连通的键在整个介质包含的总键数中所占的最小百分比。逾渗阈值与介质的维数和几何结构密切相关。吴忠良[36]对逾渗的基本模型和数学描述进行了详细讨论。

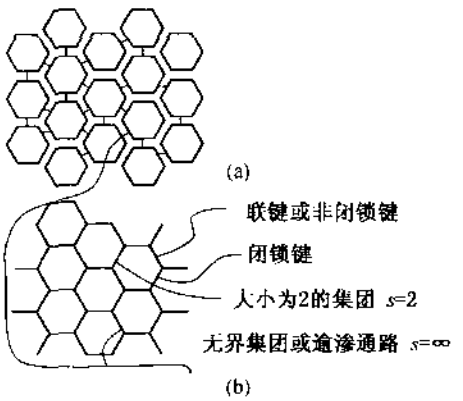


图6－50　键逾渗及其管道系统类比图

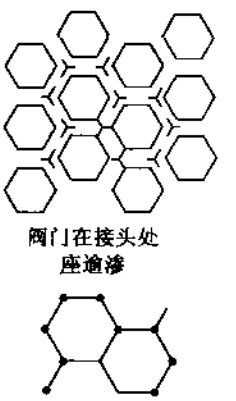


图6－51　座逾渗及其管道系统类比图

3. 键逾渗和座逾渗的数学描述

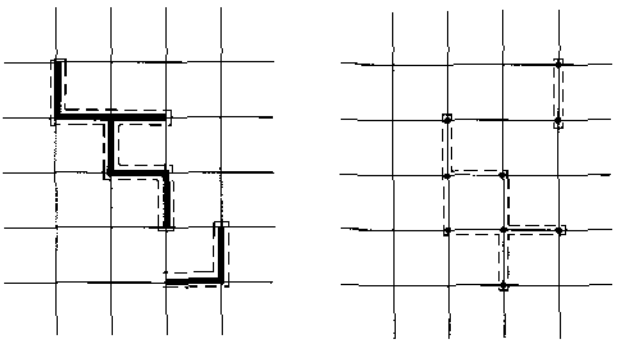
逾渗问题的关键是存在一个临界点，在临界点上，系统的宏观性质——长程联结性质发生突然的变化。这一转变是系统中的某种广义密度的连续变化达到一定值时突然发生的。在这个转变点上，许多重要的物理性质以“是”或“否”的方式发生质的变化。

这种“量变”与“质变”的转化可以用数学语言来描述。考虑一个图形 G，它由 N 个格点和 M 个棱组成，这个图形不一定是规则的图形。作为一个特例，对于正方形格子，简单地有

$$\lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}} \frac{M}{N} = 2 \tag{6-52}$$

设 G 的每一个棱有一定的概率 p 被占据，另有 $1-p$ 的概率不被占据（空），在被占据的棱上画一个“键”。图形 G 中的任意两个格点，如果能用键联结起来，则称它们是在同一“集团”内。这种方式提出的问题称为“键逾渗”问题。

逾渗问题的另一个提法是，设 G 上的每个格点有一定的概率 p 被占据，另有 $1-p$ 的概率空着。两个相邻的格点被占据，就说它们处于同一集团。这种方式提出的问题称为“座逾渗”问题。图 6-52 所示为这两种情况下“集团”的例子。



(a) 键逾渗　　(b) 座逾渗

图 6-52　“集团”类型

两种逾渗问题需要回答的内容是相同的，即在一个无限大的格子中，任意选取一个格点（称为“原点”）属于一个包含有无限多个格点的集团（称为“无限大集团”）的概率是多少。

也就是说，从键逾渗的角度看，原点能与无限远的一个点通过键联结起来的概率是多少；从座逾渗的角度看，原点能与无限远的一个格点属于同一个集团的概率是多少。一旦原点属于一个无限大集团，那么就可以说出现了“逾渗”。出现这种情况的概率称为“逾渗概率”，它是 p 的函数，记为

$$P = P(p) \tag{6-53}$$

显然，如果每个棱（或格点）被占据的概率 $p=0$，那么

$$P(0) = 0$$

反之，如果每个棱（或格点）被占据的概率 $p=1$，那么

$$P(1)=1$$

这里存在一个临界值p_c，当$p<p_c$时，$P(p)$保持为零，而当$p=p_c$时，$P(p)$变为非零值，形如

$$P(p)\sim(p-p_c)^{\beta}\qquad(p\sim p_c^{-})\tag{6-54}$$

其中$\beta>0$。

对于键逾渗和座逾渗，p_c是不同的。在二维方形点阵上，一个占据的座有4个相邻的座，而一个占据的键却有6条相邻的棱。因此，键逾渗比座逾渗“更容易发生”，键逾渗的p_c低于座逾渗的p_c。

可以将G的每一个被占据的位形用“子图”G'来表示，$G'\in G$。如果$A=A(G')$是子图G'的与某种物理性质有关的量，例如G'中键的数目为$e(G')$，或者G'中集团的数目为$m(G')$，或者G'中被占据的格点的数目为$S(G')$，则量A的平均值为

$$<A>=\sum_{G'}\pi(G')A(G')\Big/\sum_{G'}\pi(G')\tag{6-55}$$

式中 $\pi(G')$——出现位形G'的概率。

对于键逾渗，有

$$\pi(G')=p^{e}(1-p)^{M-e}\tag{6-56}$$

式中 M——棱的数目；

e——键的数目。

对于座逾渗，有

$$\pi(G')=p^{S}(1-p)^{N-S}\tag{6-57}$$

式中 N——格点的数目；

S——被占据的格点的数目。

由式(6-55)~式(6-57)可知，对键逾渗的情况，有

$$<A>=\sum_{G'}A(G')\left(\frac{p}{1-p}\right)^{e}\Big/\sum_{G'}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{e}\tag{6-58}$$

对座逾渗的情况，有

$$<A>=\sum_{G'}A(G')\left(\frac{p}{1-p}\right)^{S}\Big/\sum_{G'}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{S}\tag{6-59}$$

6.4.2 逾渗基本模型[36]

1. 一维链的逾渗

1）临界点

现在针对一维情况“演示”在物理学中人们是如何处理这类相变问题的。在一维情况下，有$p_c=1$。也就是说，只要有一处断掉，整个链条也就随之断掉。即一根绳子的强度是由绳子上最脆弱的部分决定的。

为了研究逾渗这一随机过程，首先需要考察集团大小的分布$n(s)$，即当占据概率为p时，在单位体积内的由s个座组成的集团称为s集团的数目，或者说一个s集团出现的概率。

对于一维链，链上每一个座被占据的概率是p，空座的概率是$1-p$。由于占据是随机发生的，因此一个s集团出现的概率为

$$n(s)=p^s(1-p)^2 \tag{6-60}$$

式（6-60）含义是有 s 个座是占据的，而它的两个端点是空座。

由式 6-60 可知，当 $p<1$ 时，出现无限大的集团，即 $s\to\infty$ 的概率是 0。因此，只有当 $p=1$ 时，才可能出现无限大集团。就是说对一维点阵，有 $p_c=1$。

讨论集团分布时另一个常用的量是点阵上任意一个座属于一个 s 集团的概率 $n(s)$，乘以 s 是由于 s 集团有 s 个座。由此可以求出在一定的占据概率 p 时点阵上集团的平均大小 S_{AV}，即

$$S_{AV}=\frac{\sum_{s=1}^{\infty}n(s)s^2}{\sum_{s=1}^{\infty}n(s)s} \tag{6-61}$$

对于一维链，有

$$n(s)=p^s(1-p)^2 \tag{6-62}$$

于是有

$$S_{AV}=\frac{\sum_{s=1}^{\infty}p^s(1-p)^2s^2}{\sum_{s=1}^{\infty}p^s(1-p)^2s}\propto\frac{1}{1-p}\quad(p<p_c=1) \tag{6-63}$$

当 $p\to p_c=1$ 时，$S_{AV}\to\infty$，即在 $p\to p_c=1$ 时才有无限大集团出现。

2）相关函数

另一组重要的物理量是相关函数和相关长度。相关函数 $g(r)$ 是在点阵上距离为 r 的两个座属于同一集团的概率。当 $r=0$ 时，显然应有 $g(0)=1$。

对于一维点阵，要使两个座属于同一个集团，就要求在这两个座之间的所有座都必须是占据座，因此

$$g(r)=p^r \tag{6-64}$$

一般，可以将 $g(r)$ 表示为

$$g(r)=\exp\left(-\frac{r}{\xi}\right) \tag{6-65}$$

式中 ξ——相关长度。

对于上面讨论的情况，有

$$\xi=-\frac{1}{\ln p}\sim\frac{1}{p_c-p} \tag{6-66}$$

对于 $p\to p_c=1$ 的情形，有 $\xi\to\infty$。即在接近临界点时，相关长度趋于无限，这是临界现象的一个非常重要的性质。

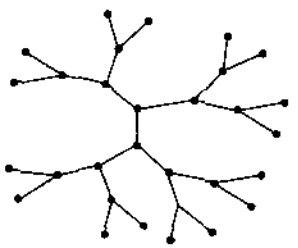


图 6-53 $Z=3$ 的 Bethe 点阵

2. Bethe 点阵上的逾渗

1）Bethe 点阵

Bethe 点阵是另一个可以严格求解的特例。图 6-53 所示为一个具有三个近邻的 Bethe 点阵，记为 $Z=3$。

Bethe 点阵是一种不包括回路的图形，当它的半径每

增长一次时，相应地就有（$Z-1$）个生长点。由于没有闭合回路，所以在点阵扩展时其表面密度将迅速增加，且随着半径 r 的增加，Bethe 点阵的边界处将愈来愈“拥挤”。如果定量地观察一个在 d 维空间中的 Bethe 点阵的话，设它的半径是 r，则其体积为 r^d，而它的表面分支数约为 $(Z-1)^r$，因为半径每增长一次，相应地就有（$Z-1$）个生长点。这样，当半径 r 逐渐增大时，表面分支数密度为

$$\lim_{r\to\infty}\frac{(Z-1)^r}{r^d}\to\infty \tag{6-67}$$

只有 $d\to\infty$ 时，式（6-67）才是有限的。因此，一个 Bethe 点阵原则上不能嵌入任何有限的空间中，它等价于无限维空间的一个常规点阵。

2）Bethe 点阵的逾渗概率

具有近邻数 Z 的 Bethe 点阵，从原点出发后有 Z 个分支链，在每一个链的另一端同样又有 Z 个分支，其中有一支与原点相连，另外（$Z-1$）支引到新的格点上。

假定此时格点的占据概率为 p，如图 6-54a 所示，则任一格点 A 作为一个生长点的平均延续概率为 $(Z-1)p$。为了实现逾渗通路，必须使 $(Z-1)p\geq 1$，因此逾渗相变的临界值即逾渗阈值为

$$p_c=\frac{1}{Z-1}$$

对于 $Z=3$ 的情形，$p_c=\frac{1}{2}$。也就是说，必须至少有一个分支能够延续下去，整个集团才能延续下去。

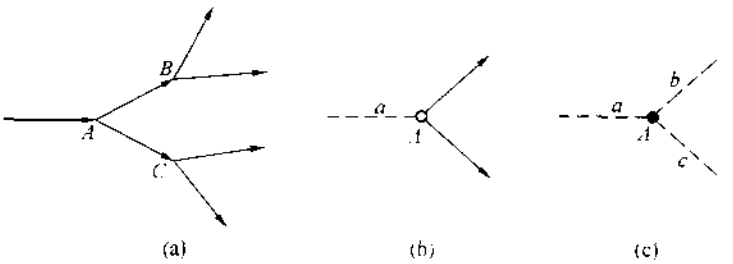


图 6-54　Bethe 点阵的逾渗问题，$Z=3$

用 Q 表示任一键不属于一个无限大集团的概率。现在沿着 Bethe 点阵的一条通路达到了某一格点，如图 6-54b、图 6-54c 所示。链 a 不属于一个无限大集团，有两种可能：一种是它本身就是断的，即 A 是空的，其概率为 $(1-p)$；另一种是它本身是通的、但与之相邻的键是断的，其概率为 pQ^{Z-1}，其中 p 是 A 被占据的概率，而 Q^{Z-1} 为 b、c 是“断”的（即与 b、c 相连的集团不能抵达无限）概率。所以，任一键 a 不属于一个无限大集团的概率为

$$Q=(1-p)+pQ^{Z-1} \tag{6-68}$$

若取 $Z=3$，则式（6-68）有两个解，分别为 $Q=1$ 和 $Q=\frac{1-p}{p}$。$Q=1$ 表示所有格点都属于有限大小的集团，因此不发生逾渗。只有当

$$p \geqslant \frac{1}{2}$$

即

$$p \geqslant p_c$$

时，Q 才有小于 1 的正根，也就是可以有逾渗相变发生。

对于任意一个格点，它属于无限大集团时必须满足两个条件：一是它本身是占据的，其概率是 p；另一个是与它相连的 Z 条键中至少有一条是无界的，概率为 $1-Q^Z$。因此，任一格点属于一个无限大集团的概率为

$$P_\infty(p) = p(1-Q^Z) \tag{6-69}$$

若 $Z=3$，则有

$$P_\infty(p) = p\left[1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^3\right]$$

3）集团分布数

考虑一个格点，它的一条分支上集团的平均大小为 T，若邻座是空座，则对集团大小没有贡献；若邻座是占据座，则对集团大小的贡献是 $p\ [1+(Z-1)T]$，其中第一项是它自己的贡献。因此，参照图 6-54a 则有

$$T = p[1+(Z-1)T] \tag{6-70}$$

因为 $p_c = \frac{1}{Z-1}$，则

$$T = \frac{pp_c}{p_c - p} \tag{6-71}$$

显然当 $p \to p_c$ 时，一条分支上的集团的平均大小将趋于无限。

总的集团的平均大小为格点本身再加上每个分支上集团的贡献，即

$$S_{AV} = 1 + ZT \propto \frac{1}{p_C - p} \tag{6-72}$$

为了计算集团大小的分布，需要知道集团的周界数。一个孤立的座有 Z 个近邻，由两个座组成的集团有 $(2Z-2)$ 个周界座，在集团上每增加一个座，就会增加 $(Z-2)$ 个周界座。减掉的两个，其中一个是它本身，另一个是它得以“生长”出来的那个座，因此 s 集团的周界数为

$$t = (Z-2)s + 2 \tag{6-73}$$

s 集团的分布数可以表示为

$$n(s) = \sum_t gp^s(1-p)^t \tag{6-74}$$

式中 t——周界数；

g——与周界数相对应的位形数。

为了说明这种思路，考虑二维方形点阵。可以得到单座集团的分布数为

$$n(1) = p(1-p)^4$$

其中第一项 p 表示有一个座被占据，第二项 $(1-p)^4$ 表示占据座的 4 个近邻是空座。2 集团和 3 集团的分布数为

$$n(2) = 2p^2(1-p)^6$$

$$n(3)=2p^3(1-p)^8+4p^3(1-p)^7$$

其中前面的因子是集团的位形数。例如3集团有两个结构：三个座呈一直线排列，其近邻数是8；三个座不呈直线排列，其近邻数是7，位形如图6-55所示。

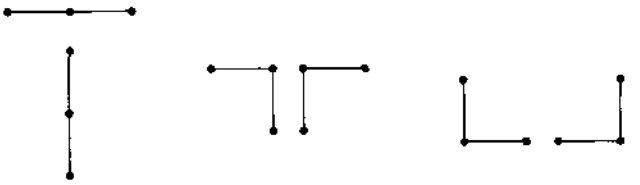


图6-55 3集团位形

Bethe点阵的情形只是稍微复杂而已。

将$t=(Z-2)s+2$代入式（6-74），可得

$$n(s,p)=gp^s(1-p)^{(Z-2)s+2} \tag{6-75}$$

取$p=p_c$时的$n(s)$，并将其与式（6-75）相除，可得

$$\frac{n(s,p)}{n(s,p_c)}=\left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2\left[\frac{p(1-p)^{Z-2}}{p_c(1-p_c)^{Z-2}}\right]^s\propto\exp(-cs) \tag{6-76}$$

其中

$$c=-\ln[1-4(p-p_c)^2]\propto(p-p_c)^2$$

设$p\to p_c$时，集团分布数$n(s,p_c)$满足关系式：

$$n(s,p_c)\propto s^{-\tau}$$

则有

$$n(s,p)\propto s^{-\tau}\exp(-cs) \tag{6-77}$$

于是，集团平均大小为

$$S_{AV}\propto\sum_{s=1}^{\infty}n(s,p)s^2\propto\sum_{s=1}^{\infty}s^{2-\tau}\exp(-cs)\propto$$

$$\propto\int s^{2-\tau}\exp(-cs)\,ds\propto c^{\tau-3}\sim(p-p_c)^{2\tau-6}$$

由于

$$S_{AV}\propto(p_c-p)^{-1}$$

所以

$$2\tau-6=-1$$

即

$$\tau=\frac{5}{2}$$

因此

$$n(s,p)\propto s^{-\frac{5}{2}}\exp(-cs)$$

$$c\propto(p-p_c)^2$$

在临界点附近，有

$$n(s) \propto s^{-\frac{5}{2}} \tag{6-78}$$

这是一种典型的幂律分布。

4）集团的几何结构

对于任何一个有限大小的 s 集团，它与空座联结的周界（表面）数是 t。一个常规的 d 维物体，其周界是（$d-1$）维曲面，周界与质量（体积）之间有

$$t \sim s^{1-\frac{1}{d}} \tag{6-79}$$

的关系。当物体大小趋于无限时，表面与体积之比趋于零。然而极不规则的边界和集团内部的空洞使得处于临界状态的逾渗集团并不满足这个规律。对于逾渗集团，$\lim\limits_{s\to\infty}\frac{t}{s}$并不趋于零，而是趋于一个有限值。对于 Bethe 点阵，有$\lim\limits_{s\to\infty}\frac{t}{s}=(Z-2)\neq 0$。逾渗集团分数维 D 的值小于点阵的空间维数 d。

数字试验表明，在临界点附近，集团是一个分形体，然而随着占据点数的增加，集团逐渐地由分形体变成均匀体。

6.4.3 逾渗尺度不变性

1. 一维链模型

现在可尝试使用一种连续的尺度变换来说明为什么在 p_c 附近系统的宏观性质以“是或否”的方式发生质的变化。首先仍用一维模型作一个演示。假定一维链中格点被占据（导通）的概率是 p_0，把链分成若干个元胞，每个元胞中包含有 b 个格点，例如可取 $b=2$。要使整个元胞导通，就必须使元胞中的每个格点都导通，于是元胞导通的概率为

$$p_1 = p_0^b \tag{6-80}$$

类似地，将现有的元胞再归并成新的元胞（图 6-56），则新的元胞的导通概率为

$$p_2 = p_1^b$$
$$p_3 = p_2^b$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$p_{n+1} = p_n^b$$

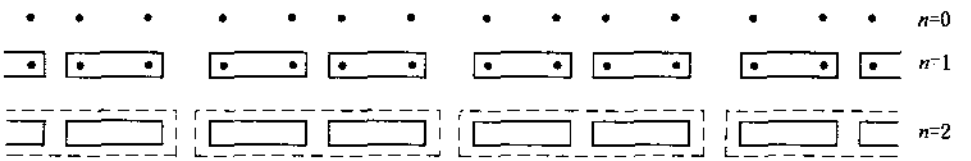


图 6-56　元胞的归并过程，其中 $b=2$

假定 $b=2$，$p_0=0.95$，则有

$$p_1 = 0.90$$
$$p_2 = 0.81$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

最后达到不动点 $p_n=0$。所以，只要有 $p_0<1$，就有 $p_n\to 0$；只有当 $p_0=1$ 时，才有 $p_n=1$，

因此可得

$$p_c = 1$$

显然，在这个例子中，如果一般地写出一个变换，即

$$p_1 = R_b(p_0)$$

那么也就可以进一步写出变换的“乘法”，如

$$R_b(R_b(p)) = R_{b^2}(p)$$

这实际上就是“两步并作一步走”的数学表示。也可以有单位变换，此即 $b=1$，或者更简单地说就是不归并。此外，在临界点处，有 $R_b(p_c)=p_c$。

由上述程序也可以求出关联长度在临界点附近的行为。为此令关联长度为

$$\xi(p) \propto (p-p_c)^{-\gamma} \tag{6-81}$$

将 $p'=R_b(p)$ 在 p_c 附近展开，有

$$\begin{aligned} p' &= R_b(p) \\ &= R_b(p_c) + \lambda_b(p-p_c) + O[(p-p_c)^2] \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_b = \left.\frac{\partial p'}{\partial p}\right|_{p=p_c} = bp^{b-1}\Big|_{p=1} = b$$

经过变化之后，关联长度的“读数”缩短了 b 倍，于是

$$\frac{\xi(p')}{\xi(p)} = \frac{1}{b} \tag{6-82}$$

又因为 $R_b(p_c)=p_c$，所以

$$\frac{\xi(p')}{\xi(p)} = \frac{(p'-p_c)^{-\gamma}}{(p-p_c)^{-\gamma}} = \lambda_b^{-\gamma} = b^{-\gamma} \tag{6-83}$$

比较式（6-77）、式（6-78）可得 $\gamma=1$，即

$$\xi(p) \propto (p-p_c)^{-1} \tag{6-84}$$

与前面给出的结果相同。

2. 二维模型

考虑由 4 个格组成的正方形的元胞，在这个元胞中每个格被占据的概率是 P_0，我们要计算一下在此情况下这个元胞内的格能够从左到右“导通”的概率 P_1。

从图 6-57 可以看出：4 个格都不被占据的概率为 $(1-P_0)^4$；4 个格中只有一个被占据的概率是 $P_0(1-P_0)^3$，它共有 4 种位形；4 个格中有两个被占据的概率是 $P_0^2(1-P_0)^2$，它共有 6 种位形，但其中只有标“+”的两个可以从左到右导通；4 个格中有三个被占据的概率是 $P_0^3(1-P_0)$，它共有 4 种位形；4 个格都被占据的概率是 P_0^4。于是，元胞能够从左到右导通的概率是

$$P_1 = 2P_0^2 - P_0^4 \tag{6-85}$$

进一步考虑更大的元胞，则更大的元胞能够从左到右导通的概率为

$$\begin{aligned} P_2 &= 2P_1^2 - P_1^4 \\ P_3 &= 2P_2^2 - P_2^4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n+1} &= 2P_n^2 - P_n^4 \end{aligned}$$

如果以不同的 P_0 进行迭代，P_n 会得到不同的结果。当 $P_0=0$ 时，有 $P_n=0$；当 $P_0=1$ 时，有 $P_n=1$。当 $P_0=0.4$ 时，有

$$P_1=0.294$$
$$P_2=0.166$$
$$P_3=0.054$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$P_n\to 0$$

当 $P_0=0.8$ 时，有

$$P_1=0.870$$
$$P_2=0.941$$
$$P_3=0.987$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$P_n\to 1$$

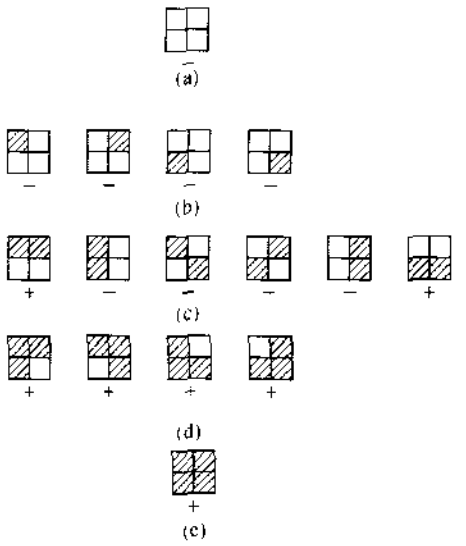


图 6-57　各种可能的占据位形，"+"表示整个元胞能够从左到右导通的位形

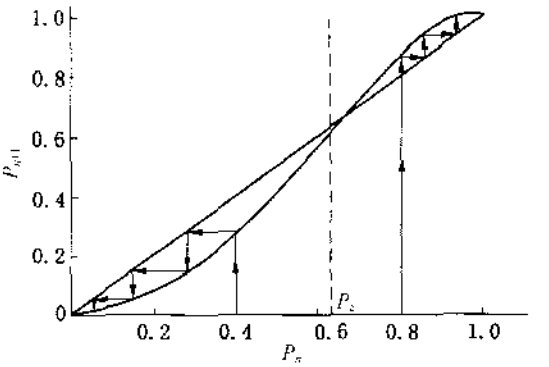


图 6-58　P_{n+1} 与 P_n 之间的迭代关系，其中 P_c 给出了临界点的位置

也就是说，不同的 P_0 值所对应的体系的宏观性质是截然不同的。事实上，从图 6-58 所示的迭代过程可以看出：当 P_0 较小时，迭代结果趋于零；当 P_0 较大时，迭代结果趋于 1。在图 6-58 中以 P_c 给出了临界点位置，P_c 可以由变换 $P_{n+1}=R(P_n)$ 的不动点给出。对于这里讨论的情况，不动点可由方程 $P_c=2P_c^2-P_c^4$ 求得，它在 [0, 1] 范围内的三个解，即

$$P_c=\begin{cases}0\\1\\0.618\end{cases}$$

其中 0 和 1 两个解是普通解，而 $P_c=0.618$ 代表了一个临界点。

6.4.4 煤岩体孔隙裂隙双重介质逾渗问题

煤岩体是典型的非均质和非连续的材料，其中包含大量的孔隙、空隙、裂纹、裂隙、裂缝等。这些缺陷由于数量、形状、分布形式等不同，对煤岩体的物理力学性质的影响不同，特别是煤岩体的输运特性。

通常将单位体积材料中孔洞或孔隙体积所占的百分比称为孔洞孔隙率（η_p），将单位体积材料中裂纹、裂隙、层理等间断面体积所占的百分比称为裂纹孔隙率（η_c），两者之和称为材料的孔隙度。可以说孔隙度的大小是决定煤岩体是否渗透或渗透性强弱的唯一因素。但两者中哪个对煤岩体的渗透性起主导控制作用，如何区分两者的作用以及它们如何影响煤岩体的渗透性等。这些问题的解决不仅可以加深对煤岩体渗透现象的认识，而且将对如何提高、改善煤岩体的渗透性提供方法与思路。

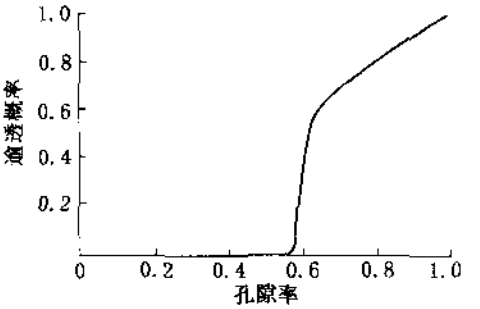


图 6-59 多孔质的逾渗概率与孔隙率关系曲线[38]

多孔介质的逾渗理论解释了多孔材料的渗透率随孔隙率变化的非线性关系[38-40]（图 6-59）。但煤岩体这类天然材料既包含孔隙，又包含裂隙，它的渗透机理较多孔介质复杂得多。

煤岩体的孔隙是由煤岩体固体颗粒间的空隙产生的，其数量决定于固体颗粒粒径分布以及压缩、固结和胶结等因素。其位置随机均匀地分布其中。

为阐述孔隙、裂隙对煤岩体渗透性的影响，冯增朝[37]提出了孔隙裂隙介质临界渗透研究方法，并着重分析了煤岩体的孔洞孔隙率与裂纹孔隙率对渗透性影响。

1. 孔隙－裂隙介质临界渗透研究方法

对于孔隙介质而言，其整体是被孔隙和固体颗粒完全充满的，随机分布的各个孔隙之间相互连通，构成许多连通的孔隙团，简称为团。其中最大的命名为最大团，随着孔隙率逐渐增加，团的个数逐渐减少，最大团所包含的孔隙数逐渐增加，并连通了整个区域的两个对称边界，演变为横跨团或渗透团。把出最大团演变为渗透团时的孔隙率定义为临界孔隙率（n_c）[41]，在二维的正方形网格中，$n_c = 0.59275 \pm 0.00003$。定义区域中任意一个点属于渗透的概率为逾渗概率 $P_\infty(p)$，对于有限尺度的网格，逾渗概率可以表示为

$$P_N(p) = M(L)/L^2 \tag{6-86}$$

式中 $M(L)$——最大渗透团的孔隙数；

L——二维的正方形网格中每行或每列的网格数。

当 N 趋于无穷大时，逾渗概率为

$$P_\infty(p) = \lim_{N\to\infty} P_N(p) \tag{6-87}$$

临界概率被定义为 $P_\infty(p) = 0$时的孔隙率的最大值，用数学方法可以表述为

$$p_c = \sup\{p, P_\infty(p) = 0\} \tag{6-88}$$

在上述严格的数学定义下，给出了孔隙裂隙介质临界渗透的研究方法。

把 5cm × 5cm 的正方形区域划分为 $L \times L$（本文计算取 $L = 500$）个小的正方形。按照不同的孔隙率，将孔隙随机分布在上述网格中，凡为孔隙网格，即设定为 1，表示该网格为空隙。孔隙未落在的网格，则认为是固体颗粒网格，即设定为 0，表示该网格为实，不

渗透。

然后在正方形区域中，按分形规律生成各级网格的裂隙数量，并按位置与方位随机地分布于上述网格中。当裂隙落入某一子网格中，其长度大于子网格尺度的1/2，即认为该网格为孔隙网格，设定为1；否则设定为0，即不渗透的网格。

将孔隙和裂隙在网格中的［0，1］分布，按0+0=0，0+1=1，1+1=1的准则叠加，最后形成了孔隙裂隙共存时，整个网格中的［0，1］分布。编制计算机程序，寻找网格中各个连通团或渗透团构成的子网格号码及其数量，进而确定组成最大渗透团的网格数量M（L），则各子网格落入最大渗透团的概率即为$P(n,D,N_0)=M(L)/L^2$。

2. 煤岩体逾渗概率的实例分析

我国部分煤矿煤层的渗透性及孔隙、裂隙的实测结果[42]，见表6-3。其中渗透率T由三轴渗透仪测定，裂隙参数N_{1m}、D按照前述方法测量，孔洞孔隙率η_p的测定方法参照煤炭工业部颁发的《岩石力学性质测试标准》测定。裂隙孔隙率η_c根据前述裂隙与网格耦合关系进行统计测量。根据上述方法对各煤矿煤层逾渗概率计算结果，见表6-4。其中P（n，D，N_0）为孔隙裂隙逾渗概率的计算结果；$P(0,D,N_0)$为仅有裂隙，孔洞孔隙率为0的逾渗概率的计算结果。

表6-3　各煤矿煤层孔隙和裂隙实测结果[37]

煤　层	$T/(m\cdot d^{-1})$	D	N_{1m}/条	η_p/%	η_c/%
南　屯	0.0606	1.3813	6.940	3.26	22.15
鲍　店	0.1740	1.4049	6.570	2.76	23.78
东　滩	0.2525	1.3237	10.500	2.56	24.74
兴隆庄	0.2105	1.4392	8.950	2.48	35.94
古书院	0.2492	1.6380	3.950	4.10	43.16
唐　安	0.4078	1.4862	9.500	5.50	44.37
加乐泉	0.5457	1.6043	5.680	6.75	47.41
王庄矿	0.3687	1.6920	3.720	10.00	47.72
西　铭	0.5897	1.6585	4.700	7.74	50.83
西　曲	0.6806	1.6524	5.443	4.48	55.97
官　地	1.8318	1.7991	2.730	6.79	58.51
水峪矿	0.8754	1.4590	17.500	7.35	58.60
阳　泉	1.3076	1.4490	22.800	6.07	66.16
鹤　壁	1.1350	1.6180	9.100	7.58	65.46
白龙矿	1.6058	1.6826	21.420	6.28	91.92
乌　达	3.7150	1.6500	26.900	5.91	92.58

表 6-4 各煤矿煤层孔隙和裂隙的逾渗概率计算结果[37]

煤 层	$P(n)$/%	$P(0, D, N_0)$/%	$P(n, D, N_0)$/%	ΔP/%
南 屯	0.0016	11.610	12.143	0.533
鲍 店	0.0010	12.167	12.802	0.635
东 滩	0.0011	15.918	16.594	0.676
兴隆庄	0.0010	24.594	25.508	0.914
古书院	0.0020	28.064	31.609	3.545
唐 安	0.0024	37.769	40.249	2.480
加乐泉	0.0030	38.454	43.011	4.557
王庄矿	0.0036	40.801	50.201	9.400
西 铭	0.0032	46.065	51.483	5.418
西 曲	0.0021	53.583	55.803	2.220
官 地	0.0032	58.379	62.372	3.993
水峪矿	0.0032	60.315	63.174	2.859
阳 泉	0.0028	68.925	71.074	2.149
鹤 壁	0.0032	69.675	72.024	2.349
白龙矿	0.0032	98.079	98.199	0.120
乌 达	0.0026	98.393	98.489	0.096

1）煤岩体的逾渗概率与渗透系数的关系

表 6-3 中的煤体渗透系数 T 与表 6-4 中的孔隙裂隙逾渗概率 $P(n, D, N_0)$ 两者之间的关系如图 6-60 所示，其关系式为

$$T = 1.9061P^{1.4459} \qquad (6-89)$$

相关系数达到 0.8472，由此可知，煤岩体的渗透系数与二维平面孔隙、裂隙介质的逾渗概率值呈正指数规律。

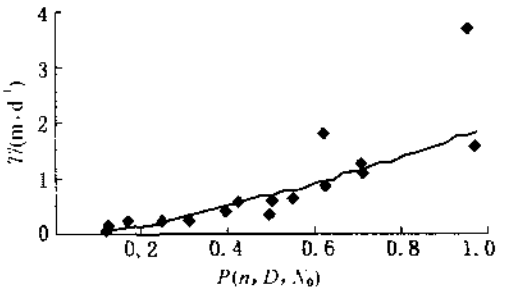


图 6-60 渗透系数 T 与逾渗概率 P 的相关关系[37]

由孔隙裂隙介质的逾渗概率计算过程不难看出，逾渗概率在数值上不仅等于平面网格中任意空隙（裂隙或孔隙）属于最大团（或逾渗团）的概率，而且由式（6-81）可知，它也等于最大团与网格区域面积的比值。显然，随着孔隙率的增加，最大团的面积增加，表现为材料性质的变化便是渗透系数的提高。同时，由上述定义可知，孔隙率包含孔洞孔隙率与裂纹孔隙率。因此，孔隙裂隙介质的逾渗概率反映的是裂隙、孔隙的共同作用效果。

2）孔隙率与逾渗概率的关系

实测的结果表明，煤岩体的孔洞孔隙率（η_p）一般不大于 10%。根据表 6-4 中孔隙介质逾渗概率计算结果（$P(n)$列的数据）以及图 6-59 可知，如果单纯考虑孔隙对逾渗概率的影响，即使煤岩体的孔隙率达到 40% ~50%，煤岩体的逾渗概率也只有百分之几。因此，绝大多数的孔隙仅仅是一些孤立的孔隙点，不能构成流体的渗流网络。因此，只有

孔隙而没有裂隙的煤岩体渗透性极低。

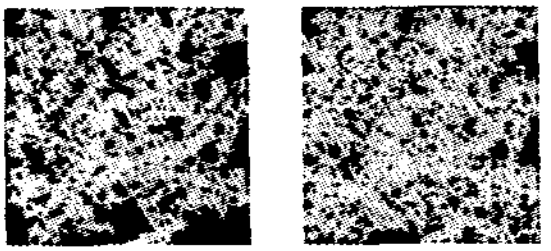
孔隙引起的孔隙裂隙逾渗概率变化量的计算公式为

$$\Delta P = P(n,\ D,\ N_0) - P(0,\ D,\ N_0) \tag{6-90}$$

逾渗概率变化量的大小反映孔隙裂隙介质中含裂隙的条件下孔隙对逾渗概率 $P(n,\ D,\ N_0)$ 的影响程度。由表 6-4 的计算结果可知，孔洞孔隙率对孔隙裂隙介质的逾渗概率的影响一般不大于 20%，且仅当裂纹孔隙率处于 47% ~55% 时，孔洞孔隙率对逾渗概率的影响才较明显。这是因为逾渗概率发生突变的临界孔隙率约为 59.3%。在此范围内，孔隙率的增加可能引起逾渗概率发生小突变，使得最大团合并成更多小的孔隙团。图 6-61 所示为王庄矿煤体不同的孔隙团分布图，它可以证实这一点。因此，裂纹孔隙率是决定孔隙裂隙介质的逾渗概率大小的决定因素。

3）孔隙裂隙介质的逾渗概率的特点

根据表 6-4 中的孔隙裂隙逾渗概率 $P(n,\ D,\ N_0)$、裂隙逾渗概率 $P(0,\ D,\ N_0)$ 及孔隙率绘制出图 6-62。从图 6-62 可以看出：首先，孔隙裂隙介质逾渗概率与单纯的裂隙介质的逾渗概率基本相同，相对变化幅度不大于 20%。其次，两者的逾渗概率与孔隙率的变化趋势相同，具有相同的规律。在多孔介质中，逾渗概率随孔隙率变化呈明显的非线性关系，存在使逾渗概率发生突变的临界孔隙率；但实际煤体的计算结果表明，煤体的逾渗概率不论是随裂纹孔隙率，还是总的孔隙率变化，基本是呈线性增长。这进一步说明了孔隙裂隙双重介质的逾渗规律决定于裂隙。



(a) 裂隙介质　　(b) 孔隙裂隙介质

图 6-61　各种介质的渗流图[37]

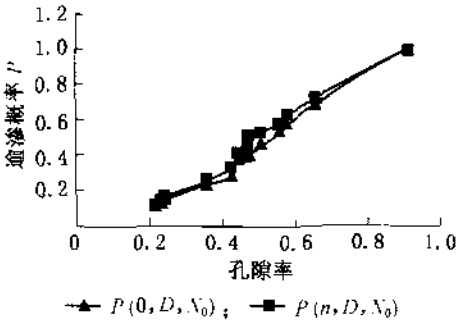


图 6-62　各种介质的渗流概率曲线[37]

6.4.5　松散煤矸石逾渗问题初步

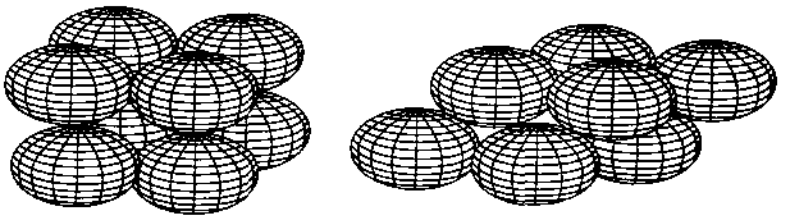
在采矿工程中，随着回采工作面的不断向前推进，顶板岩石不断垮落。尽管在工作面后方采空区中受到上部岩层塌垮和运动后，下部已垮落破碎矸石和残留的浮煤受到压密作用，但不可能密实，特别在近工作面的采空区域内，大部分垮落岩石是松散状。这时采空区内的瓦斯和水将通过这些松散煤岩孔隙向回采工作面渗透和释放。因此，研究松散煤矸的逾渗问题对于预防水灾、瓦斯灾害等具有重要现实意义。

就问题的研究属性而言，水或瓦斯等流体在松散的煤矸体中的流动问题将是非常复杂的，可以简化为流体在多孔介质内的多相流动与驱替模型，这可以用逾渗方法来研究。

M. Sahimi[43] 和 I. Selyakov 等[44] 曾建立逾渗模型来研究多孔介质内的流动及其传递过程。胡雪蛟等[45] 运用逾渗理论研究了多孔介质的突破过程，得到了多孔介质的突破压力

和多孔介质孔隙率、渗透率、流体物性和临界概率的函数关系。这些研究成果，为建立松散煤矸初等逾渗模型提供了依据。

若将煤矸石视为球形，则在堆积过程中，可以存在立方体排列和菱形六面体排列[46]，如图 6－63 所示。这样可以得到孔隙率 φ 对空间占有率 p 的关系，如下所述。



(a) 立方体排列　　(b) 菱形六面体模型

图 6－63　三维孔隙堆积体模型

对立方体排列：

$$\varphi = \frac{\pi}{6} p \tag{6-91}$$

对菱形六面体排列：

$$\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} p \tag{6-92}$$

孔隙堆积模型中，当用放大一倍的尺度来观测系统时，具有代表性的一个单元就应包含 8 个孔隙球体（图 6－63）。周宏伟等[46]根据各种导通状态的组合数目可得如图 6－63 所示的重正化变换方程为

$$p_{n+1} = p_n^8 + 8p_n^7(1-p_n) + 24p_n^6(1-p_n)^2 + 32p_n^5(1-p_n)^3 + 8p_n^4(1-p_n)^4 \tag{6-93}$$

其中第一项表示单元中有 8 个孔隙球体的导通率，第二项表示单元中有 7 个球的情形，依次类推。该方程即式（6－93）形式上已十分复杂，不可能求出不动点的解析解，因此只能作数值解。经过反复计算，发现当 $p_0 = 0.734003$ 时，$p_{26} = 0$；当 $p_0 = 0.734004$，$p_{24} = 1$（图 6－64）。因此，按重正化群不稳定不动点的定义可知，式（6－93）表示的重正化变换的不动点为

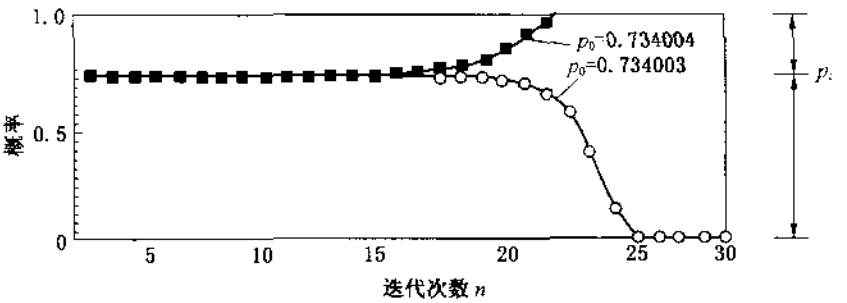


图 6－64　重正化群变换的不稳定不动点迭代产生过程[46]

$$0.734003 < p_c < 0.734004$$

可取 $p_c \approx 0.7340035$。为了检验不动点 p_c 的稳定性，计算出 $\left.\frac{dp_{n+1}}{dp_n}\right|_{p_c=0.7340035} = 1.819 > 1$，由此可见，$p_c \approx 0.7340035$ 是式（6-93）的一个不稳定不动点。

将该结论代入式（6-91）及式（6-92），可得两种排列状态下岩土介质的临界孔隙率分别为：对于立方体排列，$\varphi_c = 0.384$；对于菱形六面体排列，$\varphi_c = 0.471$。

上述讨论的临界孔隙率 φ_c，其物理意义为发生渗流相变的最小孔隙率。也就是说，当煤矸介质的孔隙率低于 φ_c 时，不容易产生渗流；当介质的孔隙率高于 φ_c 时，容易产生渗流。

6.4.6 地震活动的逾渗相变问题

由于地震事件往往与断层、裂隙相关联，即震源系统包容了各种破裂尺度，从而允许使用重正化群方法。重正化群的目的在于简化系统相态涨落行为的描述，而能够获得系统在临界点状态的定量描述。系统在发生二级相变的临界点处，它的相关长度是趋于无穷大的。无穷大相关长度与地球介质的宏观整体破裂一致，系统具有尺度变换下的不变性即标度不变性，这时系统必然具有自相似性。因此，可以利用标度不变性求出系统在临界点处的各种临界指数。

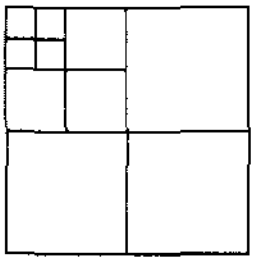


图 6-65 每个单元含有 4 个基本孕震块体的二维震源模型

柯善明等[47]选取含有 4 个方形排列的基本孕震块体为一处理单元（图 6-65）。在计算中引入了单元块体之间应力转移的机制，并假定单元内所有块体都破裂单元才破裂。为量度由应力转移而造成的块体的破裂，使用了条件概率 $p_{a,b}$。它表示当应力 $(a-b)\sigma$ 被转移到具有 $b\sigma$ 应力的未破裂块体时，块体发生破裂的概率，可表示为

$$p_{a,b} = \frac{p(b\sigma < \sigma_f \leqslant a\sigma)}{p(\sigma_f > b\sigma)} \tag{6-94}$$

通过计算可求得

$$p_{a,b} = \frac{p_a - p_b}{1 - p_b} \tag{6-95}$$

因此，可得到新的重正化后的阵列结构，并且可得到新的阵列概率 p_1' 与 p_1 的关系，即重正化群变换公式，如下：

$$\begin{aligned} p_1' = {} & p_1^4 + 4p_1^3(p_4 - p_1) + 6p_1^2(p_2 - p_1)^2 + 12p_1^2(p_2 - p_1)(p_4 - p_2) + \\ & 4p_1(p_{4/3} - p_1)^3 + 12p_1(p_{4/3} - p_1)^2(p_4 - p_{4/3}) + 12p_1(p_{4/3} - p_1) \times \\ & (p_2 - p_{4/3})^2 + 24p_1(p_{4/3} - p_1)(p_2 - p_{4/3})(p_4 - p_2) = R(p_1) \end{aligned} \tag{6-96}$$

在临界点处，重正化群变换后的相关长度仍然是无穷大，因此 $p_1 = p_c$ 是重正化群变换的不动点，式（6-96）可写成

$$p_c = R(p_c) \tag{6-97}$$

由式（6-97）可解出三个不动点 $p_c = 0$，0.1707，1。其中 $p_c = 0$，1 是稳定不动点；$p_c = 0.1707$ 是不稳定不动点，是一个相变临界点。

将 p_1' 在临界点附近作泰勒展开，得

$$p_1' = p_c + \lambda(p_1' - p_c) + o(p_1' - p_c)^2 \tag{6-98}$$

又 $\xi \sim |p_1 - p_c|^{-v}$，则

$$v = \frac{\ln g}{\ln \lambda} = 0.8084 \tag{6-99}$$

其中 $g = \xi/\xi' = 2$ 为重正化后相关长度的相对变化。

$$\lambda = \left| \frac{dp_1'}{dp_1} \right|_{p_1 = p_c} = 2.357 \tag{6-100}$$

同样，可以求得 $\beta = 0.4289$。

逾渗集团在临界点的分数维为

$$D = d - \frac{\beta}{v} = 1.470 \tag{6-101}$$

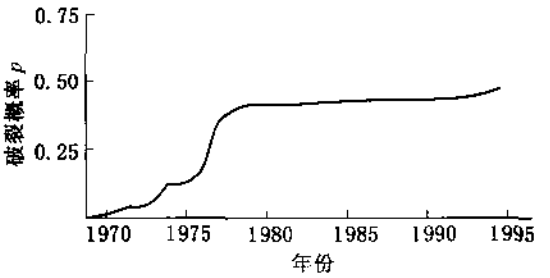


图 6-66　海城地震逾渗相变过程的破裂概率随时间的变化曲线[47]

柯善明等[47]利用 1975 年海城地震与 1976 年唐山地震前后的地震活动资料，对地震活动的逾渗模型进行了实际应用研究，定量性讨论一次大地震发生前震源系统地震活动的临界状态。

对于海城地震选取东经 122°～124°，北纬 40°～42°作为研究区域。将研究区域划分为 0.2°×0.2°的小区域作为基本孕震单元。孕震区域和基本孕震单元的划分依赖于所选取震级的震源尺度。选取的研究时间为地震活动开始明显增强的 1970—1995 年。在计算中，选择震级下限为 $M_L = 3.0$。

首先计算孕震区域内基本孕震单元的发震（基本孕震单元发生断裂活动）概率 p，孕震单元的发震概率是发生过地震的基本孕震单元占基本孕震单元总数的百分比。图 6-66 所示为 1970—1995 年的 $p-t$ 图。从图 6-66 可以看出，1975 年 2 月 p 值增大到逾渗阈值 $p_c = 0.170177$ 附近，至此，海城地震发生。随着余震活动 p 值的迅速增大，至 1995 年 12 月 p 值已达到 0.46。图 6-67 所示为逾渗阈值附近的逾渗相变图。从图 6-67 可以看出，此时已形成了一个从上到下的由破裂基本孕震单元组成的无限大集团，即逾渗集团。

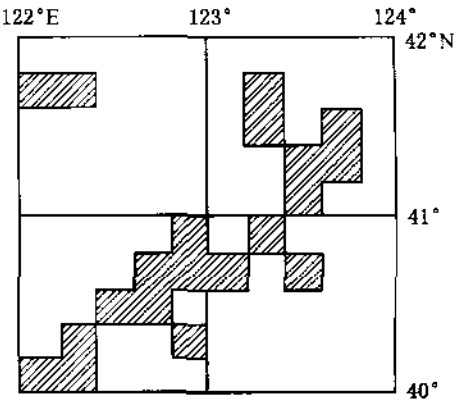


图 6-67　海域地震逾渗相变过程中形成的逾渗集团[47]

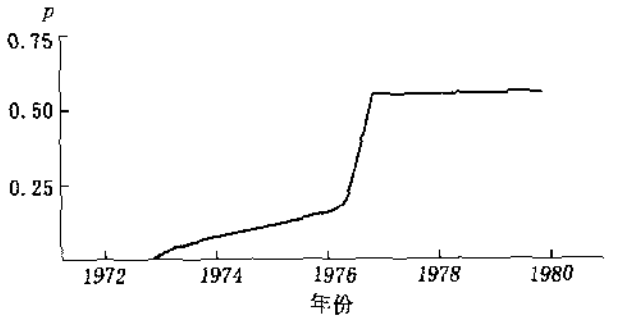


图 6－68　唐山地震逾渗相变过程的破裂概率随时间变化的曲线[47]

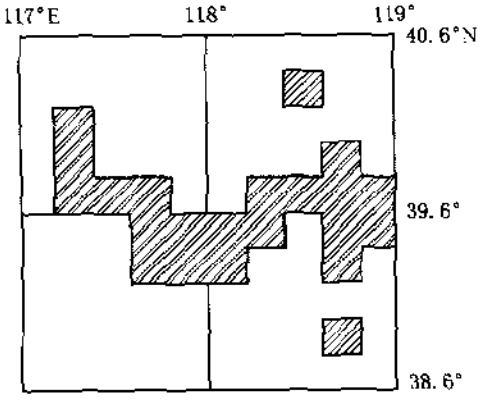


图 6－69　唐山地震逾渗相变过程中形成的逾渗集团（p＝0.20）[47]

对于 1976 年唐山地震，选取的研究范围为东经 117°～119°，北纬 38.6°～40.6°，研究时间为 1972 年 6 月—1980 年，基本孕震单元的划分和震级下限的选取与海城地震相同。图 6－68 和图 6－69 所示分别为唐山地震的 $p \sim t$ 图及逾渗相变图。从图 6－68 可以看出，在 1976 年 2 月，p 值已达到逾渗阈值附近。随着 1976 年 7 月唐山地震的发生，p 值迅速增大至 0.54。从图 6－69 可以看出，在逾渗阈值附近，形成了一个从左到右的由破裂基本孕震单元组成的逾渗集团。

上述表明，无论是海城地震还是唐山地震，在逾渗相变过程中，震前地震活动在逾渗阈值附近所遵循的规律是相同的，即主震发生前地震活动的逾渗概率指数及相关长度指数均由低值逐渐增大而跃过逾渗概率临界指数。

参 考 文 献

[1] 普利高津．从存在到演化［M］．曾庆宏，严士健，马本堃，等，译．上海：上海科学技术出版社，1986.

[2] 哈肯．协同学——自然成功的奥秘［M］．戴鸣钟，译．上海：上海科学普及出版社，1987.

[3] 哈肯．协同学引论［M］．徐锡申，陈式刚，陈雅深，等，译．北京：原子能出版社，1984.

[4] Lucas C. Self－Organization FAQ［EB/OL］．(1997－03－24)［2007－10－21］http://psoup.math.wisc.edu/archive/sosfaq.html.

[5] 李如生．非平衡态热物理学与耗散结构［M］．北京：清华大学出版社，1986.

[6] 吴彤．自组织方法论研究［M］．北京：清华大学出版社，2001.

[7] 秦书生．自组织的复杂性特征分析［J］．系统科学学报，2006，14（1）：19－22.

[8] Bak P，Chen Kan. Self－organized Criticality［J］. Scientific American，1991，264（1）：26－33.

[9] Bak P，Tang C，Wiesenfeld K. Self－organized criticality：an explanation of the 1/fnoise［J］. Physical Review Letters，1987，59（1）：381－384.

[10] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Self-organized criticality [J], Physical Review, 1988, 38 (1): 364 - 375.
[11] Ghaffari P, Lise S, Jensen H J. Nonconservative sandpile models [J]. Phys. Rew. E, 1997, 56: 6702.
[12] 苏凤环，姚令侃，何越磊. 散粒体的自组织临界性与非均匀介质的元胞自动机模型 [J]. 岩石力学与工程学报，2005，24 (23)：4239 - 4247.
[13] 何越磊，姚令侃，苏凤环，等. 砂堆模型动力学特性与灾害系统演化预测研究 [J]. 自然灾害学报，2005，14 (4)：44 - 50.
[14] Held G A, Solina D H, Solina H, et al. Experimental study on critical mass fluctuations in an evolving sandpile [J]. Physical Review Letters, 1990, 65 (9): 1120 - 1123.
[15] Cundall P A. Ball - A program to model granular media using distinct element method [M]. Landon: Dames & Moore advanced technology group, 1978.
[16] 王泳嘉，邢纪波. 离散单元法及其在岩土力学中的应用 [M]. 沈阳：东北工学院出版社，1991.
[17] 尹光志，代高飞，万玲，等. 岩石微裂纹演化的分岔混沌与自组织特征 [J]. 岩石力学与工程学报，2002，21 (5)：635 - 639.
[18] Grasso J R, Sornette D. Testing selforganized criti cality by induced seismicity [J]. Journal of Geophysical Research, 1998, 103 (B2): 29965 - 29988.
[19] Caldarelli G, Tolla FD Di, Petri A. Self organization and annealed disorder in a fracturing Process [J]. Physical Review Let ters, 1996, 77 (12): 2503 - 2506.
[20] Lemaitre J. A course on damage mechanics [M]. Berlin: Spring verlag, 1992.
[21] 谭云亮，马志涛，李铁增. 岩石细观破坏自组织演化的 PCA 模拟研究 [G] //中国岩石力学与工程学会. 第八次全国岩石力学与工程学术大会论文集. 北京：科学技术出版社，2004，111 - 113.
[22] 马志涛，谭云亮. 岩石破坏演化细观非均质物理元胞自动机模拟研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2005，24 (15)：2704 - 2708.
[23] Ma zhitao, Tan Yunliang, Zhang Ting. Modeling of rock failure based on physical cellar autumata [J]. Journal of Southeast university, 2005, 21 (3): 348 - 351.
[24] 张后全，唐春安，贺永年. 岩石微破裂进程的自组织临界特征探讨 [J]. 西北地震学报，2006，28 (3)：1 - 5.
[25] 谭凯旋，谢焱石，杨建明. 岩石断裂作用的反应 - 迁移 - 力学耦合与自组织 [J]. 南华大学学报 (理工版)，2004，18 (1)：1 - 5.
[26] Carter N L, Kronenberg A K, Ross J V, et al. Control of fluids on deformation of rocks [C]. //In: Knipe R J, Rutter E H (eds): Deformation mechanisms, rheology and tectonics, Geological Society. London: Special Publication, 1990, 54: 1 - 13.
[27] Sibson R H. Crustal stress, faultiong and fluid flow [C]. //In: Parnell J (eds). Geofluies: Origin, Migration, and Evolution of Fluids in Sedimentary Basins. London: Geological Society, 1994, 78: 69 - 84.
[28] Wang C, Xie X. Hydro fracturing and episodic fluid flow in shale - rich basins - A Numerical study [J]. AAPG Bulletin, 1998, 82: 1857 - 1869.
[29] Ghaith A, Chen W, Ortoleva P. Oscillatory methane re lease from shale source rock [J]. Earth Science Reviews, 1990, 29: 241 - 248.
[30] Dewers T, Ortoleva P. Nonlinear dynamical aspects of deep basin hydrology: fluid compartment formation and episodic fluid release [J]. American Journal of Science, 1994, 294 (4): 713 - 755.
[31] 黄清华，周数愚，丁丽青. 蕴震系统自组织演化与构造微动态研究 [J]. 华南地震. 1995，15 (2)：22 - 28.

[32] 国家地震局综合观测队．地球物理场动态观测与研究［M］．北京：地震出版社，1992.
[33] Rundle J B，Tiampo K F，Kleinand W，et al. 漏阈值系统的自组织临界性：近平均场的动力学影响及其对地震、神经生物学和预测方面的意义［J］．国际地震动态．2005，2：13－23.
[34] Broadent S R，Hammersly J M. Proc. Camb［J］. Philos. Soc.，1957，53：629.
[35] Hammersly J M，Handsomb D C. Monte Carlo methods［M］. New York：John Wiley and Sons，Inc.，1964.
[36] 吴忠良．地震震源物理中的临界现象［M］．北京：地震出版社，2000.
[37] 冯增朝，赵阳升，文再明．煤岩体孔隙裂隙双重介质的逾渗机理研究［J］．岩石力学与工程学报，2005，24（2）：236－240.
[38] 陈颙，黄庭芳．岩石物理学［M］．北京：北京大学出版社，2001.
[39] Stephane R，Alex H，Einer L H. Percolation in gradient Conductivity Properties［J］. J. Phys. A：Math. Gen.，1990，23（8）：1253－1258.
[40] Mendelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature［M］.［S. l.］：Freeman San Francisco，1982.
[41] Stauffer D，Aharong A. Introduction to Percolation Theory［M］. London：Taylor & Francis Ltd，1985.
[42] 赵阳升．矿山岩石流体力学［M］．北京：煤炭工业出版社，1994.
[43] Sahimi M. Flow and Transportin Porous Media and Fractured Rock：From Classical Methodsto Mordern Approaches［M］. New York：VCH，1995.
[44] Selyakov V I，Kadet V V. Percolation Modelsfor Transport in Porous Media with Applications to Reservoir Engineering［M］. Boston：Kluwer Academic Publishers，1996.
[45] 胡雪蛟，刘翔，杜建华．非固结多孔介质突破压力的逾渗模型［J］．清华大学学报：自然科学版，2001，41（6）：85－88.
[46] 周宏伟，谢和平．岩土介质渗流的重正化群研究［J］．西安矿业学院学报，1998，18（2）：97－102.
[47] 柯善明，顾浩鼎，翟文杰．地震活动的逾渗模型及临界状态的研究［J］．地震学报，1999，21（4）：379－386.

7 岩石破坏演化物理元胞自动机(PCA)理论

岩石是一种天然的地质材料,由于矿物的组成、成岩环境、应力条件及胶结材料的不同，岩石内部存在着大量细观缺陷。大量研究资料表明，岩石的破坏过程就是在载荷的作用下，岩石内部微观裂纹或缺陷的萌生、发展及聚集贯通的过程。所以，岩石的宏观破坏与其内部细观结构及其微缺陷是紧密相关的，它不同于金属材料。岩石的破坏是一个很复杂的过程，岩石在受力过程中，应力与应变间的关系呈现出不同形态的典型非线性特征。因此，从细观的角度出发，探讨新的细观非线性岩石力学分析方法十分重要。本章将介绍有关岩石细观破坏演化元胞自动机理论及应用。

7.1 元胞自动机基本理论

7.1.1 元胞自动机的定义

元胞自动机是定义在一个由具有离散、有限状态的元胞（cell）组成的元胞空间上，并按照一定的局部规则，在离散的时间维上演化的动力学系统。

具体地讲，构成元胞自动机的部件称为“元胞”，每个元胞具有一个状态，这个状态只能取某个有限状态集中的一个，例如或“生”或“死”，或者是256种颜色中的一种等；这些元胞规则地排列在被称为“元胞空间”的空间格网上；它们各自的状态随着时间的变化而根据一个局部规则来进行更新，也就是说，一个元胞在某时刻的状态取决于且仅仅取决于上一时刻该元胞的状态，以及该元胞的所有邻居元胞的状态；元胞空间内的元胞依照这样的同步规则进行同步的状态更新，整个元胞空间则表现为在离散的时间维上的变化。

元胞自动机最基本的组成包括元胞及状态、元胞空间、邻居及演化规则等几部分。简单地讲，元胞自动机可以视为由一个元胞空间和定义于该空间的变换函数所组成，如图7-1所示。

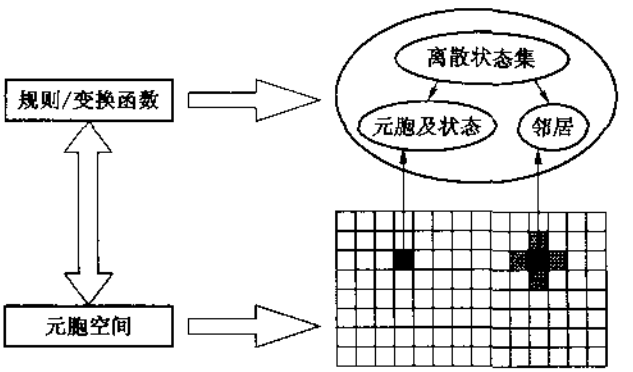


图7-1 元胞自动机的组成

1. 元胞

元胞又可称为单元或基元，是元胞自动机最基本的组成部分。元胞分布在离散的一维、二维或多维欧几里德空间的晶格点上。

2. 状态

状态可以是 $\{0, 1\}$ 的二进制形式，或是 $\{s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_i, \cdots, s_k\}$ 整数形式的离散集。严格意义上，元胞自动机的元胞只能有一个状态变量，但在实际应用中，往往将其进行了扩展，例如每个元胞可以拥有多个状态变量。

3. 元胞空间

元胞分布在空间网点上的集合就是这里的元胞空间。

1）元胞空间的几何划分

理论上，元胞空间的几何划分可以是任意维数的欧几里德空间规则划分。目前，研究多集中在一维和二维元胞自动机上。对于一维元胞自动机，元胞空间的划分只有一种；对于高维元胞自动机，元胞空间的划分则可能有多种形式。最为常见的二维元胞自动机，其二维元胞空间通常可按三角形、正方形或六边形三种网格排列，如图 7-2 所示。

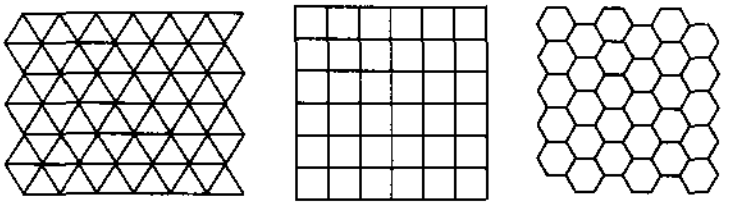


图 7-2　元胞空间

2）边界条件

在理论上，元胞空间通常在各维上是无限延展的，这有利于在理论上的推理和研究。但是在实际应用过程中，无法在计算机上实现这一理想条件，因此，需要定义不同的边界条件。归纳起来，边界条件主要有三种类型：周期型、反射型和定值型。有时在应用中，为了更加客观、自然地模拟实际现象，还有可能采用随机型，即在边界实时产生随机值。

（1）周期型是指相对边界连接起来的元胞空间。对于一维空间，元胞空间表现为一个首尾相接的“圈”。对于二维空间，上下相接，左右相接，而形成一个拓扑圆环面，形似车胎或甜点圈。周期型空间与无限空间最为接近，因而在理论探讨时，常以此类空间型作为试验。

（2）反射型指在边界外邻居的元胞状态是以边界为轴的镜面反射。例如在一维空间中，当 $r=1$ 时的边界情形，如图 7-3 所示。

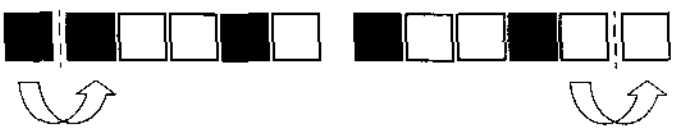


图 7-3　反射型元胞空间

（3）定值型指所有边界外元胞某一固定常量，如0，1等。

4. 元胞类型

以上的元胞及元胞空间只表示了系统的静态成分，为将“动态”引入系统，必须加入演化规则。在元胞自动机中，这些规则是定义在空间局部范围内的，即一个元胞下一时刻的状态决定于本身状态和它的邻居元胞的状态。因此，在指定规则之前，必须定义一定的邻居规则，明确哪些元胞属于该元胞的邻居（Neighbor）。在一维元胞自动机中，通常以半径 r 来确定邻居，距离一个元胞 r 内的所有元胞均被认为是该元胞的邻居。二维元胞自动机的邻居定义较为复杂，但通常有以下几种形式（以最常用的规则四方网格划分为例），如图7-4所示，黑色元胞为中心元胞，灰色元胞为其邻居，用它们的状态来计算中心元胞在下一时刻的状态。

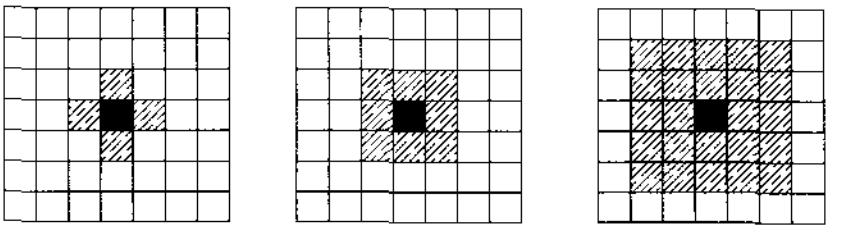


图7-4 邻居模型

（1）冯·诺依曼型。一个元胞的上、下、左、右相邻4个元胞为该元胞的邻居。这里，邻居半径 r 为1，相当于图像处理中的四邻域、四方向。

（2）摩尔型。一个元胞的上、下、左、右、左上、右上、右下、左下相邻8个元胞为该元胞的邻居。邻居半径 r 同样为1，相当于图像处理中的八邻域、八方向。

（3）扩展的摩尔型。将以上的邻居半径 r 扩展为2或者更大，即得到所谓扩展的摩尔型邻居。

（4）Margolus型。Margolus型是一种与上述模型具有本质差别的邻居模型。它不是考虑单个元胞，而是将相邻的2×2元胞作为一个元胞块进行统一处理，如图7-5所示。这种邻居模型由于在著名的格子气自动机中的成功应用而被人们关注。

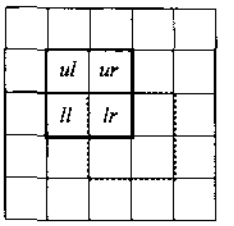


图7-5 Margolus型

5. 演化规则

演化规则就是根据元胞当前状态及其邻居状况确定下一时刻该元胞状态的动力学函数，简单地讲，就是一个状态转移函数。一个元胞的所有可能状态连同负责该元胞状态变换的规则总称为一个变换函数。这个函数构造了一种简单的、离散的空间/时间范围的局部物理成分，要修改的范围里采用这个局部物理成分对其结构的“元胞”重复修改。这样，尽管物理结构的本身每次都不发展，但是状态在变化。它可以记为

$$f: s_i^{t+1} = f(s_i^t, s_N^t)$$

式中 s_N^t——t 时刻的邻居状态组合；

f——元胞自动机的局部映射或局部规则。

以下介绍几个比较常见的元胞自动机演化规则。

1）HPP 规则

HPP 规则是元胞自动机模型中一个重要类型。其主要的研究对象是在一定格子上运动的粒子。每个元胞有两个状态，分别表示元胞的存在或不存在，可以用 1 或 0 表示。每格点有相互正交的 4 条运动轨道。粒子的运动分为两阶段：碰撞和运动。

所谓的 HPP 格子气自动机便是按该规则在二维方形网格上进行演化的元胞自动机，如图 7－6 所示。

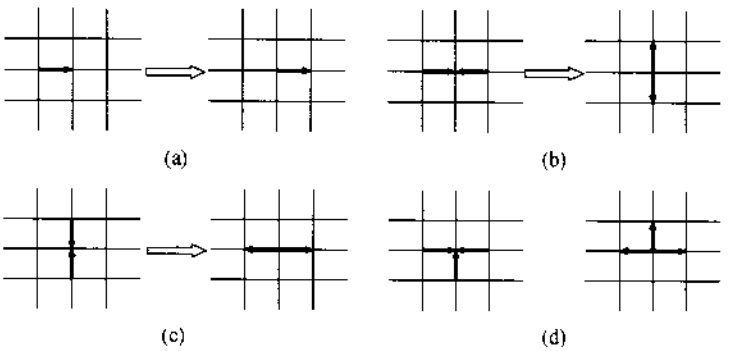


图 7－6　HPP 规则示意图

图 7－6a 所示为单粒子非碰撞式运动，它的运行轨道不发生变化；图 7－6b 和图 7－6c 所示为双粒子碰撞式运动，碰撞后它们的轨道发生变化，将向最近的轨道运动；图 7－6d 所示为三粒子交叉碰撞运动，粒子彼此穿透；四粒子的碰撞规则与三粒子相同。如果用 0 或 1 表示上述运动，则表达式为

$$(1000)\rightarrow(1000)(1010)\rightarrow(0101)(0101)\rightarrow(1010)$$

其中 1 表示有粒子，0 表示无粒子。

2）退火规则

根据 G. Vichniac[31] 提出求解的大多数规则（twisted majority rule），在二维空间，每个元胞具有 0 或 1 两个状态，对每个元胞考察它的 Moore 邻居（即元胞本身加上它的 8 个邻居元胞），并计算所有值之和，该值为 0 到 9 之间的任一整数。然后根据该值确定元胞的新状态 $S_{ij}(t+1)$，规则如下：

$$\begin{array}{ll} Sum_{ij}(t) & 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ S_{ij}(t+1) & 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \qquad (7-1)$$

式（7－1）表明，当 0 状态的元胞占绝对多数时，元胞新状态为 0；否则，新状态为 1。但将值 4 和 5 所对应的状态值作了调换，表示当邻居中状态为 0 的元胞占微弱多数时，元胞状态变为 1；当邻居中状态为 1 的元胞个数占微弱多数时，元胞的状态变为 0。

该规则可以用来描述二相之间的界面运动，如图 7－7 所示，表示初始时刻一个具有等浓度的二相随机混合物的界面运动演化过程。从演化过程中，可以清楚地看出结构的“海角”被侵蚀和“海湾”被充填的过程。

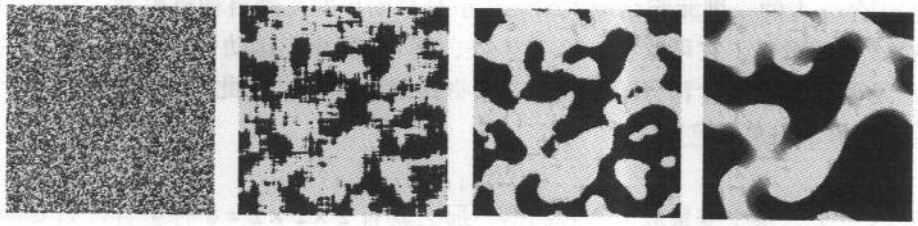


图 7-7　退火规则的演化

3）砂堆规则

砂堆规则可以模拟砂堆的堆积和倒塌的物理过程。具体描述为：以元胞的空间表示一粒砂子，如果某一砂子的下面有一粒砂子，且其下方左、右两边均有一粒砂子，则该砂子稳定，如图 7-8 所示；否则不稳定。对于不稳定砂子的运动方式，可以利用 Margolus 邻居模型表示。

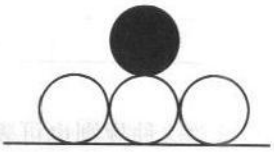


图 7-8　稳定砂堆图

图 7-9 所示为砂堆演化规则，其表示砂子的具体运动方式。但是，在图 7-9 中没有给出上边两个单元有砂子，而下边两个单元无砂子的情况。这种情况的演化规则如图 7-10 所示，其中 p 表示发生变化的概率，$1-p$ 为不变化的概率。

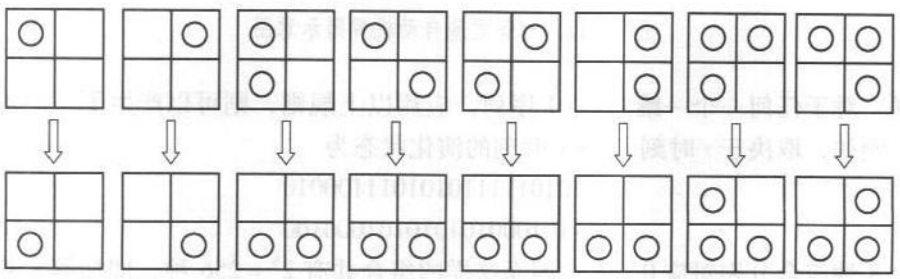


图 7-9　砂堆演化规则

另外，除了上述几个规则，还有蚂蚁规则、道路交通规则、概率规则及表面生长模型等规则。

7.1.2　初等元胞自动机模型

在元胞自动机的发展过程中，科学家们构造了各种各样的初等元胞自动机模型。其中，以下几个典型模型对元胞自动机的理论方法的研究起到了极大的推动作用，因此，它们又被认为是元胞自动机发展历程中的里程碑。

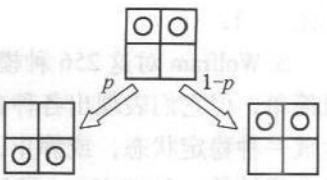


图 7-10　底层为空时演化规则

1. S. Wolfram 初等元胞自动机[1]

初等元胞自动机（Elementary Cellular Automata，简称 ECA）是状态集 S 只有两个元素$\{S_1, S_2\}$，即状态个数 $k=$

2，邻居半径 $r=1$ 的一维元胞自动机，它几乎是最简单的元胞自动机模型。在 S 中具体采用什么符号并不重要，它可取{0，1}，{-1，1}，{静止，运动}，{黑，白}，{生，死}等，这里重要的是 S 所含符号的个数，通常将其记为{0，1}。此时，邻居集 N 的个数 $2^1=2$，局部映射 $f: S^3 \to S$ 可记为

$$S_i^{t+1}=f(S_{i-1}^t,\ S_i^t,\ S_{i+1}^t)$$

其中变量有三个，每个变量取两个状态值，那么就有 $2\times2\times2=8$ 种组合。只要给出在这8种自变量组合上的值，f 就完全确定了，其中的一个规则见表7-1。

表7-1 初等元胞自动机规则

t	111	110	101	100	011	010	001	000
$t+1$	0	1	0	0	1	1	0	0

通常这种规则也可表示为如图7-11所示的方式（黑色方块代表1，白色方块代表0）。

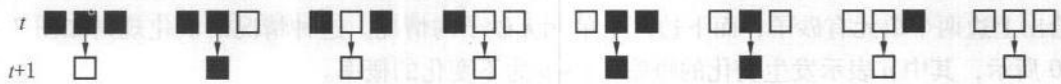


图7-11 初等元胞自动机规则示意图

这样，对于任何一个一维的0、1序列，应用以上规则，则可以产生下一时刻的相应的序列。例如，取决于 t 时刻的 $t+1$ 时刻的演化状态为

t：　01011111010101110010

$t+1$：10100010101010100100

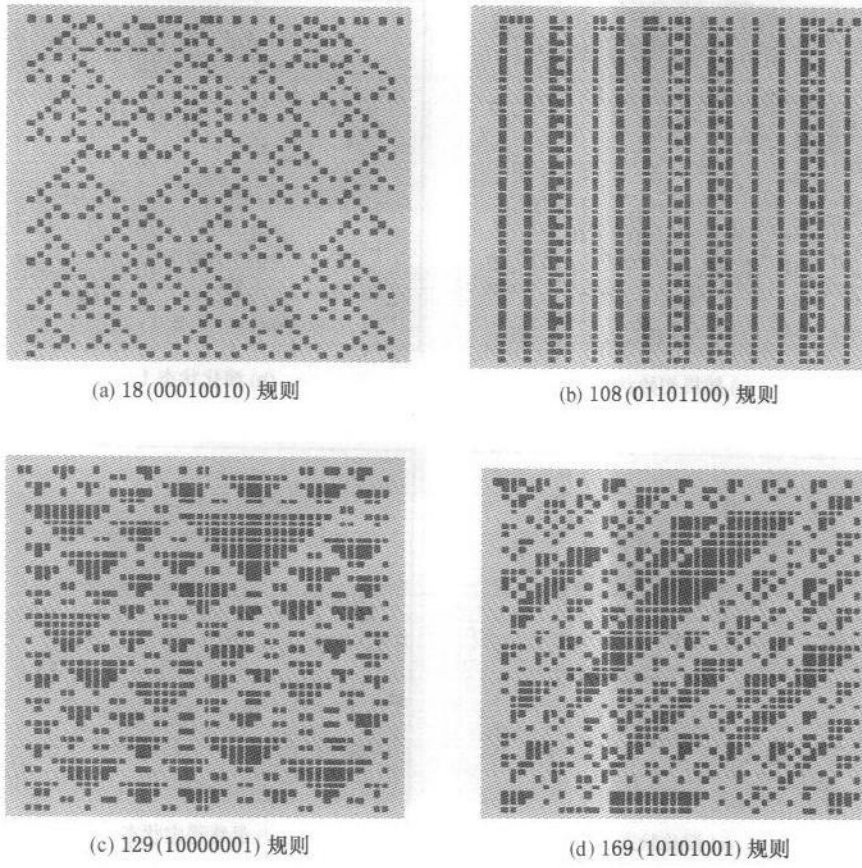
以上8种组合分别对应0或1，因而这样的组合共有 $2^8=256$ 种，即初等元胞自动机只可能有256种不同规则。S. Wolfram 定义由上述8种构形产生的8个结果组成一个二进制，如上可得01001100，然后计算它的十进制值 R，即

$$R=\sum_{i=0}^{7} S_i 2^i = 76 \qquad (7-2)$$

$R\in[0,\ 255]$，S. Wolfram 定义 R 为初等元胞自动机的标号，则上面的元胞自动机模型就是76号初等元胞自动机。

例如，对18号、108号、129号和169号规则进行模拟，其模拟结果斑图差别很大，如图7-12所示。

S. Wolfram 对这256种模型进行了详细而深入的研究。研究表明，尽管初等元胞自动机简单，但它们表现出各种各样的高度复杂的空间形态。经过一定时间，有些元胞自动机生成一种稳定状态，或静止，或产生周期性结构；有些元胞自动机则产生自组织、自相似的分形结构。S. Wolfram 借用分形理论计算它们的维数约为1.59或1.69。应当指出，S. Wolfram 对一维元胞自动机的研究，为后来元胞自动机理论的发展奠定了基石。



(a) 18(00010010) 规则　(b) 108(01101100) 规则

(c) 129(10000001) 规则　(d) 169(10101001) 规则

图 7-12　几种初等元胞自动机的演化模拟

2. J. H. Conway 的“生命游戏”

“生命游戏”（Game of Life）是 J. H. Conway 在 20 世纪 60 年代末设计的一种单人玩的计算机游戏[2]。它与现代的围棋游戏在某些特征上略有相似：围棋中有黑白两种棋子，“生命游戏”中的元胞有{“生”，“死”}两个状态{0，1}；围棋的棋盘是规则划分的网格，黑白两子在空间的分布决定双方的死活，而“生命游戏”也是规则划分的网格（元胞似国际象棋分布在网格内，而不像围棋的棋子分布在格网交叉点上），根据元胞的局部空间构形来决定生死，只不过规则更为简单。其构成及规则如下：

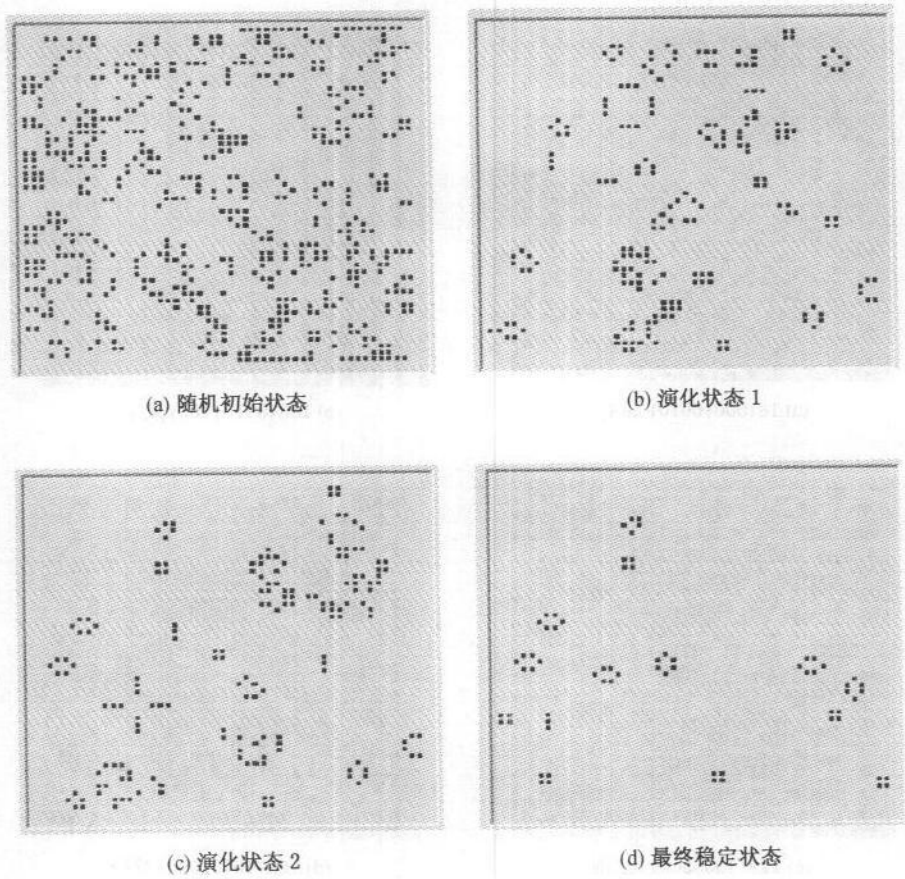
（1）元胞分布在规则划分的网格上。

（2）元胞具有 0，1 两种状态，0 代表“死”，1 代表“生”。

（3）元胞以相邻的 8 个元胞为邻居，即 Moore 邻居形式。

（4）一个元胞的生死由其在该时刻本身的生死状态和周围 8 个邻居的状态（确切讲是状态的和）决定。

在当前时刻，如果一个元胞状态为“生”，且 8 个相邻元胞中有两个或三个的状态为“生”，则在下一时刻该元胞继续保持为“生”，否则为“死”；如果一个元胞状态为“死”，且 8 个相邻元胞中正好有三个为“生”，则该元胞在下一时刻“复活”，否则保持为“死”。“生命游戏”的演化过程如图 7-13 所示。



(a) 随机初始状态　(b) 演化状态 1

(c) 演化状态 2　(d) 最终稳定状态

图 7-13　“生命游戏”的演化过程

尽管“生命游戏”的规则看上去很简单，但它是具有产生动态图案和动态结构能力的元胞自动机模型，它能产生丰富的、有趣的图案。“生命游戏”的优化与初始元胞状态值的分布有关，给定任意的初始状态分布，经过若干步的运算，有的图案会很快消失，而有的图案则固定不动，有的周而复始重复两个或几个图案，有的蜿蜒而行，有的则保持图案定向移动，形似阅兵阵，其中最为著名的是“滑翔机（Glider）”的图案。

“生命游戏”模型已在很多方面得到应用。它的演化规则近似地描述了生物群体的生存繁殖规律，即在生命密度过小（相邻元胞数 < 2）时，由于孤单、缺乏配种繁殖机会、缺乏互助会出现生命危机，元胞状态值由 1 变为 0；在生命密度过大（相邻元胞数 > 3）时，由于环境恶化、资源短缺及相互竞争而出现生存危机，元胞状态值由 1 变为 0；只有处于个体适中（相邻元胞数为 2 或 3）位置的生物才能生存（保持元胞的状态值为 1）和繁衍后代（元胞状态值由 0 变为 1）。由于它能够模拟生命活动中的生存、灭绝、竞争等复杂现象，因而得名“生命游戏”。J. H. Conway 还证明，这个元胞自动机具有通用图灵机的计算能力，与图灵机等价，也就是说给定适当的初始条件，“生命游戏”模型能够模拟任何一种计算机。

从数学模型的角度看，该模型将平面划分成方格棋盘，每个方格代表一个元胞。

元胞状态：0——死亡，1——活着；

领域半径：1；

领域类型：Moore 型；

演化规则：

①若 $S^t=1$，则

$$S^{t+1}=\begin{cases}1 & (S=2,\ 3)\\ 0 & (S\neq 2,\ 3)\end{cases}$$

②若 $S^t=0$，则

$$S^{t+1}=\begin{cases}1 & (S=3)\\ 0 & (S\neq 3)\end{cases}$$

式中 S^t——t 时刻元胞的状态；

S——8 个相邻元胞中活着的元胞数。

另外，需要指出的是，目前随着人们对“生命游戏”研究的深入，产生了许多变种和扩展。在 20 世纪 80 年代末，A. K. Dewdney[3] 和 C. Bays[4] 将 J. H. Conway 的“生命游戏”扩展到了三维空间上，构建了三维“生命游戏”，并对其规则作了具有普遍性的扩展。C. Bays 的学生 Lee Meeker 在此基础上进一步构建了四维“生命游戏”。

对游戏规则的扩展主要是引入了 4 个参数 E_b，E_k，F_b，F_k。E_b 表示对于一个“活”元胞，在下一时刻，继续保持其状态所需要的最少的“活”邻居的数目；F_b 表示对于一个“死”元胞，在下一时刻，“复活”所需要的最少的“活”邻居的数目；E_k 和 F_k 分别表示上述情况的上限值。演化规则修改为

①若 $S^t=1$，则

$$S^{t+1}=\begin{cases}1 & (k_1\leqslant S\leqslant k_2)\\ 0 & (S<k_1\ 或\ S>k_2)\end{cases}$$

②若 $S^t=0$，则

$$S^{t+1}=\begin{cases}1 & (k_3\leqslant S\leqslant k_4)\\ 0 & (S<k_3\ 或\ S>k_4)\end{cases}$$

式中 S——相邻活元胞数。

上述模型形象地体现了环境与生存的制约关系，因而它通常又被称为“环境－生存（Environment－fertility）”模型。此时，“生命游戏”规则可以记为 Life 2333。

3. 格子气自动机

格子气自动机（Lattice－Gas Automata，简称 LGA，又称格气机），是元胞自动机在流体力学与统计物理中的具体化，也是元胞自动机在科学研究领域成功应用的范例。相对于“生命游戏”来说，格子气自动机是一个更注重实用性的模型，它利用元胞自动机的动态特征来模拟流体粒子的运动。

第一个时空、速度等变量完全离散的格子气自动机是 1973 年由法国的 J. Hardy，Y. Pomeau 和 O. De Pazzis 提出的 HPP 模型[5]，它的模型结果已经很接近流体力学中描述流体运动的 Navier－Strokes 方程。但模型中的流体粒子的运动只允许有 4 个方向，造成应力张量各向异性的致命弱点，尚不能充分反映流体的特征，因此在较长时间内没有受到足够的重视。直到 20 世纪 80 年代，S. Wolfram 等人的研究工作使得元胞自动机理论产生了

质的飞跃，同时也带动了格子气自动机的进一步发展。1986 年，U. Frisch，B. Hasslacher，Y. Pomeau[6] 及 S. Wolfram[7,8] 几乎同时提出了著名的 FHP 模型，并证明了该模型的宏观行为符合标准的 Navier - Stokes 方程。FHP 模型是第一个成功的格子气模型，激发了研究格子气模型的热潮，人们在几年内发表了数百篇论文。在 20 世纪 90 年代中后期，一种被称为格点波尔兹曼方程（Lattice Bolzmann）的改进模型逐步取代了原有的格子气模型。

应当说，格子气自动机是一种特殊的元胞自动机模型，或者说是一个扩展的元胞自动机模型（Extended Cellular Automata）。以早期的格子气模型为例，描述其特征如下：

（1）由于流体粒子不会轻易从模型空间中消失，这个特征需要格子气自动机是一个可逆元胞自动机模型。

（2）格子气自动机的邻居模型通常采用 Margolus 类型，即它的规则基于一个 2×2 的网格空间，其形式如图 7 - 14 所示。

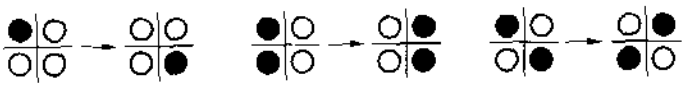


图 7 - 14　格子气自动机规则

图 7 - 14 中黑色球代表流体粒子，白色球代表空的元胞。一般元胞自动机是以一个元胞（常被称为中心元胞）为研究对象考虑其状态的转换，从图 7 - 14 可以看出，格子气自动机不同于其他的元胞自动机模型，而是考虑包含 4 个元胞的一个四方块。

（3）依照上述规则和邻居模型在计算完一次后，需要将这个 2×2 的模块沿对角方向滑动，再计算一次。那么，一个流体粒子的运动需要两步（$t \rightarrow t+1 \rightarrow t+2$）才能完成。

从时间和空间的角度看，格子气自动机相对其他的元胞自动机模型具有较为独特的特征。格子气自动机作为一种特殊类型的元胞自动机已成为流体动力学中的一个重要领域，几乎独立于元胞自动机研究之外。

7.1.3　元胞自动机与人工生命

人工生命是 20 世纪 90 年代诞生的新科学，它是研究能够展示自然界生命系统行为特征的人工系统的一门科学，它试图在计算机、机器人等领域内仿真、模拟和生物有机体相关联的一些基本现象，如自我复制、寄生、竞争、进化等。

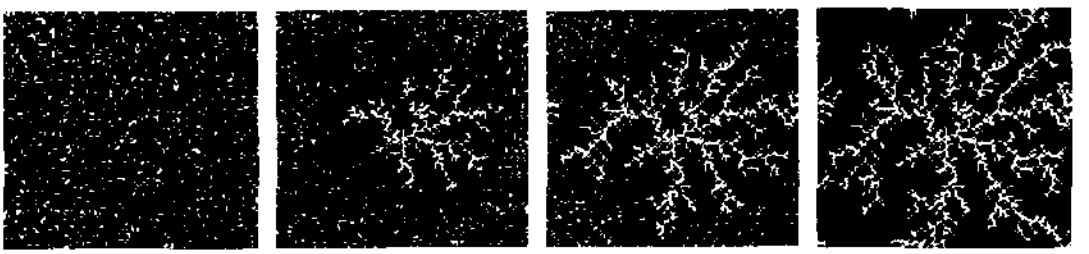
元胞自动机是人工生命的重要研究工具和理论方法分支，兰顿等人正是基于对元胞自动机的深入研究才提出和发展了人工生命。同时，人工生命的发展又为元胞自动机赋予了新的含义，元胞自动机模型得到了科学家的重新认识和认可，并在 20 世纪 90 年代又一次成为科学研究的前沿课题，其理论方法得到了进一步的提高。

另外，元胞自动机与其他人工生命研究方法有着很大的相似性。元胞自动机与神经网络、遗传算法等人工生命方法一样，都是基于局部相互作用来研究整体行为。它们都可以归为非线性动力学中的网络动力学模型，它们相互联系、关系密切。目前，一种元胞神经网络（Cellular Neural Network，简称 CNN）模型就是元胞自动机与神经网络结合的产物。

7.1.4　元胞自动机与分形

元胞自动机与分形理论有着密切的联系。元胞自动机的自复制、混沌等特征往往导

致元胞自动机模型在空间构形上表现出自相似的分形特征，即元胞自动机的模拟结果通常可以用分形理论进行定量的描述。同时，在分数维的研究中，有些模型本身就是或者很接近元胞自动机模型。图 7－15 所示为凝聚扩散模型，这是分形中的一个经典范例。



(a)　(b)　(c)　(d)

图 7－15　多粒子凝聚扩散模型

元胞自动机与分数维有着很大的差别：元胞自动机重在对现象机理的模拟与分析，分数维重在对现象表现形式的表达研究。元胞自动机建模时，是从现象的规律入手，构建有特定含义的元胞自动机模型；分数维建模时，是从物理或数学规律、规则构建模型，而后应用于某种特定复杂现象。

此外，元胞自动机与分数维都强调一个从局部到整体的过程，但在这个过程的实质上，两者是有区别的。分数维的精髓是自相似性，强调局部与整体的相似性；元胞自动机的精华在于通过局部的简单规则，产生整体行为上的“突现”性复杂行为，即系统在宏观层次上，部分或部分加和所不具有的性质。

元胞自动机除了与人工生命、分数维具有关联外，还与混沌、微分方程、马尔科夫（链）过程、系统动态学模型等理论方法有一定的关联。

7.2　岩石破坏演化的 PCA 基本模型

谭云亮、周辉[9,10]等根据岩体的结构与破坏特征，从基本的能量传递定律出发，以能量为基本变量，建立了一种细观层次上的新的描述岩体破坏演化的理论——物理元胞自动机（Physical Celluar Automaton，简称 PCA）。PCA 实质是一个扩展的元胞自动机模型，如图 7－16 所示，它旨在元胞自动机的框架下，集成重正化群、自组织理论等思想，构建模拟和分析岩石行为演化的一个概念性和方法性的模型框架，为元胞自动机今后在具体岩石力学领域的应用提供理论和方法论上的支持。

7.2.1　PCA 基本模型

1. 岩石元胞划分

根据岩石材料的细观结构（图 7－17a），可将研究域等效划分为 $N \times N$ 的方块（图 7－17b），每个方块定义一个元胞。根据岩石细观结构自相似特征，一定量的元胞单元可以有效模拟岩石等材料的细观结构。

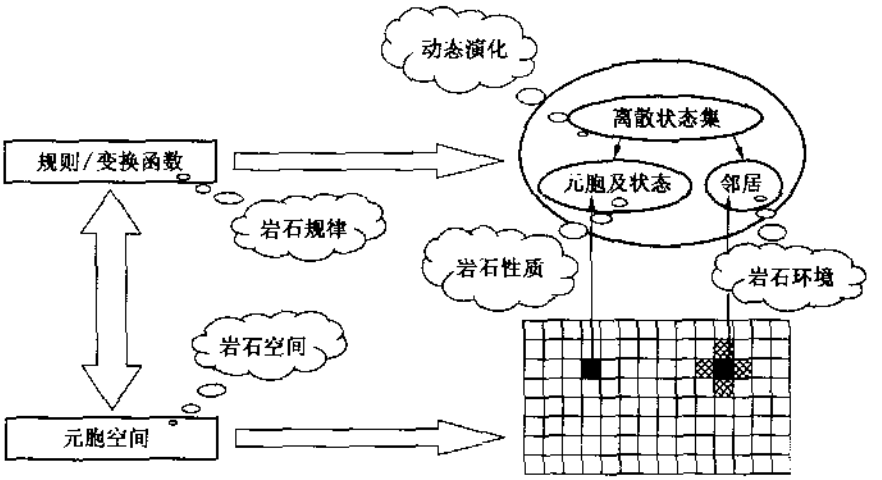


图 7-16　物理元胞自动机模型（扩展的元胞自动机模型）

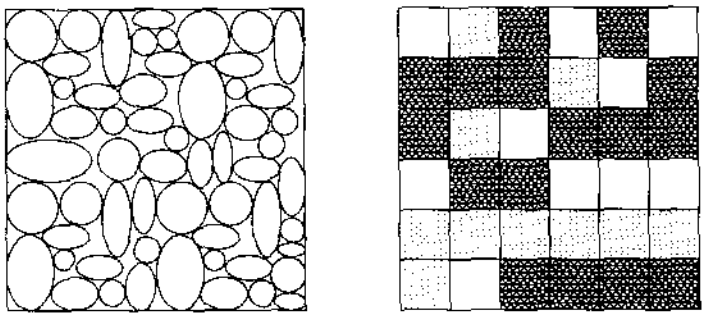


图 7-17　材料细观结构和元胞网格等效划分

2. 岩石元胞空间

传统的元胞自动机空间有三角形空间、正方形空间和六边形空间，考虑到便于计算机模拟的特性，一般采用正方形空间（本章大部分模拟例子采用正方形空间）。

本模型是采取能量为基本输入变量，在边界上的元胞会将能量以耗散的方式在边界上耗散出去。

3. 岩石元胞状态

本模型是以能量为基本变量，元胞状态为

$$S=\{WE(x_i,y_i,\ t),\ WE_{TH}(x_i,y_i,\ t)\}$$

式中　$WE(x_i,y_i,\ t)$ —— $(x_i,\ y_i)$ 位置的元胞在 t 时刻所存储的广义能量；

$WE_{TH}(x_i,y_i,\ t)$ —— $(x_i,\ y_i)$ 位置的元胞在 t 时刻所允许存储的广义极限能量。

每个元胞都有 5 个状态量，但只有 $WE(x_i,y_i,\ t)$ 是变量，其余是元胞固有的属性，对应表征了一定的物理意义。

4. 岩石元胞邻居

本模型既可以采取冯·诺依曼型，也可以采用摩尔型，在后面将分别介绍用这两种邻居模型建立的模拟例子。

5. 岩石元胞演化规则

首先，进行初始化。在运行之前需要被初始化的有：

（1）设置元胞矩阵 $N \times N$。

（2）对权重进行初始化 $WE(x_i, y_i, t)$，即 $WE(x_i, y_i, 0)$，其中 $WE(x_i, y_i, t)$ 为 1～4 的整数。

（3）对权重阈值 $WE_{TH}(x_i, y_i, t)$ 进行初始化，即 $WE_{TH}(x_i, y_i, 0)$，其中 $WE_{TH}(x_i, y_i, 0)$ 为 $1 \sim [WE(x_i, y_i, 0) - 1]$ 的整数。

（4）若有裂纹，可设置裂纹影响域。

（5）设置能量耗散系数 $NH(j)$，j 为 1～4 或 1～8 的整数，表示周围的邻居；$NH(j)$ 为 1～4 的整数，表征不同强度元胞破坏后的能量耗散。

（6）设置能量传递概率 $P(i)$，i 为 1～4 或 1～8 的整数，表示周围的邻居，表征元胞破裂后向不同方向的能量传递概率。

其次，进行加载设置。PCA 对加载方式的模拟是通过在每个时步内输入给系统不同的广义能量粒子数 $C(t)$ 来实现的，$C(t)$ 越大，系统加载应力越大；$C(t)$ 越小，系统加载应力越小。能量输入方式的形式如下：

（1）恒定输入方式：$C(t)$ = 常整数。

（2）恒速率输入方式：$C(t) = \mathrm{Int}(a + bt)$，其中 a、b 为常数，t 为时步。

（3）一般输入方式：$C(t) = \mathrm{Int}[f(t)]$，$f(t)$ 为任意函数。

再次，演化运算。检查系统内，若某个元胞的能量 $WE(x_i, y_i, t)$ 满足条件：

$$WE(x_i, y_i, t) \geqslant WE_{TH}(x_i, y_i, t) \tag{7-3}$$

则认为该元胞达到了破坏极限；同时，按照相应的能量传递概率和能量耗散数将其能量传递给相邻的元胞或耗散掉。此时，把破裂元胞 (x_i, y_i) 的能量设置为 0，即 $WE(x_i, y_i, t) = 0$。当研究域内所有元胞的能量均小于广义极限能量值时，即认为系统完成了一步破坏演化，即为一个时步。

最后，卸载。在 PCA 模型中，卸载是通过按时步减小系统的广义能量来实现的。设需要从系统中卸载的总能量为 M，在每个时步内，从系统中随机选择一个元胞 (x_i, y_i)，若其广义能量 $WE(x_i, y_i, t) \neq 0$，则令 $WE(x_i, y_i, t+1) = WE(x_i, y_i, t) - 1$；若 $WE(x_i, y_i, t) = 0$，则再选择一个元胞，一直选到 $WE(x_i, y_i, t) > 0$ 的元胞为止。按照这种方式，每时步从系统中“卸载”掉一个能量粒子，直到总卸载能量等于 M 为止。

6. 岩石元胞破裂判据

岩石受力时，当其内部微破裂和局部宏观破坏积累到一定程度时，岩石会发生整体失稳破坏。遵照这一事实，并根据损伤力学的基本观点，对物理元胞自动机中的系统失稳条件作如下简化处理。

在损伤力学中，损伤变量定义为

$$D = \frac{S_0 - S^*}{S_0} \tag{7-4}$$

式中 S_0——承载横截面的总面积；

S^*——有效承载面积。

根据损伤变量的定义，可用 PCA 中破坏元胞的面积与所有元胞的面积之比来定性地表示岩石试件的损伤变量 $D(t)$。$D(t)$ 是时间 t 的函数，其表达式为

$$D(t)=\frac{\sum_{(x_i,y_i)\in\text{元胞矩阵}} S_j(x_i,y_i,t)-n(t)S^*}{\sum S} \tag{7-5}$$

式中 $S_j(x_i, y_i, t)$ ——第 j 个子元胞初始状态有效面积；

$n(t)$ ——t 时刻破坏子元胞的个数；

S^*——破坏子元胞的面积；

$\sum S$——所有元胞面积之和。

当系统中破坏元胞的比例，即损伤变量 $D(t)$，达到某一阈值时，就认定系统达到了失稳条件，已经处于完全破坏状态。

7.2.2 岩石破裂演化的 PCA 模拟算法

1. 元胞状态量的物理意义

$WE(x_i, y_i, t)$ 相当于岩体微单元的强度，即当元胞 (x_i, y_i) 内储存的广义能量超过 $WE(x_i, y_i, t)$ 时，该元胞就会发生破坏；$WE_{TH}(x_i, y_i, t)$ 等效于岩体的弹性应变能；初始破裂阈值 $WE(x_i, y_i, 0)$ 为 1～4 的整数，表示岩石微单元的初始强度；初始元胞能量 $WE_{TH}(x_i, y_i, 0)$ 为 1～$[WE(x_i, y_i, 0)-1]$ 的整数，表示岩体微单元内存在原始应力；广义能量输入方式为每时步内向系统输入的广义能量粒子数，表示岩体系统所处的不同应力环境，只不过物理元胞自动机对应力的表达是通过广义能量来体现的；能量耗散系数 $NH(j)$（j 为 1～4 的整数）表征不同强度元胞破坏后的能量耗散，它对应于实际岩体单元破坏后以声波、热能和新生裂纹表面能等形式消耗掉的那部分弹性应变能。

2. 非均质性的表达

在 PCA 中，通过在初始时刻，给每个元胞赋予不同的广义极限能量（可在 1，2，3，4 中按概率取值），广义极限能量为 $i(i=1\sim4)$ 的元胞数占总数的比例 $P(i)$ 可以用来表达非均质的程度，其中 $P(i)$ 满足 $\sum_{i=1}^{4}P(i)=1$。岩石内部各细观单元体的强度、模等是不同的，呈现出非均质性，这一性质被一些学者认为是岩石等材料受力破坏的根本原因[15]。

3. 各向异性的表达

除了非均质性以外，岩石等材料性质往往呈现出明显的各向异性。PCA 通过设置元胞破裂时广义能量沿不同方向上传递概率的大小来体现材料的各向异性，如图 7－18 所示，元胞 0 破裂后将向元胞 1，2，3，4 传递能量，传递能量概率大小的不同表征各方向传递广义能量的能力强弱。例如，设置元胞 3、4 的能量接受概率 $P_3=P_4$ 大于（或小于）元胞 1、2 的能量接受概率 $P_1=P_2$，且 $\sum_{i=1}^{4}P(i)=1$，则说明材料在水平方向和垂直方向的性质是不同的。若将这个广义“能量”当量地视为应力，则传递能量的能力（或接受概率）可当量于弹模。若 $P_1\neq P_2\neq P_3\neq P_4$，则为典型的各向异性情形。

4. 岩石内弱化区的模拟

试验和理论研究均已表明，岩石等材料损伤首先始于弱化区，因此，弱化区的表达尤为重要。PCA 模型采用的处理方法如图 7－19 所示，黑色元胞为裂纹或弱化区穿过处，设置该区域所贯通元胞的广义极限能量为 $WE_{TH}(x_i, y_i, 0) = 0$；同时，在弱化区的两侧一定范围内设置能量吸引域，如图 7－19 中“×”所示。将吸引域内元胞的广义极限能量 $WE_{TH}(x_i, y_i, 0)$（其中 $(x_i, y_i) \in$ 能量吸引域）设置为 0 或 1，域内元胞能量小于或等于吸引范围周围元胞的广义极限能量，即体现弱化区域内及其附近处岩石单元易先破坏的特点。

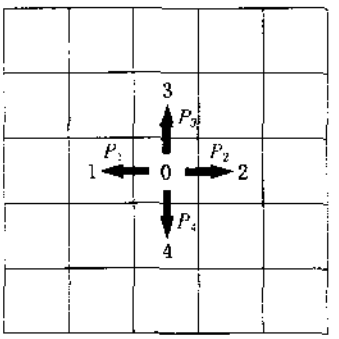


图 7－18　各向异性 PCA 能量传递图

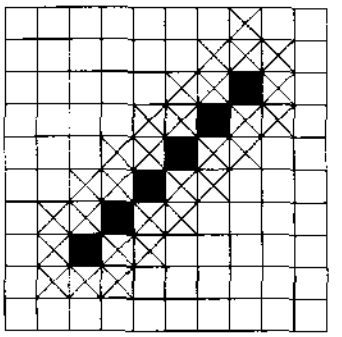


图 7－19　裂纹吸引域示意图

7.2.3　岩石元胞尺度的重正化变换

由于岩石材料的损伤破坏演化是一个渐进的动态过程，为此，在物理元胞自动机模型中引入重正化群的基本思想，对元胞作如下简化处理。

将每个元胞再划分为 4 个子元胞（subcell），使子元胞都具有以下特征：

（1）每个子元胞具有相同的几何尺寸。

（2）每个子元胞只具有两种状态特性，即 0 表示未破坏，1 表示已破坏。

（3）状态为 0 的子元胞的强度为 1（即其所能储存的最大能量为 1），状态为 1 的子元胞的强度为 0（即其已失去继续储存能量的能力）。

系统的局部破坏是以元胞为最小单位进行的，即当某个元胞中所有强度为 1 的子元胞储存的能量均为 1 时，整个元胞发生破坏，且每次只有一个强度为 1 的子元胞发生破坏（强度为 0 的子元胞不再发生破坏）；当元胞中所有的子元胞均破坏（即元胞中 4 个子元胞的状态均为 1）时，则认为整个元胞处于完全破坏状态，完全破坏的元胞在系统后续的破坏演化中不再具有储存能量的能力，只起能量传递的作用。

经过以上简化处理，可以得到初始破裂阈值为 4 的元胞“强度”随时步的变化曲线，如图 7－20 所示。

每个元胞内各子元胞的渐进破坏体现着该元胞渐进损伤破坏过程，如图 7－21 所示。

7.2.4　单轴岩石试块 PCA 模拟试验算法[10]

元胞自动机（CA）是一种描述岩体破坏演化的广义非线性动力学模型，它既可以表征大尺度岩体的破坏过程（如地震），也可以描述中尺度和小尺度岩体的破坏行为（如岩

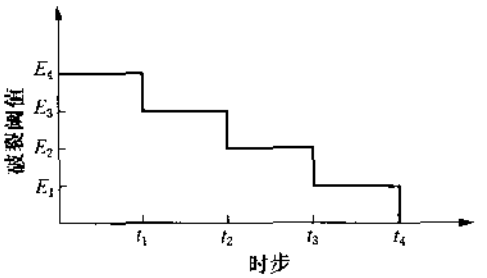


图 7-20　元胞损伤过程能量变化

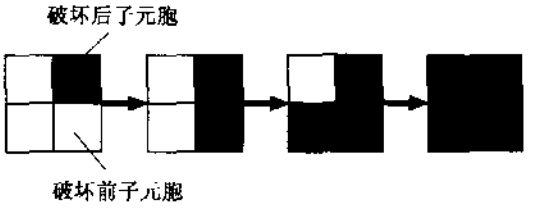


图 7-21　子元胞破坏过程

爆和实验室岩石试块的受力破坏）。由于物理元胞自动机（PCA）充分考虑了岩体的材料性质、应力环境和破坏的能量耗散等关键问题，因此，它对中小尺度岩体破坏行为的模拟更接近实际情况。

下面以岩石在单轴拉（压）条件下为假设前提，讨论如何基于物理元胞自动机的计算结果来求得单轴拉（压）条件下力－变形－声发射的关系，以便将 PCA 的计算结果与理论和试验结论作比较验证。

1. 岩石试件力学性质的 PCA 表达

若要由广义能量来计算力或变形，首先应求得中间变量——岩石试件的刚度 $K(t)$ 和弹性模量 $E(t)$。考虑到在岩石试件的受力过程中，内部微单元不断发生破坏，因此，刚度 $K(t)$ 和弹性模量 $E(t)$ 是时间 t 的函数，其函数关系可以通过损伤变量来求得。

如前所述在物理元胞自动机中，每个子元胞的面积都是相等的，因此，损伤变量 $D(t)$ 也可以用破坏子元胞的面积与所有子元胞的面积之比来表示，从而系统在初始状态的损伤变量 $D(0)$ 为

$$D(0) = 1 - \frac{\sum_{(x_i,y_i)\in 元胞矩阵} PLYZ(x_i,y_i,0)}{4BNXY} \tag{7-6}$$

式中，$BNXY$ 为系统内元胞的总数。

若设岩石无损伤时的弹性模量为 e，则系统的初始弹性模量可表示为

$$E(0) = e[1 - D(0)] = e\frac{\sum_{(x_i,y_i)\in 元胞矩阵} PLYZ(x_i,y_i,0)}{4BNXY} \tag{7-7}$$

若从初始状态至时间 t，随着整个系统中子元胞破坏的演化，系统的损伤变量为

$$D(t) = 1 - \frac{\sum_{(x_i,y_i)\in 元胞矩阵} PLYZ(x_i,y_i,0) - U(t)}{4BNXY} = D(0) + \frac{U(t)}{4BNXY}$$

系统的弹性模量为

$$E(t) = e[1 - D(t)] = e\left[1 - D(0) - \frac{U(t)}{4BNXY}\right] = E(0) - e\frac{U(t)}{4BNXY}$$

刚度 $K(t)$ 和弹性模量 $E(t)$ 之间的关系如下：

$$K(t) = \frac{E(t)S}{l} \tag{7-8}$$

式中　S——加载面的面积；

l——试件的轴向长度。

因为在加载过程中，S 和 l 变化不大，作为近似，可将比值 S/l 视为常数 C，则刚度可简化为

$$K(t)=\frac{E(t)\ S}{l}\approx E(t)C=\left[E(0)-e\frac{U(t)}{4BNXY}\right]C=K(0)-e\frac{U(t)}{4BNXY}C \tag{7-9}$$

2. 力与变形的计算

图 7-22 所示为典型的力-变形曲线。设 A 点相应的力为 $F(t)$，变形为 $u(t)$（t 为时间变量）。由 A 点卸载至 B 点，则 OB 为塑性变形，BC 为弹性变形。假设卸载过程为缓慢卸载且损伤变量不发生变化，则卸载曲线 AB 为直线。此时，直线的斜率为系统刚度 $K(t)$；三角形 ABC 的面积 S_{ABC} 为卸载前岩石试件内储存的弹性变形能 $U^e(t)$，在物理元胞机中，$U^e(t)$ 即为 t 时步结束时系统内储存的全部广义能量。因此，可将 t 时刻的加载力 $F(t)$ 表示为

$$F(t)=\sqrt{2K(t)U^e(t)} \tag{7-10}$$

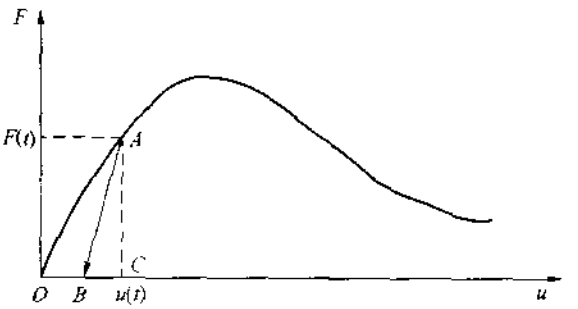


图 7-22　力-变形曲线

下面计算每个时步的变形 $u(t)$。如图 7-23 所示，A、B 分别对应于系统在 t 和 $t+1$ 时步的力与变形状态，将曲线段 AB 简化成直线段，则梯形 $ABDC$ 的面积为 $t+1$ 时步内外力所做的功。其在数值上等于 $t+1$ 时步向系统输入的广义能量 $\Delta U(t+1)$，即

$$\Delta U(t+1)=\frac{F(t+1)+F(t)}{2}\left[u(t+1)-u(t)\right] \tag{7-11}$$

所以

$$u(t+1)=u(t)+\frac{2\Delta U(t)}{F(t)+F(t+1)} \tag{7-12}$$

根据式（7-11）和式（7-12），即可求得每个时步的当量力与当量变形，从而得到单轴拉（压）条件下的力-变形曲线。

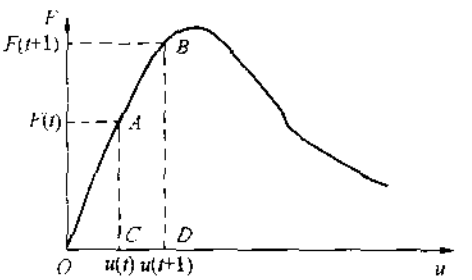


图 7-23　位移计算示意图

上述分析只是根据岩石试件受力后力-变形关系的实际特点和能量守恒原理进行的合理简化，并没有改变物理元胞自动机的构

成规则。

7.3 细观非均质岩石破坏演化的 PCA 模拟

7.3.1 煤岩受力－变形模拟

模拟条件如下：

（1）元胞矩阵为 50×50。

（2）被模拟岩石的初始强度不均匀，在初始时刻，破裂阈值（即强度）为 1，2，3 和 4 的元胞数量各占 25%。

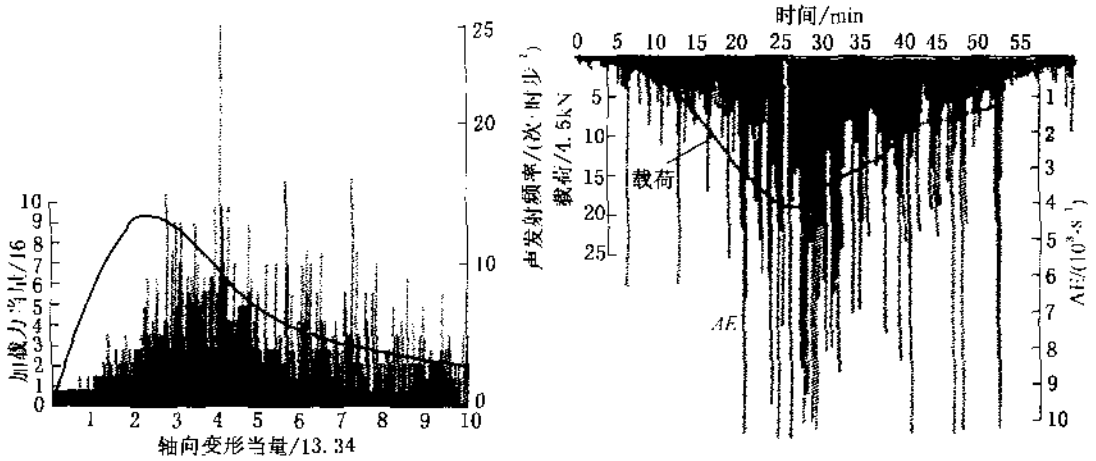
（3）所有元胞每破坏一次所耗散的系统广义能量为 1。

（4）被模拟岩石为各向同性体，即每个元胞破坏后向四周传递能量的概率相等。

（5）系统内的初始广义能量为 0，即被模拟岩石内无初始应力。

（6）加载方式通过每时步向系统输入 1 个能量粒子来体现。

在上述条件下，物理元胞自动机程序运行 11000 步，得到的力－变形－声发射曲线如图 7－24a 所示，其结果与大部分不均质岩石的应力－应变－声发射率试验结果类似；图 7－24b 所示为煤的声发射试验结果[12]。由图 7－24a、图 7－24b 可以看出，若适当调整坐标比例，两者的声发射曲线在宏观变化趋势上也非常相似；同时，PCA 对力－变形曲线的模拟也达到了相当逼真的程度。为了消除偶然性，在上述相同条件下又进行了三次模拟试验，均得到与图 7－24a 相一致的结果。



(a)物理元胞自动机的模拟结果　　(b)煤的应力-应变-声发射试验结果

图 7－24　不均质岩体声发射模拟结果与试验结果对比

在其他条件下进行的一系列模拟试验的结果表明：赋予 PCA 不同的初始条件，可以非常逼真地模拟出不同性质的岩石在单轴拉（压）条件下的不同力学行为。同时还发现“岩石”的破坏行为和声发射特性受元胞初始均质程度和能量耗散系数的影响很大，初始系统越不均质，元胞破坏后的能量耗散系数越大，被模拟岩石的破坏行为越易呈现塑性特

征；反之，其脆性特征越明显。

7.3.2 岩石非均质性模拟

从物理意义上讲，像岩石等材料在细观层次上的非均质性是指各颗粒强度等物理力学性质存在差异。在 PCA 中用各元胞初始破裂能量阈值的不同来等效体现材料细观层次上的非均质性。若设置 1，2，3，4 为 4 种元胞破裂能量的阈值，很显然，含有 4 种破裂能量阈值的元胞系统的非均质性，将大于系统仅含有三种、两种或一种破裂能量阈值的元胞系统的非均质性。换言之，含有 4 种破裂能量阈值的元胞系统的非均质程度最大，而仅含有一种破裂能量阈值的元胞系统的非均质程度最小。在含破裂能量阈值种数既定的元胞系统中，含各能量阈值的元胞数比例差别越小，则越不均匀。例如，含有 4 种破裂能量阈值的元胞系统中，$P(1)=P(2)=P(3)\approx P(4)=25\%$ 的非均质性，将大于 $P(1)=P(2)=5\%$，$P(3)=P(4)=40\%$ 的非均质程度。按照上述对非均质性描述的物理意义，根据文献[25]试验条件，对应于三种不同均匀程度的岩石条件如图 7-25 所示。经分析表明，PCA 所模拟的非均质性比例为：

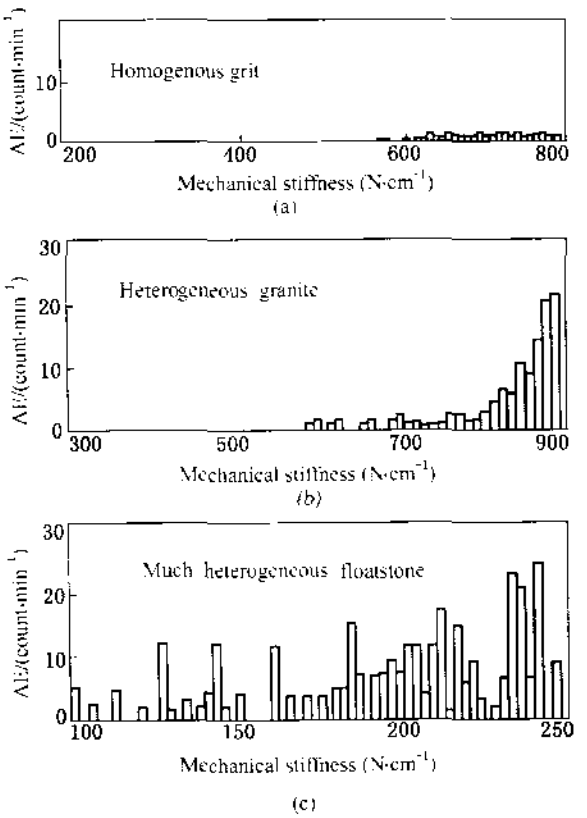


图 7-25 不同均质度岩体的声发射试验结果[30]

（1）较均匀型。各元胞的能量为 1，2，3，4 的比例为 0，0，80%，20%。

（2）较不均匀型。各元胞的能量为 1，2，3，4 的比例为 0，15%，65%，20%。

（3）极不均匀型。各元胞的能量为 1，2，3，4 的比例为 15%，35%，30%，20%。

根据上述 PCA 模拟准则，得到的元胞系统破裂声发射率序列如图 7－26 所示。从图7－26 可以看出，模拟声发射率序列无论在变化趋势上，还是在量值大小上，都与文献［30］中的试验结果（图 7－25）极为相似，这说明用 PCA 模型可对岩石等细观非均质材料的受力破坏演化特征进行有效的模拟。

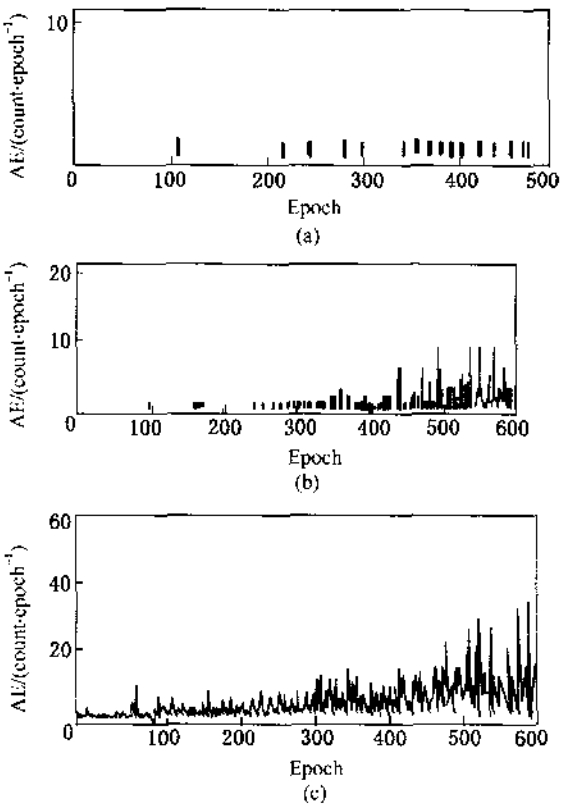


图 7－26　PCA 对不同均质度岩石 AE 的模拟结果

7.3.3　对循环加载的模拟[11]

如图 7－27 所示，岩石在循环加载条件下具有以下典型的特点：

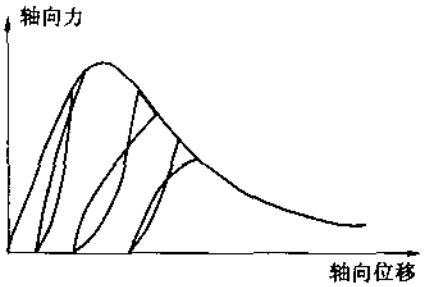


图 7－27　典型试验曲线

（1）在超过屈服点后卸载，将出现不可恢复的塑性变形。

（2）在峰值后区，当位移继续增长时，总位移中不可恢复的部分增加。

（3）卸载－加载过程中，力与变形的对应关系不是唯一的。

（4）岩石表观弹性模量随试件峰值后的变形和渐进破坏而减小。

为了验证物理元胞自动机模型能否再呈现上述特点，利用物理元胞自动机程序进行了如

下模拟：

（1）元胞矩阵为 50×50。

（2）被模拟岩石的初始强度均匀，在初始时刻，全部元胞的破裂阈值（即强度）均为 4。

（3）所有元胞每破坏一次所耗散的系统广义能量为 1。

（4）被模拟岩石为各向同性体，即每个元胞破坏后向四周传递能量的概率相等。

（5）系统内的初始广义能量为 0，即被模拟岩石内无初始应力。

（6）加载方式通过每时步向系统输入一个能量粒子来体现。

在上述条件下，用物理元胞自动机 PCA 方法模拟 27000 时步，其中：

（1）第一次卸载 5600～9169 时步，共卸载总储存能量的 100%。

（2）第二次卸载 14600～16481 时步，共卸载总储存能量的 80%。

（3）第三次卸载 21500～22633 时步，共卸载总储存能量的 80%。

（4）其他时步为加载时步。

图 7-28 所示为 PCA 模拟得到的轴向力-轴向变形曲线。与试验结果对比可见，物理元胞自动机真实地反映了实际岩石在循环加载条件下力与变形间的主要典型特征。由于 PCA 将卸载过程简化为线性关系，故没有反映出加载-卸载闭环，但仍反映出了加载和卸载过程中力与变形间的非单值对应关系。因此，PCA 仍不失为一种客观描述岩石的力与变形关系的宏观广义模型。

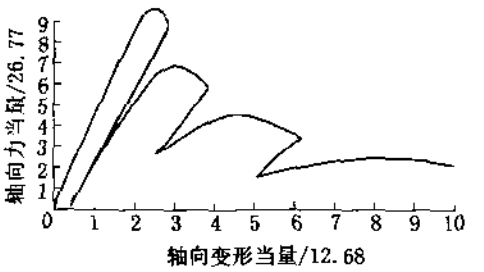


图 7-28 由 PCA 得到的模拟曲线

7.3.4 不同岩石破坏声发射模式的模拟[11]

文献［12］通过对各种脆性岩石材料的破裂试验，发现了其声发射模式的三种基本类型：主震-后震型、前震-主震-后震型和群震型，如图 7-29 所示，并且认为出现这些不同的声发射模式与岩石的均质程度密切相关。即第一种基本类型出现在均质性较好的岩石中，第二种基本类型出现在介于均质与非均质之间的岩石中，第三种基本类型出现在不均质岩石中。利用物理元胞自动机程序对不同初始均质度岩石的声发射规律进行了如下模拟验证。

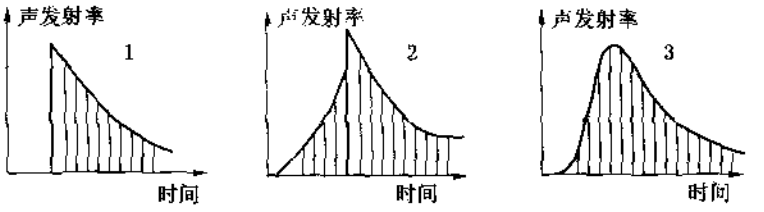


图 7-29 岩石声发射模式的三种基本类型

初始均质度：均质岩石在初始状态时强度为 1，2，3 和 4 的元胞比例分别为 0，0，0 和 1；较均质岩石在初始状态时强度为 1，2，3 和 4 的元胞比例分别为 0.1，0.2，0.3 和

0.4；不均质岩石在初始状态时强度为1、2、3和4的元胞比例均为0.25。

计算条件如下：

（1）元胞矩阵为50×50。

（2）强度为3和4的元胞的能量耗散系数为1，其他元胞的能量耗散系数为0。

（3）被模拟岩石为各向同性体，即每个元胞破坏后向四周传递能量的概率相等。

（4）系统内的初始广义能量为0。

（5）加载方式通过每时步向系统输入一个广义能量粒子来体现。

在上述条件下进行模拟，得到三种类型的声发射模式如图7-30所示。可见，若消除坐标比例的影响，可以认为图7-30中声发射曲线演化规律在宏观上与图7-29所示的三种模式是一致的。因此，利用物理元胞自动机完全可以逼真地再现实际岩石的不同声发射规律。另外，岩石的脆性程度可由力-变形曲线来定性地判定：力-变形曲线在破坏后区下降越迅速，岩石的脆性越强；反之，其脆性越弱。PCA非常客观地反映了岩石的脆性与其均质程度的关系，如图7-30所示，均质坚硬岩石的脆性最强，较均质岩石的脆性次之，不均质岩石的脆性最弱。这一结论与文献［13］中的试验结果完全一致，这又从另一个侧面说明了物理元胞自动机对岩石破坏演化模拟的有效性。

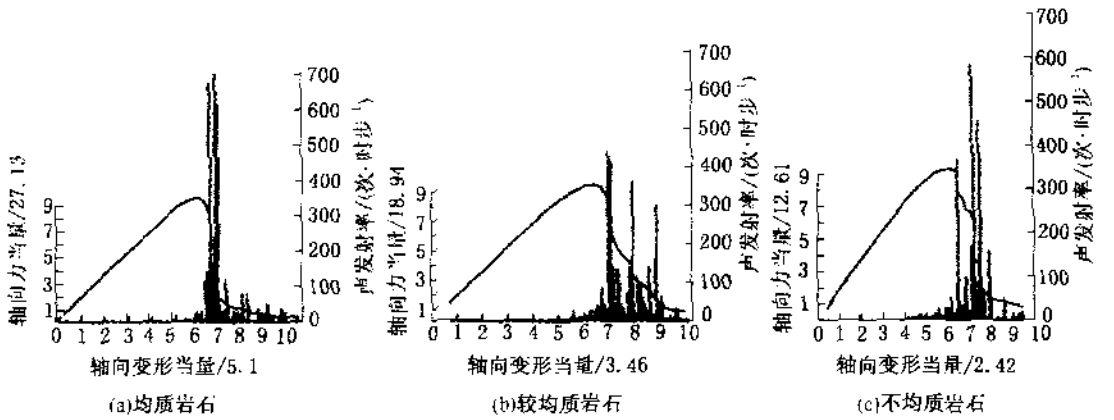


图7-30　物理元胞自动机对不同声发射模式的模拟

7.3.5　裂纹尖端破坏区形态的模拟[11]

采用PCA方法模拟裂纹尖端破坏形态的算法如下：

（1）元胞矩阵为50×50，内有一条初始裂纹。

（2）被模拟岩石的初始强度均匀，在初始时刻，裂纹影响域内元胞的破裂阈值（即强度）为1，其他元胞的破裂阈值为4。

（3）所有元胞每破坏一次所耗散的系统广义能量为1。

（4）被模拟岩石为各向同性体，即每个元胞破坏后向四周传递能量的概率相等。

（5）系统内的初始广义能量为0，即被模拟岩石内无初始应力。

（6）加载方式通过每时步向系统输入一个能量粒子来体现。

图7-31所示为系统在不同时步的演化形态。图7-31中的深黑色区域为完全破坏

区；圆圈的圆心表示某时步的破坏中心，半径表示该时步声发射率的大小。图 7－32 所示为由经典弹塑性理论得到的裂纹尖端塑性区的理论形态图。

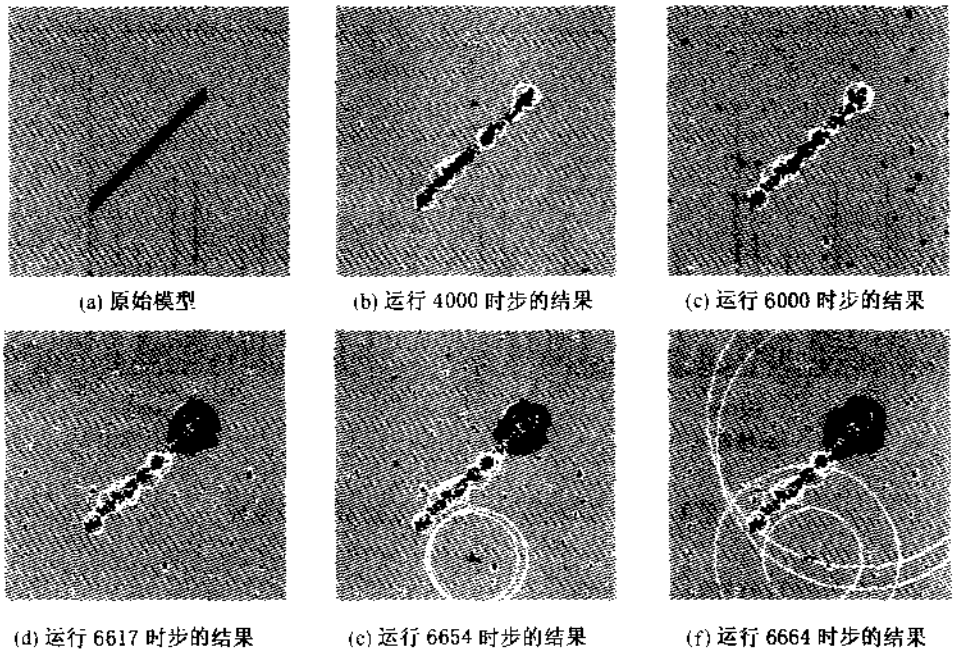


图 7－31　裂纹尖端破坏区形状演化的 PCA 模拟结果（图中圆圈大小代表释放能量的大小）

从图 7－31 和图 7－32 可以看出：裂纹尖端破坏区形状的物理元胞自动机（PCA）模拟结果与弹塑性理论结果虽然在实际尺寸上不存在对应关系，但其形态却是相似的。因此，尽管物理元胞自动机对岩体裂纹尖端破坏区演化的某些机理尚不能完全解释，但 PCA 对岩石破坏的模拟在细观上与经典弹塑性理论结果却具有很大的一致性，因此，PCA 将有希望成为一种模拟岩石裂纹扩展的有效方法。

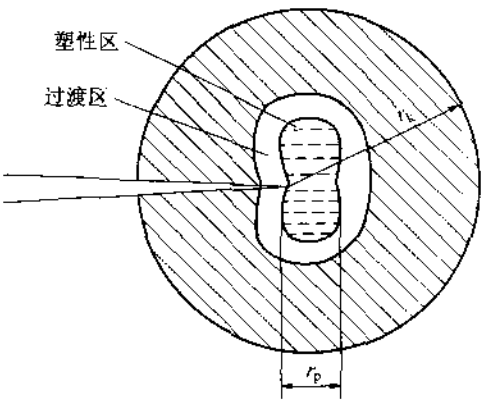


图 7－32　裂纹尖端塑性区的理论形态图

7.3.6　岩石破坏过程 AE 混沌性

1. 岩石均质性与混沌性关系

为考察不同均质性对岩石破坏过程中 AE 混沌性的影响，构造了两种不同的岩石材料。

模型 A（均质）：$P_A(1)=0, P_A(2)=0, P_A(3)=1, P_A(4)=0$；

模型 B（不均质）：$P_B(1)=0.15, P_B(2)=0.25, P_B(3)=0.4, P_B(4)=0.1$。

两个模型均划分为 50×50 元胞，加载方式按关系式 $C(t)=2+0.01t$ 向系统输入能量，分别运行 300 时步，用 PCA 模拟得到的声发射序列如图 7－33 所示。从图 7－33 可

以看出，岩石越不均匀，破坏过程中声发射 AE 混沌性越强，其中计算 Lyapunov 指数最大值分别为 $LE_1(A)=0.45$，$LE_1(B)=0.623$。因此，不均质岩石比均质岩石破坏演化过程预测的难度更大。

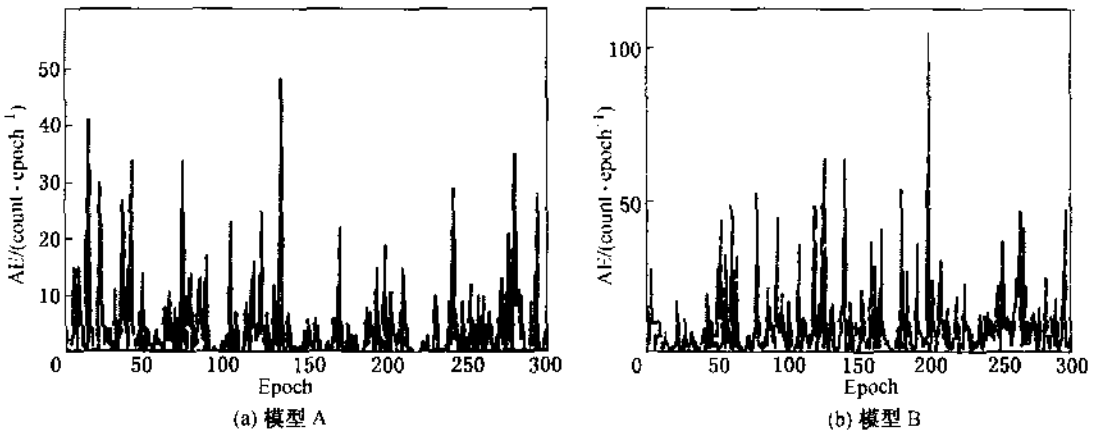


图 7－33　两种不同均质度岩石的 AE 模拟结果

2. 含有主裂纹岩石破坏的混沌性

对不均质岩石模型 B 设置一条裂纹，加载方式和模拟时步同上。当模拟达到 300 时步时，裂纹尖端损伤演化区呈现出泡状或鹅卵石形。

在裂纹尖端破裂演化过程中，AE 能量序列如图 7－34 所示，最大 Lyapunov 指数为 0.0194。从图 7－34 可以看出：由于主裂纹的存在，岩石破坏主要集中在裂纹尖端处，裂纹起到了吸引域的作用，这样使得岩石的破坏演化有序性增强、无序性减弱、混沌程度降低、可预测性增强。这也正是含有明显结构面岩体失稳更易预报的原因；同时，这对岩石力学工程混沌控制具有重要意义。

7.3.7　岩石弹－脆－塑性性质的 PCA 模拟[24]

如前所述，为了反映岩石在破坏过程中的能量损失，物理元胞自动机模型引入了元胞能量耗散系数的概念。下面利用物理元胞自动机来分析元胞能量耗散系数与岩石弹－脆－

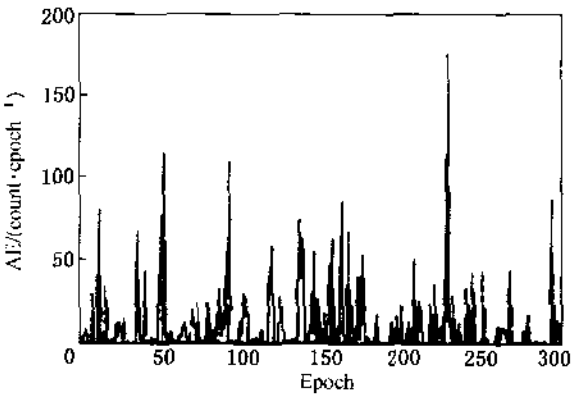


图 7－34　含裂纹岩石破坏 AE 曲线

塑性性质之间的关系。

模拟条件如下：

（1）系统初始均质度为 $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0.25$。

（2）能量输入方式函数为 $\Delta U(t)=5$（t 为模拟时步）。

（3）系统在初始状态无广义能量。

（4）模型Ⅰ——所有元胞的能量耗散系数均为0；模型Ⅱ——破裂阈值（或“强度”）为3和4的元胞的能量耗散系数为1，其他元胞的能量耗散系数为0；模型Ⅲ——所有元胞的能量耗散系数均为1。

从整体系统来看，三个模型的能量耗散系数由大到小的排列顺序为：模型Ⅲ > 模型Ⅱ > 模型Ⅰ。利用物理元胞自动机程序对以上三种条件进行模拟，得到三个模型的“荷载－变形－声发射率”的对应曲线，如图7－35所示。

从图7－35可以看出：

（1）在模型Ⅰ（无能量耗散）的理想条件下，系统会在某一时刻突然发生整体“失稳”，这是脆性岩石破坏时所具有的典型特征。从力与变形（$F-u$）曲线上可以看出，荷载在某一时步突然呈直线的趋势下降。因此，无能量耗散的PCA模型描述了理想“弹－脆性”岩石的力学行为。当然，“弹－脆性”模型只是一种非常理想化的力学模型，它可以作为对强脆性岩石力学模型的一种简化。

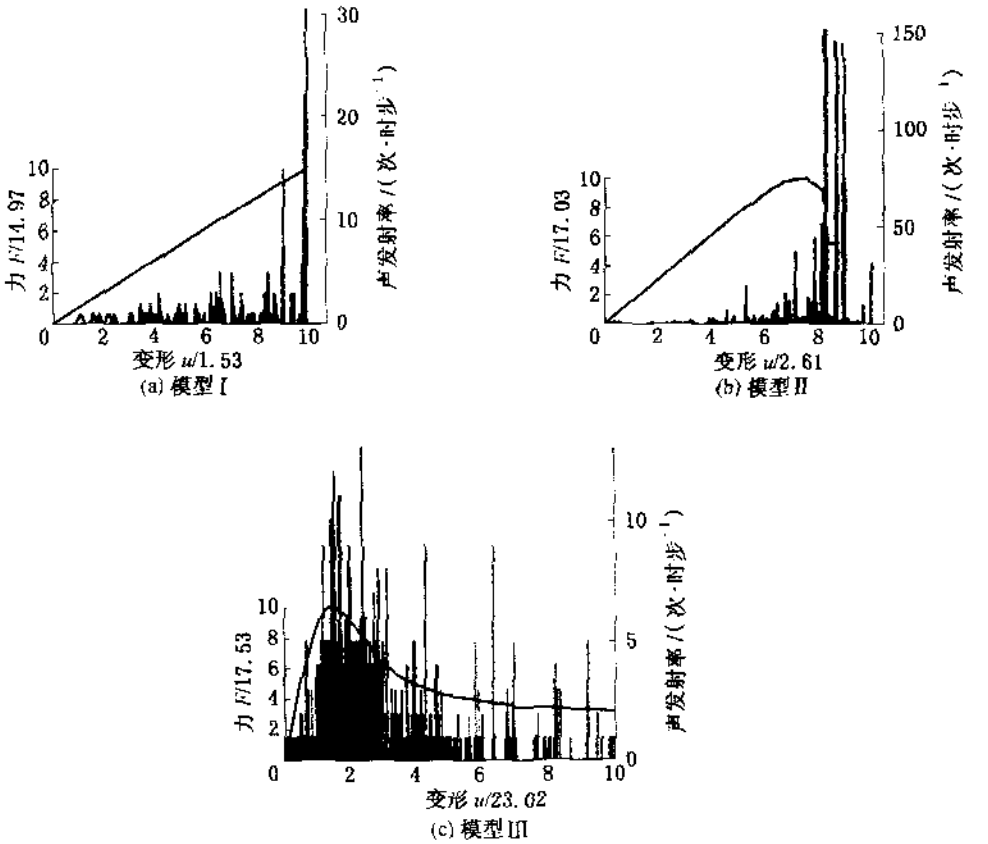


图7－35　能量耗散对岩石弹－脆－塑性的影响

（2）在模型Ⅱ条件下，岩石在第439时步发生主破坏，但此时整个系统并没有完全失稳，而是又经过了一系列的微破坏演化以后才走向“崩溃”。从发生主破坏到系统完全失稳虽然历时很短，且系统的破坏也呈现出一定程度的突发性，但与模型Ⅰ不同，模型Ⅱ的弹性极限与其强度峰值不重合，且在破坏前区和破坏后区均产生了一定的塑性变形。因此可以认为，模型Ⅱ的脆性程度比模型Ⅰ要弱，破坏前的塑性性质增强。

（3）在模型Ⅲ条件下，岩石的破坏行为在时间上未发生突发性现象，在空间上不存在明显的主破坏区域，在 $F-u$ 曲线的破坏前区和破坏后区均产生了明显的塑性变形。因此，在三个模型中模型Ⅲ的脆性程度最弱，呈现典型的塑性破坏特征。

通过上述模拟分析可知，岩石局部破坏的能量耗散现象是岩石的一种固有属性，而物理元胞自动机中的能量耗散系数在微观上描述了岩石微单元破坏时释放弹性变形能的能力（从相反的角度也可以表示为岩石微单元破坏时储存弹性变形能的能力）。岩石的耗散系数越小，其微单元破坏时释放的弹性变形能就越少，岩石内剩余的能量就越多。这一性质在宏观上造成了整个岩石系统的能量储存速率增大，从而能量的积累迅速达到系统的失稳条件，系统会突然发生大规模的破坏。由于在破坏过程中，系统耗散的弹性变形能很少，且同时系统由于破坏而储存能量的能力降低，故破坏行为会迅速发展下去，岩石内的应力迅速下降，从而导致岩石的破坏行为呈现出明显的“弹－脆性”特征；反之，岩石的能量耗散系数越大，其破坏时就越易呈现出塑性特征。这就是能量耗散系数对岩石弹－脆－塑性影响的细观机制。因此，能量耗散是决定不同岩石本构关系的关键因素，可以视其为对岩石弹－脆－塑性性质的一种微观量度。

另外，文献[15]中提出了材料的非均质性决定岩石的弹－脆－塑性的观点。周辉[11]利用物理元胞自动机，通过大量的模拟实例发现，岩石微单元的非均质性对岩石的弹－脆－塑性程度也有一定的影响，但这种影响不是决定性的，而能量耗散系数才是决定岩石弹－脆－塑性的关键因素。但岩石微单元强度的初始均匀程度决定了整个“岩石试件”极限强度的大小，即在初始状态，岩石强度的均值越大，相应岩石试件的极限强度就越大；反之，岩石试件的极限强度就越小。

7.4 非均质岩石破坏演化的自组织临界性PCA模拟

如前所述，在物理元胞自动机中，对材料非均质的模拟是通过赋予元胞不同的广义极限能量来表达非均质的程度，这样面临两个问题：第一，如何确定广义极限能量在数值上的非均匀分布规律；第二，如何将这些不同广义极限能量数值投放到各个元胞中。许多研究表明，材料非均质度的分布可以服从韦布尔（Weibull）分布、正态分布及其他相关分布[15-17]。马志涛、谭云亮[16,28,29]假定岩石非均质性服从韦布尔（Weibull）分布，采用PCA方法来模拟非均质岩石破坏演化的自组织临界性，称之为Mh－PCA模型。

7.4.1 材料的非均质性的统计分布

对于材料的非均质性，仍然假设材料的强度服从韦布尔分布。其概率密度函数为

$$\varphi(u)=\frac{m}{u_0}\left(\frac{u}{u_0}\right)^{m-1}e^{-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m}$$

这样可进一步考察不同均质度所体现材料的粗糙性。

图 7－36 所示为单元数为 100×50，参数 $u_0=4$ 时，不同的 m 取值对材料均匀性的影响计算机模拟示意图。从图 7－36 可以看出，m 值越小，材料越粗糙。

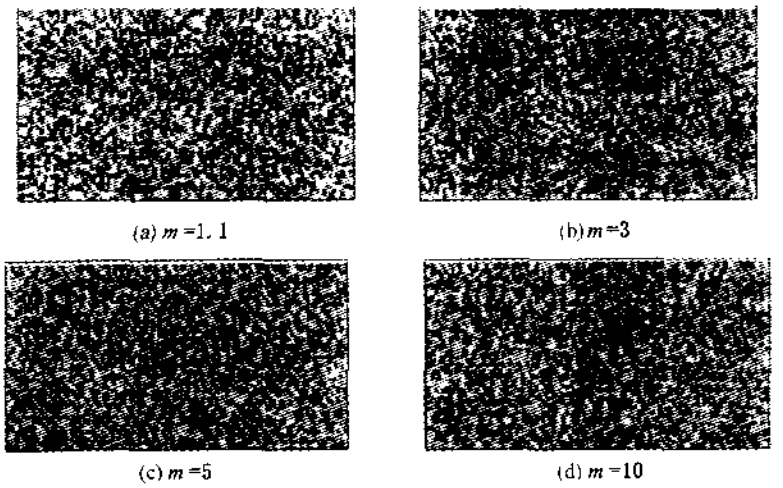


图 7－36　不同参数 m 对材料均质度影响

图 7－37 所示为相对应的不同强度单元个数统计图，横坐标表示单元强度的取值范围，纵坐标表示不同强度单元的个数，总个数为 100×50 个。从图 7－37 可以看出，m 的值越大，单元强度分布越集中。

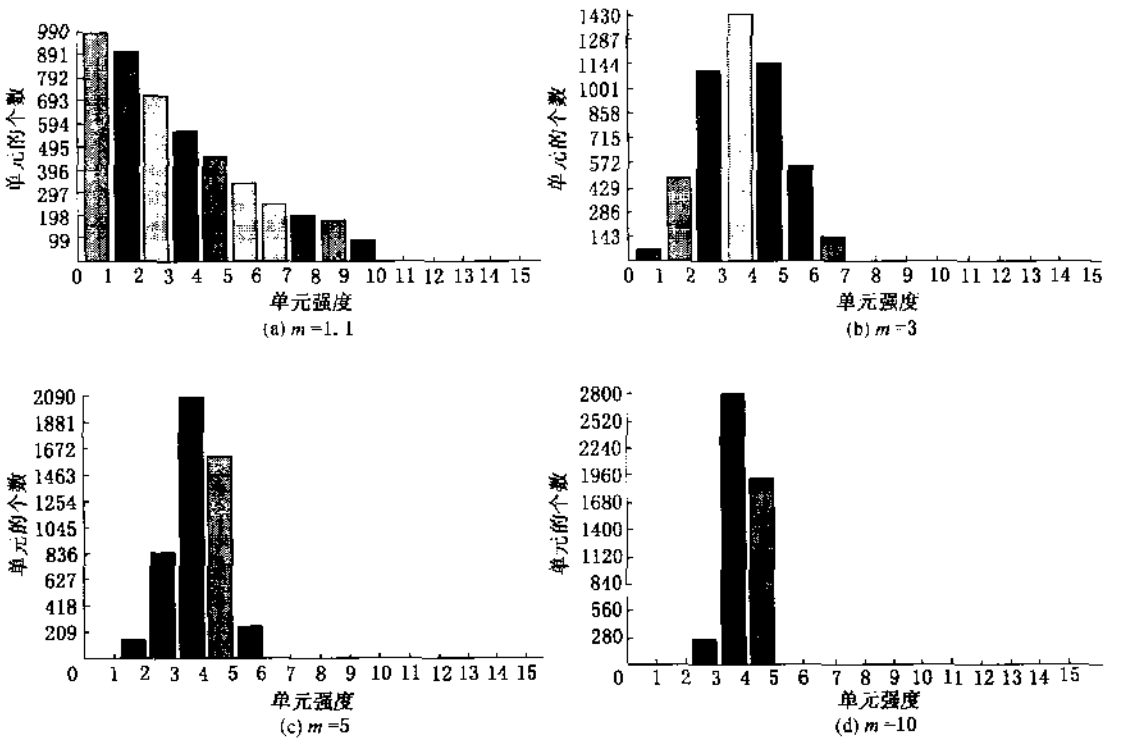


图 7－37　不同强度单元个数统计图

7.4.2 材料各向异性的表达

Mh－PCA 采用摩尔型邻居，如图 7－38 所示，主元胞破裂后要向周围的 8 个邻居元胞传递能量。设 $w(j, i)$ 为主元胞 i 与周围邻居元胞 $j(j=1, 2, \cdots, 8)$ 的连接权系数，且 $w(j,i)$ 满足关系：

$$\sum_{j=1}^{8} w(j,i) = 1 \tag{7-13}$$

则元胞 i 向周围元胞传递的能量可以表示为

$$E_{t+1}(j) = E_t(j) + w(j,i)\Delta E \tag{7-14}$$

式中 $E_{t+1}(j)$ ——邻居元胞 j 在 $t+1$ 时步所获得的能量；

$E_t(j)$ ——元胞在 t 时步所具有的能量；

ΔE ——主元胞 i 所释放的能量。

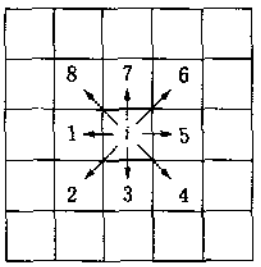


图 7－38 摩尔型

若 $w(j, i)$ 的取值各不相同，则传给各个邻居元胞的能量也不相同，表明各方向传递能量的能力是不同的，从而，表明材料是各向异性的；若 $w(j, i)$ 取值相同，则表明材料各向同性。例如，对 Moore 型邻居可取 $w(j, i)=0.125(j=1, 2, \cdots, 8)$；若 $w(j, i)=0$，则表明元胞间没有联系，不进行能量传递。连接权系数 $w(j,i)$ 的引进使模型具有一定的普适性。

7.4.3 不同均质度岩石声发射的模拟

模拟条件如下：

（1）设元胞单元的个数为 50×50。

（2）单元的初始应力为服从［0，1］的均匀随机分布，以体现材料初始应力的非均匀性。

（3）材料破裂强度。假设材料的极限强度服从两参数为 m 和 u_0 的韦布尔随机分布，m 表示材料的均质度，m 值越大材料的均匀性越好；u_0 表示材料强度均值。在本模型中分别对 5 种不同材料（$m=1$，3，5，10，15 和 20，$u_0=2$）进行模拟。

（4）设被模拟岩石为各向同性体，即元胞破裂后以相等的概率向相邻的 8 个元胞传递能量。

（5）加载方式为每时步向各元胞单元输入 $\varepsilon(x_i, y_i)=0.05\mathrm{rnd}$ 的能量，其中 rnd 表示［0，1］间的随机分布，以体现微单元应力积累的非均匀性。

在上述模拟条件下，利用细观非均质物理元胞自动机模型，分别对各种不同均质度岩石破坏过程的声发射模式进行模拟，得到的结果如图 7－39 所示。

从图 7－39 可以看出，当 $m=1$ 时，材料极不均匀，破裂过程的声发射较为平静，没有集中现象；随着 m 值的增大，材料的均质度也逐渐增大，材料在发生主破裂时的声发射数也较为集中，主破裂发生前的破裂个数逐渐减少。究其原因，均质性较好的材料其内部微单元强度较为接近，它们集中在主破裂发生的时间内破裂，因此会产生较为集中的声发射现象，且没有明显的前兆。而均质度较差的材料，内部单元强度分布较为分散，各单元由于相邻单元的破坏而相继发生破坏，因此不会在短时间内发生大量的破裂，且声发射现象保持相对较为平静的状态，如图 7－39a 所示。另外，当 m 为 10、15 和 20 时，声发射模式较为相似，原因是它们的微元强度分布变化不大；当 m 为 1、3 和 5 时，声发射模

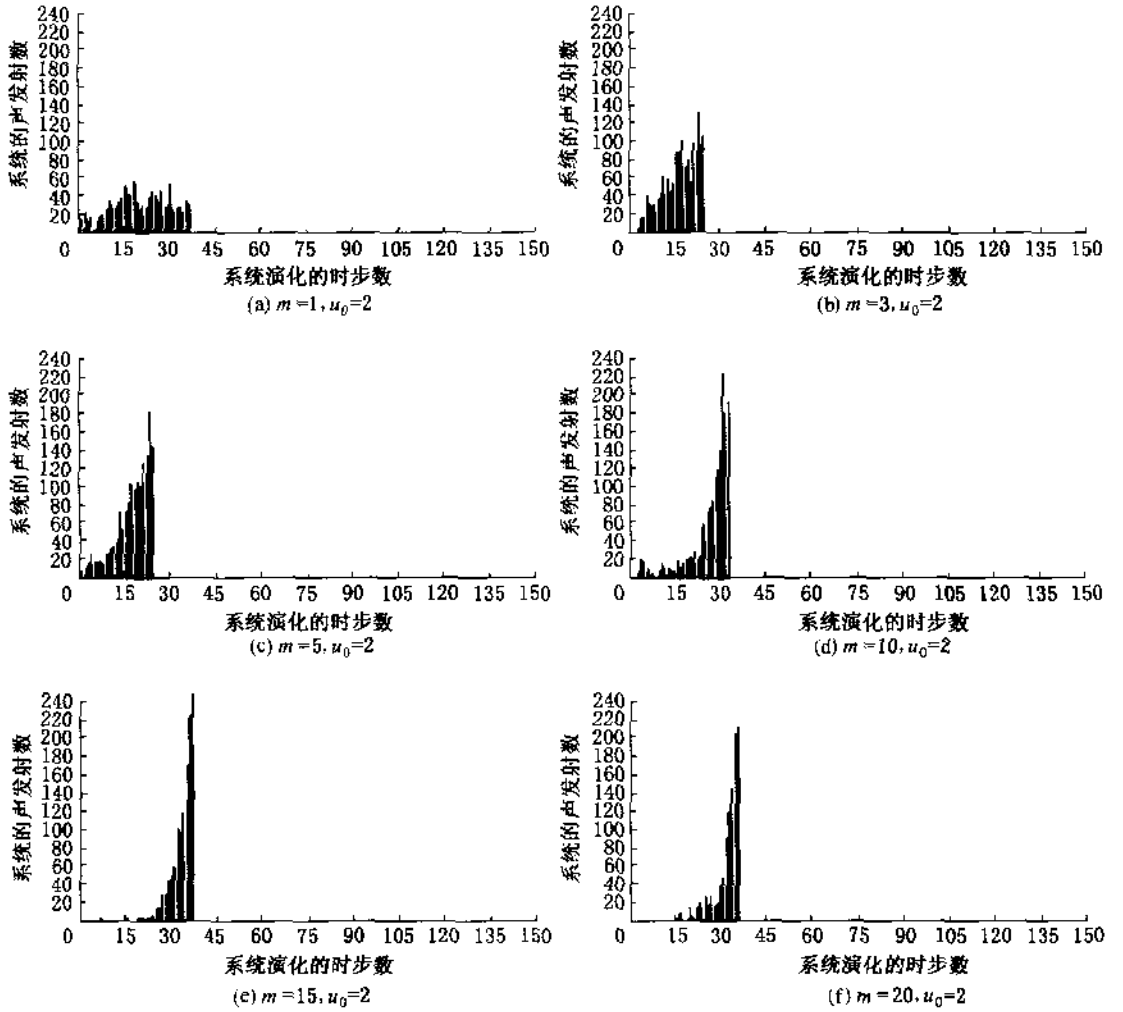


图 7-39　不同均质度材料声发射模拟

式差别较大，原因是它们的微元强度分布变化较大。各种 m 下的强度分布如图 7-40 所示。

由以上模拟可知，细观非均质物理元胞自动机对不同均质度岩石的声发射模式的模拟与前面所讲的基本相一致，这说明模拟结果与已有理论相符。

7.4.4　不同均质度岩石破裂过程的模拟

为了模拟不同均质度对岩石破坏行为的影响，将采用如下模型对不同均质度岩石材料的破坏模式进行模拟。

模拟条件如下：

（1）元胞数列为 50×50。

（2）模拟材料。设材料的微元强度服从韦布尔（Weibull）分布，取 $u_0=2$，m 分别为 1.1，3，10 和 15 等 4 种不同强度材料进行模拟。

（3）加载方式。为每时步向每个元胞输入 0.05rnd 的能量，其中 rnd 为［0，1］的随

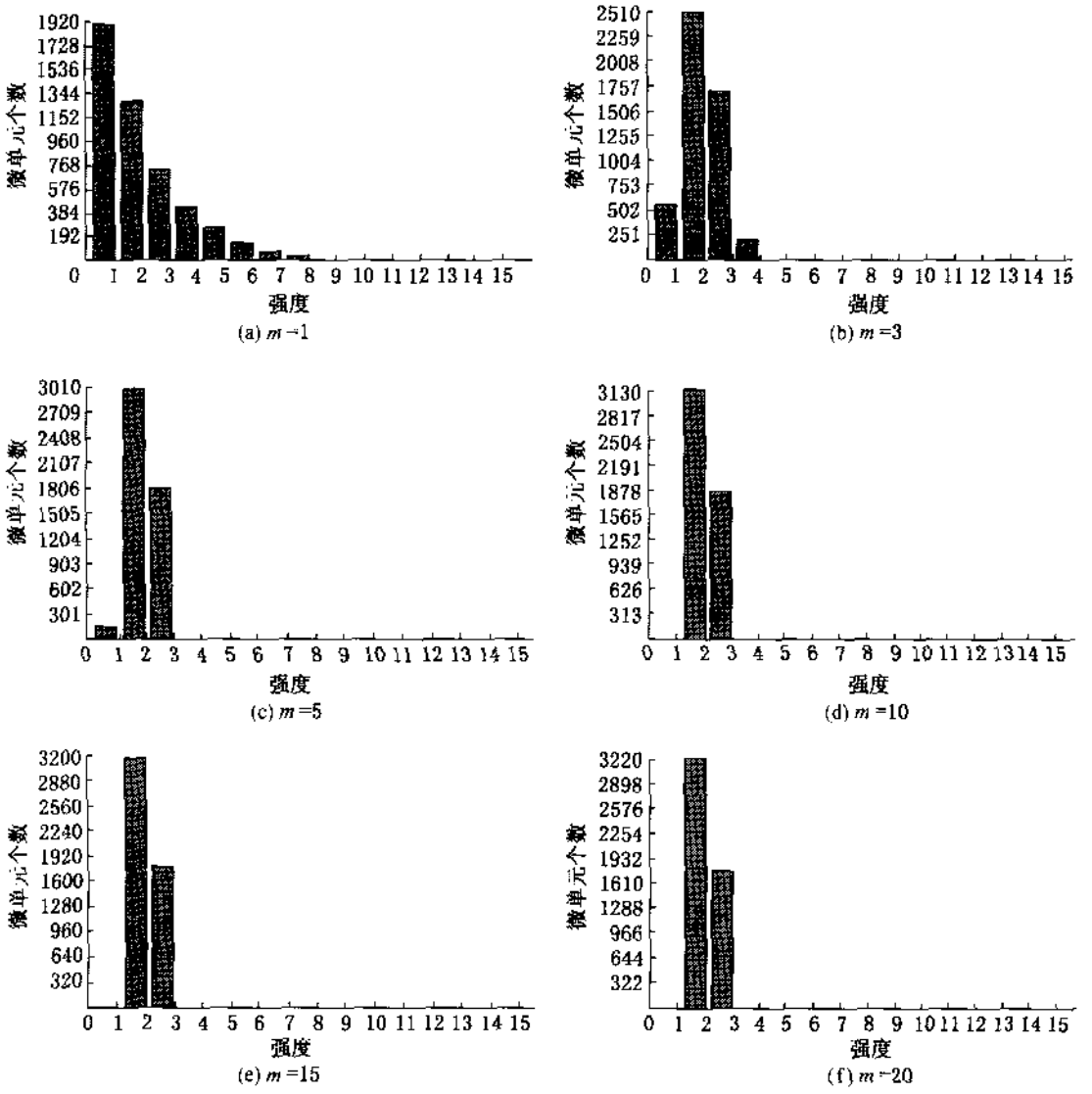


图 7-40 $u_0=2$ 时不同 m 的强度分布

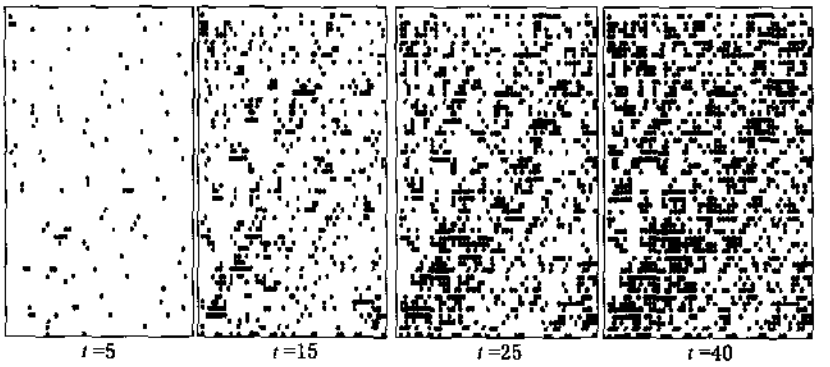
机分布。

(4) 初始应力。设材料各单元的初始应力为 [0, 1] 的均匀随机分布。

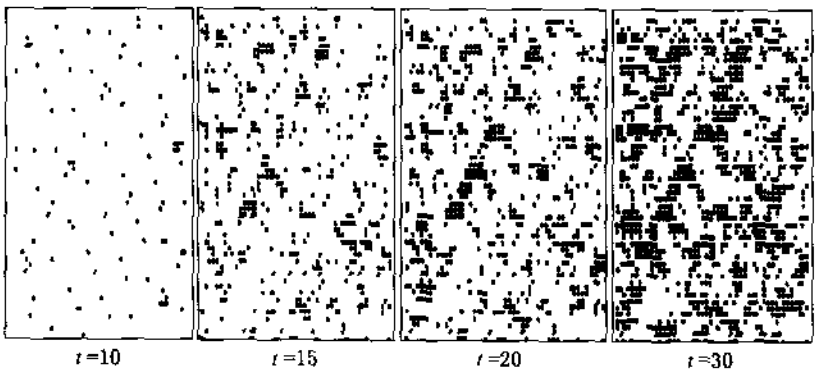
(5) 设材料单元破裂后释放的能量以等概率随机向周围 8 个邻居元胞传递。

模拟结果如图 7-41 所示。

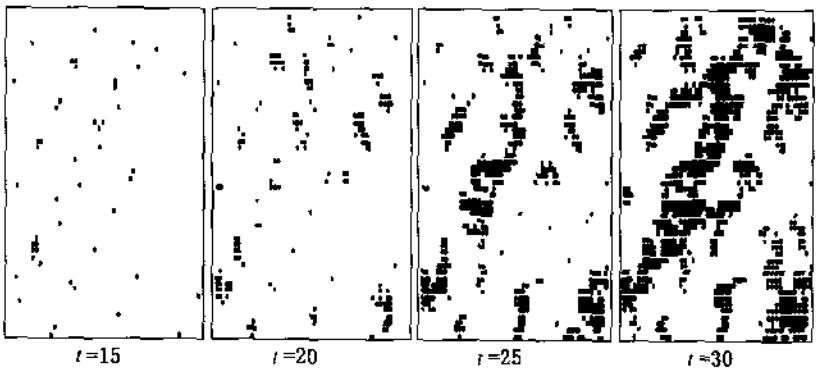
从图 7-41 可以看出：均质度对岩石破坏行为有显著的影响，对于均质度较高的材料，在主破裂产生前，破坏单元的个数较少，主破裂产生的宏观裂纹分支也较少，且分布比较集中；随着均质度的降低，主破裂产生前，破坏单元数较多，其分布也表现出随机、无序的特点，且分支较多，分布不集中。岩石材料破坏的共同点是，随着应力的增加，岩石的破坏首先表现为裂纹等微观缺陷的产生，接着是裂纹集中，这主要是裂纹附近应力集中的缘故，最后表现为裂纹间的汇合贯通，即宏观破坏产生。



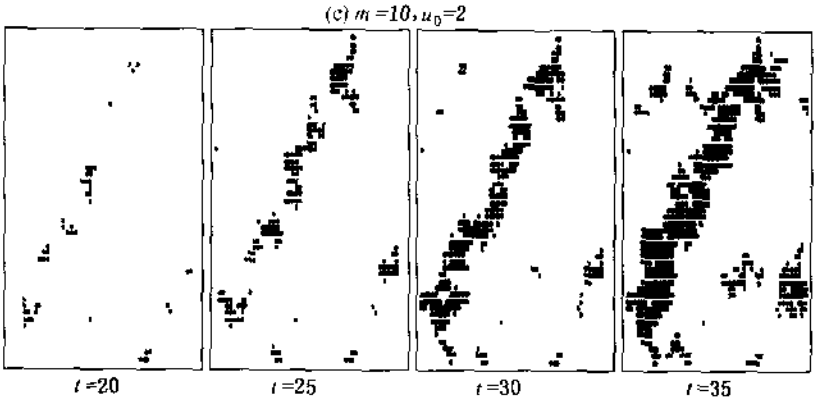
(a) $m=1.1$, $u_0=2$



(b) $m=3$, $u_0=2$



(c) $m=10$, $u_0=2$



(d) $m=15$, $u_0=2$

图 7-41　不同均质度材料破裂 Mh-PCA 模拟

7.4.5 岩石破裂自组织临界现象模拟

众所周知，岩石材料在一定的应力作用下，变形破裂过程表现出强烈的非线性特征，其中最明显的是岩石破坏的累进性。岩石的累进性破坏是指当荷载超过某一临界值时，破裂会突然由稳定阶段变为不稳定阶段，主要表现为岩石出现连锁式的发展，以及裂纹由随机分布向破裂面集中演化的现象。下面采用 Mh－PCA 模型对上述现象进行模拟。

模拟条件如下：

（1）元胞单元个数为 50×50。

（2）单元强度。采用 Weibull 随机分布，参数 m 取值为 15，u_0 值为 4。

（3）初始应力。设单元的初始应力为［0，1］间的均匀随机分布。

（4）加载方式。每个单元每时步输入的能量为［0，1/2］的均匀随机分布。

（5）演化规则。根据重正化群思想，设将相邻的 4 个单元看做一个大单元，在一定的应力下，如果有三四个单元发生破坏时，大单元才发生破坏。每个单元破坏后释放的能量等概率地传给周围的邻居元胞。

模拟结果如图 7－42 所示，演化过程的声发射现象如图 7－43 所示。

从图 7－42 和图 7－43 可以看出，当系统运行到 $t=108$ 时步时，单元破坏出现连锁式反应。即出现破坏的临界点，随后单元将发生瞬间集中式破坏，系统由分散的随机破坏变为宏观破坏，与理论分析相一致。

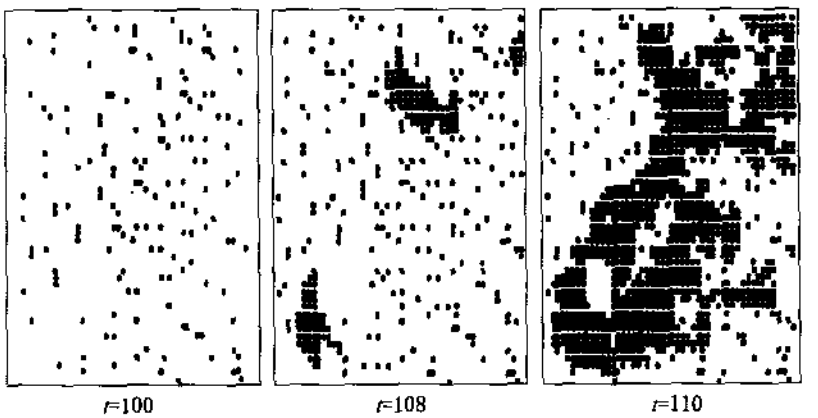


图 7－42　岩石破坏自组织临界模拟

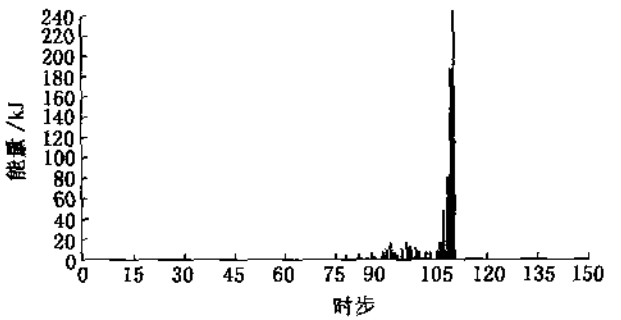


图 7－43　岩石自组织破坏临界现象声发射

7.5 岩石流变行为的 PCA 模拟

岩石流变行为的模拟是岩石力学数值模拟研究的一个焦点。在传统的岩石力学框架下，岩石的流变行为依赖于本构关系。对于微分型本构关系，其很难表达各类岩石的流变全过程；对于积分型本构关系，流变参数的测定成为瓶颈。因此，探讨新的岩石流变模拟方法非常必要。本节将介绍采用 PCA 方法模拟岩石流变行为的初步方法[26,27]。

7.5.1 岩石流变 PCA 描述方法

1. 宏观软弱区

设置宏观软弱区，在这个区域内的所有元胞能量能够急剧吸收，并且耗散缓慢，即该区域的元胞具有比较大的能量吸收率和比较小的能量耗散率。这样，就可以模拟岩石内裂纹应力集中直至破坏的动态过程。

2. 应变能表达式

应变能是根据内力（或应力）所做的实功来计算的，它的一般表达式为

$$U = \int \frac{1}{2}\varepsilon^T \sigma \mathrm{d}V \tag{7-15}$$

对于一般线弹性体，其应变能的表达式为

$$U = \int \frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon \mathrm{d}V \tag{7-16}$$

根据前面的论述，假定元胞具有的广义能量等效于岩石系统的弹性应变能。因此，输入初始能量（即施加恒定荷载）后，当元胞能量的吸收、耗散达到一个稳定状态时，依据应变能的一般表达式，则认为元胞处于一个稳定变形阶段，从“唯象”的角度看，则认为岩石达到稳定蠕变阶段。如果在某一时步之后，元胞能量发生突变，急剧增加，依据应变能的一般表达式，则认为岩石的应变加速增加，从而模拟岩石的加速蠕变过程。

3. 演化规则

首先为元胞 (x, y) 按照 Weibull 分布赋初始极限能量 $LMEN(x,y,0)$，然后以一定的比例因子在区间 $[0, \beta \times LMEN(x,y,0)]$ 上随机赋值，其中 β 为比例因子，以表征岩石初始应力的大小。这样，初始广义能量的确定就能够充分反映岩石的非均质性。在模型中，β 取值 20%。

关于 β 数值的确定，首先选定一个数值，例如 $\beta = 30\%$，然后运行程序，根据输出结果与已有的试验结论比较，修改 β 的数值，然后再次运行程序，直到选定的 β 数值使程序运行结果与试验结论基本吻合。

4. 加载方式

在物理元胞自动机（PCA）中，对加载方式的模拟是通过在每个时步向系统输入不同的广义能量粒子数 $C(t)$ 来实现的。输入的能量粒子数 $C(t)$ 越大，说明系统加载的应力越大。建立的模型仅在初始时刻为所有元胞输入能量 E = 常数，然后整个元胞系统进行能量的吸收和耗散，完成自身的动态演化，使能量在系统内部传递和耗散。

本文中输入能量的数值的选定方法与 β 数值的选定基本相同，只是输入的能量在一个范围内增加，模拟岩石的加载应力逐渐增加，从而得出在输入能量逐渐增加的过程中，元

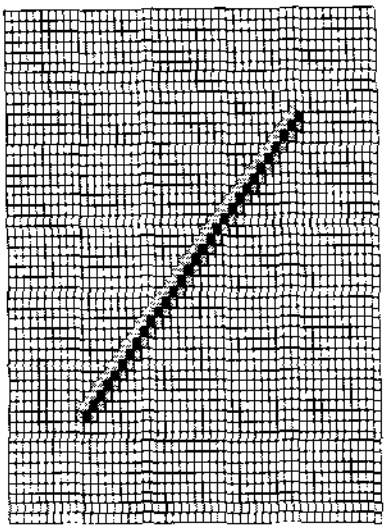


图 7-44 元胞自动机模拟岩石裂纹示意图

胞能量的动态演化结果。

5、岩石内裂纹

本模型主要通过在元胞系统中设置宏观软弱区来实现岩石裂纹的模拟。如图 7-44 所示，黑色元胞代表软弱区，灰色元胞代表能量吸引域。在宏观软弱区内，能量集聚，则岩石更容易破坏。试验和理论研究均表明，岩石内部的裂纹（或宏观软弱区）是导致岩石受力后弱化破坏的主要因素之一，岩石往往首先在裂纹处破坏。因此，宏观软弱区元胞的演化规则定义如下。

（1）假设软弱区内的元胞、能量吸引域内的元胞，以及其他元胞具有的能量吸收率分别为 R_{am}、R_{al} 和 R_{ap}，则必须满足条件：

$$R_{am} > R_{al} > R_{ap} \tag{7-17}$$

（2）假设软弱区内的元胞、能量吸引域内的元胞、以及其他元胞具有的能量耗散率分别为 R_{rm}、R_{rl} 和 R_{rp}，则必须满足条件：

$$R_{rm} < R_{rl} < R_{rp} \tag{7-18}$$

根据以上两个规则可知，该模型动态演化的过程就是软弱区内的元胞吸收能量多，耗散能量少，而远离软弱区的元胞能量的吸收和耗散都没有在软弱区内的大。这样，就比较逼近地模拟了岩石裂纹扩展的过程。

能量吸收率 R_a 和能量释放率 R_r 是为了模拟岩石的变形过程，而从能量角度提出的两个概念。根据前面的论述，元胞自动机只是从能量的角度模拟岩石系统复杂的动力学行为，但是，要精确计算出吸收和释放能量，或者确定元胞的广义能量与岩石系统的实际能量之间的关系，还需要更深一步地研究。所以，可以人为设定位于不同区域的元胞的能量吸收率 R_a 和能量释放率 R_r，然后通过对比模拟结果与试验结论，就可以定性地确定不同类型元胞的能量特性。

7.5.2 岩石流变变元胞自动机模拟算例

1. 稳定流变模拟

模型演化具体规则和参数如下：

（1）元胞矩阵为 50×50。

（2）岩石试件为非均质材料，对应元胞的均质度为 $m = 1.1$。

（3）初始极限能量 $LMEN(x, y, 0)$ 服从 Weibull 分布，参数分别为 $m = 1.1$，$x_0 = 100$；初始广义能量在 $[0, \beta LMEN(x, y, 0)]$ 上随机赋值，β 取值 20%。

（4）采用瞬时加载方式。加载后，为所有元胞系统输入定常数的能量粒子 E，以模拟单轴压缩岩石试件承受恒定荷载情况。本模型采用 $E = 0.1$。

（5）设置了一个宏观软弱区，因此，元胞的类型可以分为三类：一是“黑元胞”，即处于宏观软弱区的元胞；二是“灰元胞”，即处于宏观软弱区的能量吸引域内的元胞；三是“白元胞”，即普通元胞，除去前两者之外的元胞。这样，三类元胞构成 9 种邻居关系，每种邻居关系对应元胞不同的能量吸收率，应该根据所要模拟的系统确定数值。

表 7-2　不同元胞的能量吸收率

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	黑←黑	灰←灰	白←白	黑←灰	灰←黑	黑←白	白←黑	灰←白	白←灰
能量吸收率	0.005	0.005	0.05	0.05	0.004	0.1	0.003	0.1	0.002

本模型确定的不同元胞的能量吸收率见表 7-2，箭头指向吸收能量的元胞。表 7-2 第 5 列表示，如果能量吸引域的元胞的邻居元胞属于宏观软弱区，即“灰元胞”吸收“黑元胞”的能量，那么该“灰元胞”的能量吸收率为 0.004。

（6）当元胞的所有子元胞都破坏之后，即认为该元胞破坏，模拟步数为 50。

根据前面论述的基本模型规则以及非均质岩石在蠕变条件下的变形破坏规律，本模型模拟了非均质岩石发生衰减蠕变的动态过程，获得了元胞在模拟过程中发生的广义能量数值变化，选择了位置为（42，43）、（15，46）、（34，46）、（27，45）、（20，43）和（20，42）的元胞，绘制了能量变化曲线，如图 7-45 所示。

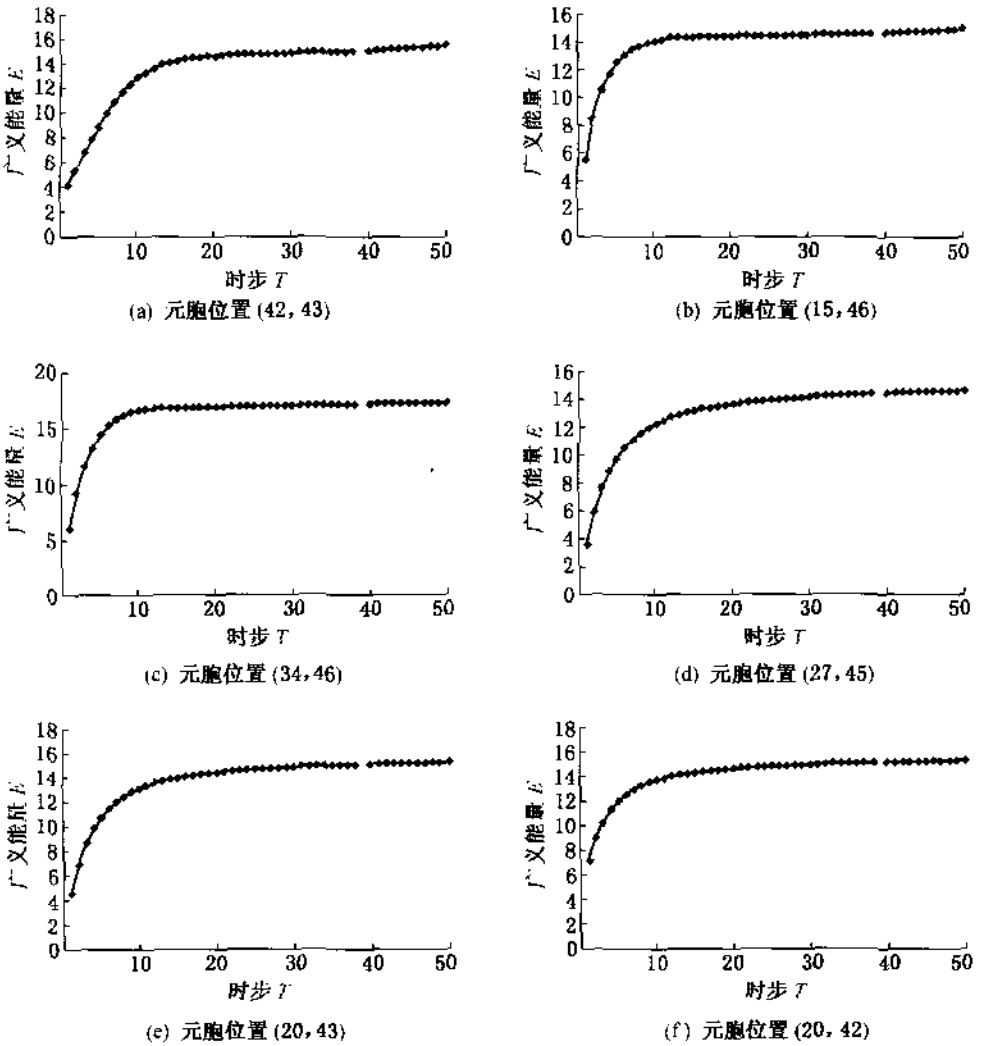


图 7-45　稳定蠕变广义能量变化曲线

从图 7－45 可以看出，在模拟时步过程中，单元元胞广义能量开始时以较大的速度增加，但增加速度逐渐减小，最后速度趋于零，即元胞广义能量值趋于某一稳定数值。因为模型将元胞的广义能量等效于弹性应变能，那么根据应变能的一般表达式，即式（7－15），在输入定常数能量粒子（即等效于施加恒定荷载）后，元胞广义能量的变化趋势就等效于岩石变形的趋势。图 7－45 所示的能量变化过程与岩石稳定蠕变的过程具有一定的相似性，从而验证了元胞自动机模型模拟岩石稳定蠕变的可行性。

根据前面的论述，均质度 m 是表征岩石材料均质程度的重要参量。当均质度 m 增大时，岩石材料越来越均匀。下面考察均质度 m 对元胞系统广义能量的敏感性。当均质度增大 10 倍，即 $m=11$，其他条件不变，程序运行得出的元胞广义能量数值曲线与 $m=1.1$ 得出的能量数值曲线比较分析，如图 7－46 所示。

由图 7－46 可以看出，随着均质度的增加，材料越来越均匀，体现为元胞具有越来越强的“惰性”，活动能力降低，即元胞的能量变化非常不明显。从程序运行得到的数值可以看出，输入能量粒子后，元胞的能量强度有微小增加，随后趋于一稳定水平，但对比均

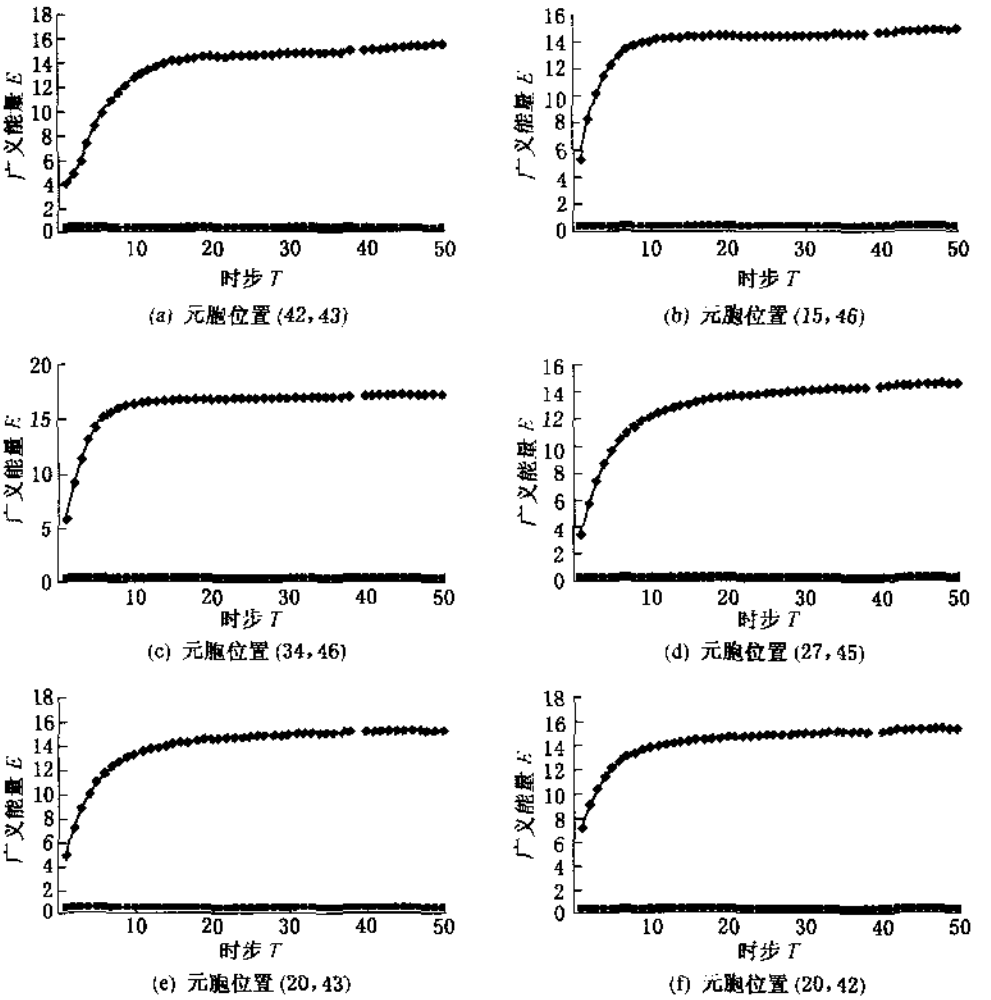


图 7－46　不同均质度元胞系统的能量变化曲线

质度 $m=1.1$ 元胞的能量变化，均质度 $m=11$ 的元胞系统的动态演化过程更近似于岩石材料的稳定蠕变过程。

2. 蠕变特征临界性

当其他条件相同时，应力对岩石蠕变的影响很明显。根据目前的试验结论，如果设 σ_s 是使岩石试件发生蠕变所需的最小应力，σ_f 是岩石的长期强度，即岩石承受长期荷载的最大能力，那么，当施加在岩石试件上的应力 σ 满足 $\sigma_s<\sigma<\sigma_f$ 时，岩石表现出衰减蠕变，蠕变曲线为一条水平渐近线；当 $\sigma>\sigma_f$ 时，岩石表现出不稳定蠕变，最终导致蠕变破坏，蠕变曲线为一条加速上升曲线。随着应力的增加，蠕变曲线从水平渐近线过渡到加速上升曲线，必定存在一条临界曲线，即当 $\sigma=\sigma_f$ 时所对应的蠕变曲线。利用元胞自动机模型，逐渐增加输入的能量粒子数，就可以使能量曲线越来越接近临界状态，所得能量变化曲线如图 7-47 所示。

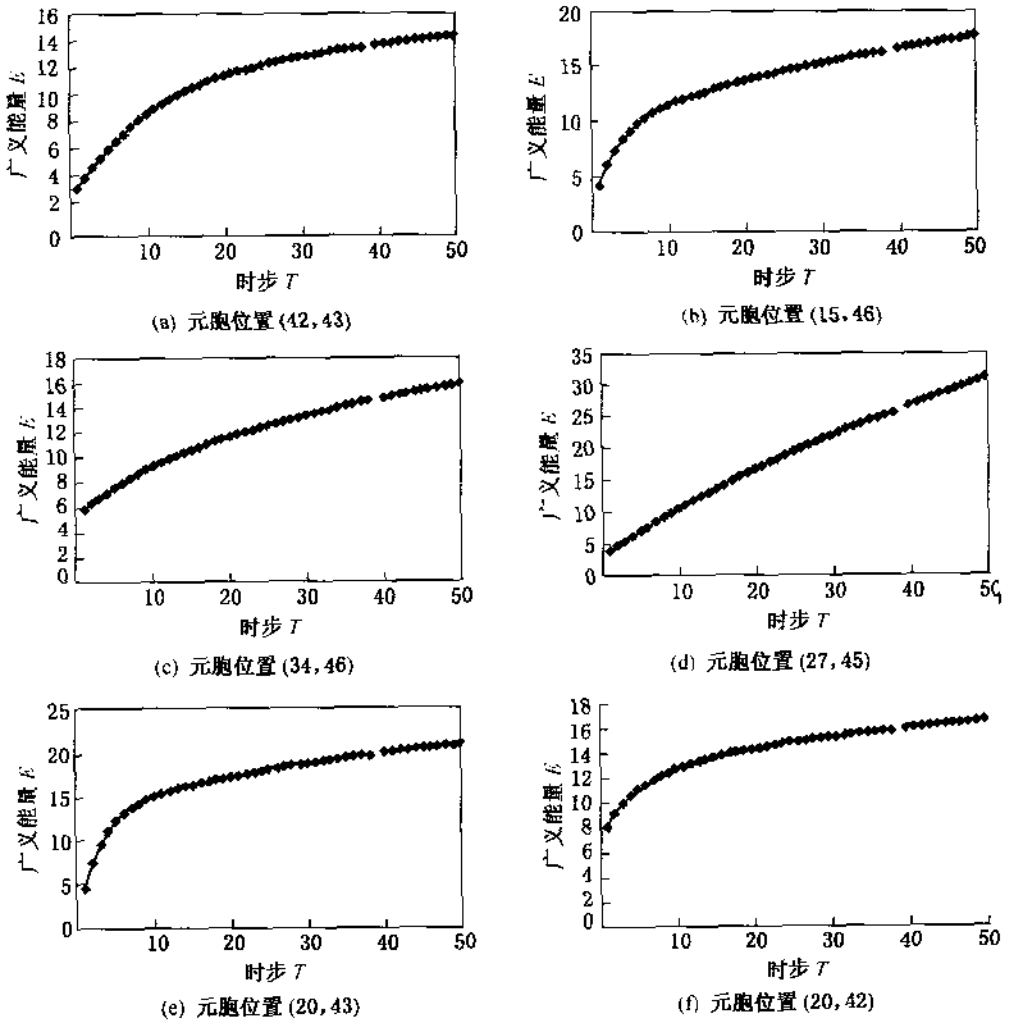


图 7-47 能量变化曲线

实际上，逐渐增加输入的能量粒子数，得出的元胞能量变化曲线只是一个近似的图形，如图 7－47 所示的曲线也只是近似临界状态，要逐步得到这个临界状态是一个繁琐的过程。

3. 加速蠕变模拟

继续增加对元胞系统输入的能量粒子数，选择以下 6 个位置的元胞，绘制能量随时步变化的曲线，所得到的模拟结果如图 7－48 所示。

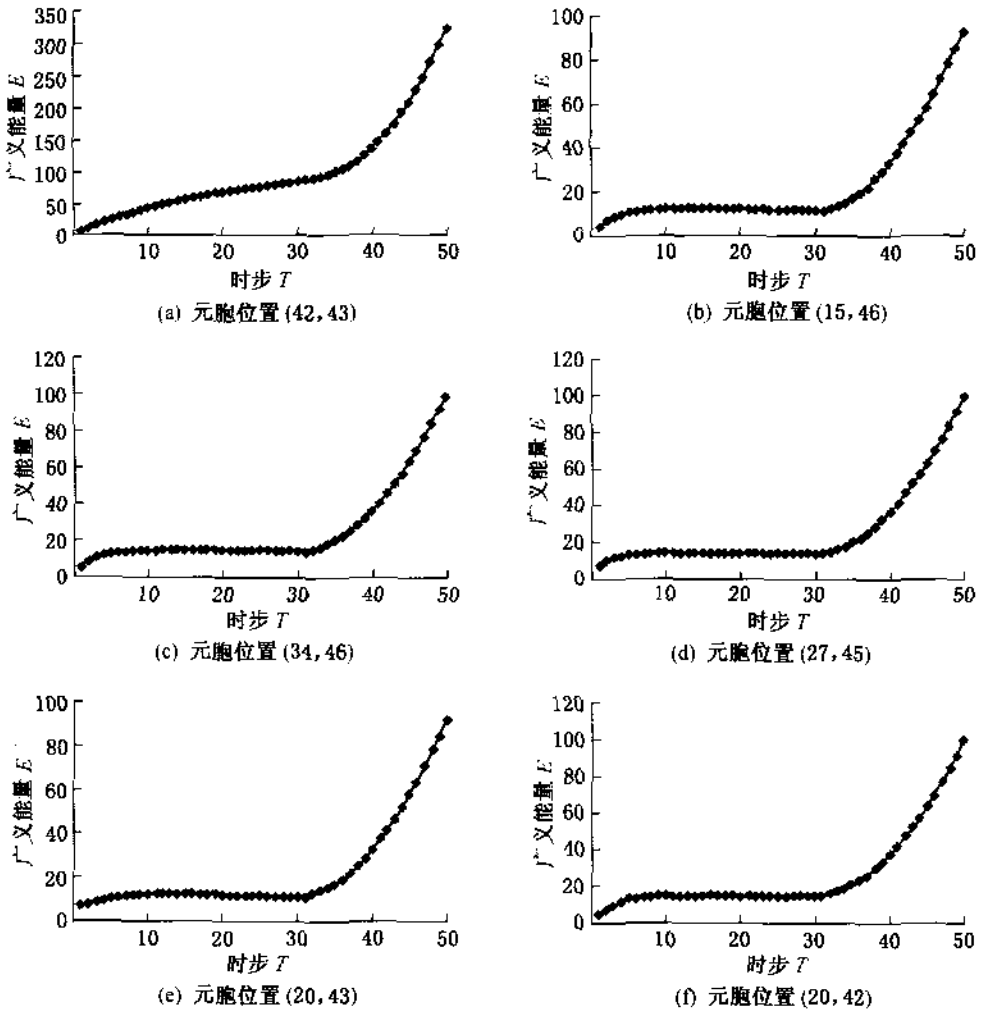


图 7－48　加速蠕变能量变化曲线

从图 7－48 可以看出，增加荷载，即为元胞系统输入更多的能量粒子，系统中的能量随时间逐渐增加，并不趋于某一稳定数值，达到某一阶段后，能量增加速率迅速增加，根据模型演化规则，元胞的极限能量在减少，因此，元胞广义能量最终将大于极限能量，导致元胞破坏。根据岩石发生非衰减蠕变的原理，岩石施加恒定荷载后，岩石发生非衰减蠕变的条件就是应力大于长期强度，最终导致岩石破坏。采用元胞自动机模型模拟岩石加

速蠕变，就是增加能量粒子到某一常量，根据应变能一般表达式，即式（7－15），能量的变化等效于岩石变形的变化趋势，从而为研究岩石的加速蠕变过程提供了一个新的视角。

与稳定蠕变的分析一样，当增加均质度时，需要考察均质度对模型产生什么影响。上述对加速蠕变的模拟所采用的均质度 $m=1.1$ 时，说明该系统所模拟的材料具有很强的非均质性；均质度 $m=11$ 时，说明该系统所模拟的材料非常均匀。图 7－49 所示为高均质元胞系统的能量变化曲线，并与图 7－48 进行了比较。

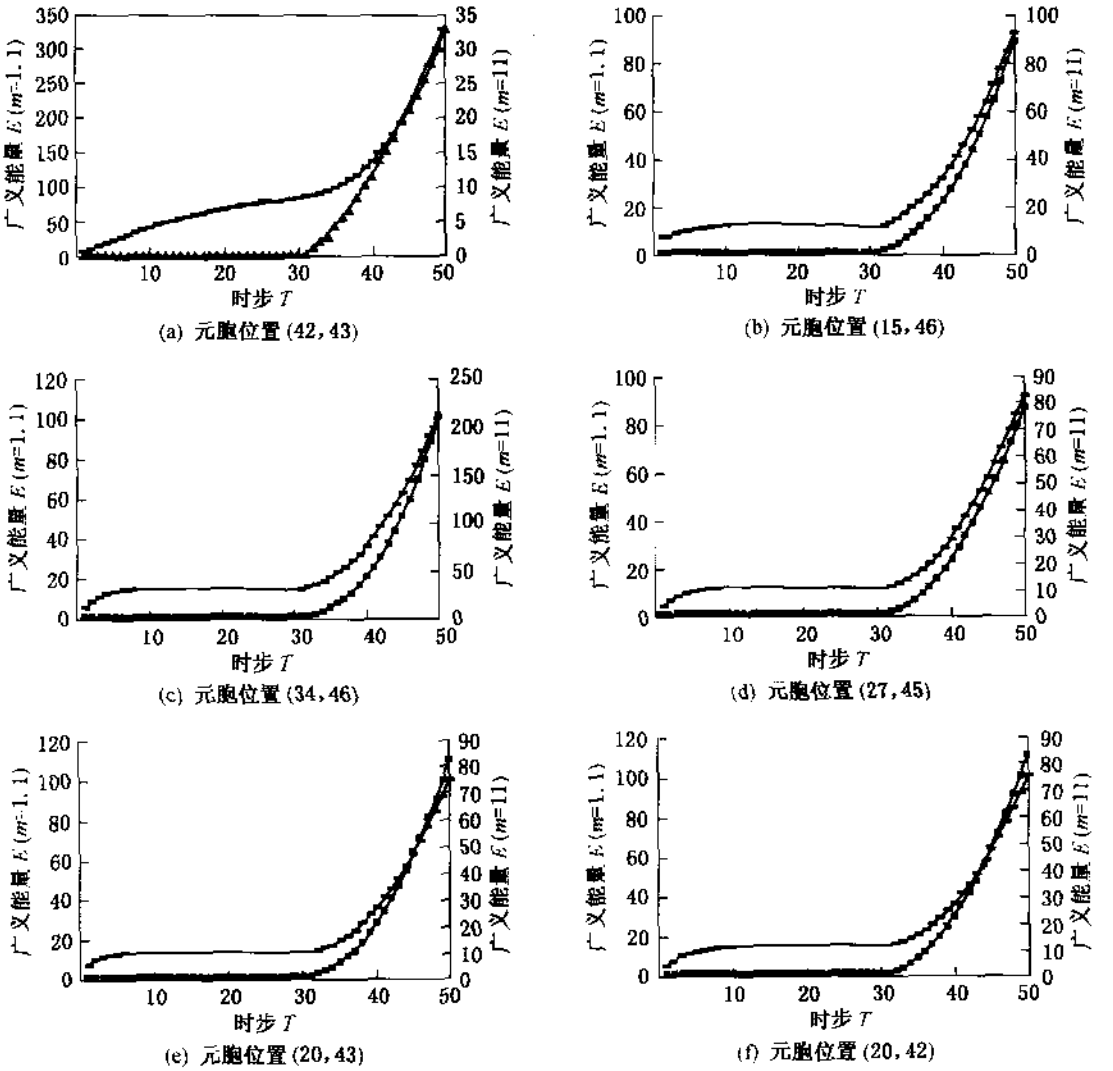


图 7－49　能量变化曲线比较

从图 7－49 可以看出，当均质度增加，即元胞系统越来越均匀时，输入一定能量粒子后，开始阶段，元胞活动能力很低，能量吸收和耗散的变化非常不显著，但是一段时间后，元胞能量发生突变，甚至可以与低均质的元胞系统吸收的能量相当。由此说明，

随着均质度的增加，元胞系统表现出越来越稳定的特性，一旦外部输入的能量大于系统的极限强度，那么元胞能量将发生突变。从而说明岩石材料均质度升高，其稳定性增强，只有元胞系统的均质度达到足够小的程度，才能近似地模拟岩石材料的非均质性。

7.6 基于遗传算法的物理元胞演化力学模型[18]

由前面可知，物理元胞自动机模型以能量为基本变量，能量耗散率在演化规则中起着重要的作用，如何确定模型中的最佳能量耗散率成了一个重要的问题。李明田[18]利用遗传算法搜索试验所得到的应力－应变曲线所对应的最佳的能量耗散率，根据该能量耗散率模拟得出的应力－应变曲线与试验结果吻合较好。

7.6.1 基于遗传算法的物理元胞演化力学模型

遗传算法（GA）借鉴了生物进化的思想[19]，将欲求解的问题编码，每个可能解均表示成字符串的形式。从任一初始化的群体出发，通过随机选择（使群体中优秀的个体有更多的机会传给下一代）、交叉（体现了自然界中群体内个体之间的信息交换）和变异（在群体中引入新的变种确保群体中信息的多样性）等遗传操作，使群体一代一代地进化到搜索空间中越来越好的区域，直至抵达最优解点。

基于遗传算法的物理元胞演化力学模型，是在物理元胞自动机模型（PCA）的基础上根据试验所得的应力－应变曲线，利用遗传算法搜索最优的能量耗散率，进而再根据此能量耗散率模拟岩石的应力－应变曲线和破坏过程中的声发射结果，进而可达到研究岩石（体）的破坏机理的目的。

1. 编码

将待优化参数进行编码。目前最常用的编码方式是二进制编码，二进制编码具有简单易行、符合最小字符集编码原则、便于用模式定理进行分析等优点，但是，它同时也具有一定的映象误差、精度较低等缺点。这里采用二进制编码方式。

2. 群体设定

能量耗散率分布为［0，1］，因而在［0，1］按均匀分布生成一定数目的个体。这里初步设定群体规模为50个，在遗传进化过程中保持群体规模恒定。

3. 适应度函数

遗传算法在进化搜索中基本上不用外部信息，仅用目标函数即适应度函数为依据。在具体应用中，适应度函数的设计要结合求解问题本身的要求而定。但是，由于在遗传算法中，适应度函数要比较排序并在此基础上计算选择概率，所以适应度函数的值要取正值。因此，通常情况下，一般将目标函数映象成求最大值形式且函数值非负的适应度函数。这里，采用的适应度函数为

$$f(x_j)=2(n+1)-\sum_{i=1}^{n+1}|a_i-b_i| \tag{7-19}$$

式中 a_i——已知的应力－应变关系标准化到［0，1］的拟合多项式系数；

b_i——由元胞力学演化模型所得到的应力－应变关系标准化到［0，1］的拟合多项式系数；

n——由应力－应变关系拟合的多项式最高次数。

4. 选择算子

选择的目的是把优化的个体直接遗传到下一代并形成交叉操作所需要的配对库。这里，选择算子采用目前遗传算法中最常用的适应度比例方法。设群体大小为 m，其中个体 i 的适应度值为 f_i，则被选择的概率 P_{si} 为

$$P_{si} = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{m} f_j} \tag{7-20}$$

5. 交叉算子

遗传算法中，交叉算子因其全局搜索能力而作为主要算子。交叉概率的选择采用自适应算法[20]确定。

6. 变异算子

变异算子的基本内容是对群体中的个体串的某些基因座上的基因值作变动。遗传算法导入变异算子的目的有两个：一是使遗传算法具有局部的随机搜索能力；二是使遗传算法可维持群体的多样性，以防止出现未成熟收敛现象。变异概率的选取采用自适应算法[21]确定。其具体步骤如下：

（1）编码。将能量耗散率按二进制进行编码。

（2）初始群体。在［0，1］区间按均匀分布随机生成 50 个初始二进制字符串，形成初始群体，在进化过程中保持群体规模恒定。

（3）计算。利用物理元胞自动机模型（PCA）对每个个体进行计算，得出每个个体的能量耗散率所对应的应力－应变关系，然后，再根据适应度函数的定义即式（7－19）计算出其适应度。

（4）收敛判断。以群体中最大适应度与平均适应度之差小于 1×10^{-3} 作为判据来判断，并以最大进化代数小于 100 作辅助判断。若满足上述条件，则运行结束；否则，则继续运行。

（5）遗传操作。利用选择算子从父代个体中选出 5 个个体直接进入下一代，其余的则形成匹配池，分别以变异概率和交叉概率对匹配池中个体进行变异操作和交叉操作，形成新的子代群体。

（6）返回（3），循环进行。

7.6.2 模拟例证

把岩石试件划分成 100×100 的元胞单元，按正态分布给每个元胞分别赋 1～4 的不同阈值（相当于岩石的当量强度），以表示材料的非均质性。在利用物理元胞演化力学模型模拟岩石破坏演化过程时，每次随机选取某个元胞单元加上单位能量。当某个元胞所储存的能量达到了其阈值时，依据预先确定的能量耗散率将一部分能量耗散掉，而另一部分能量则传递给其邻居，其中能量传递方向是随机选择的，以表示岩石的各向异性。根据已知假设的试验数据，利用物理元胞演化力学模型模拟的应力－应变曲线与试验曲线对比，如图 7－50 所示，并得出其能量耗散率分别为 0.040588，0.435456，0.802589，0.968711。

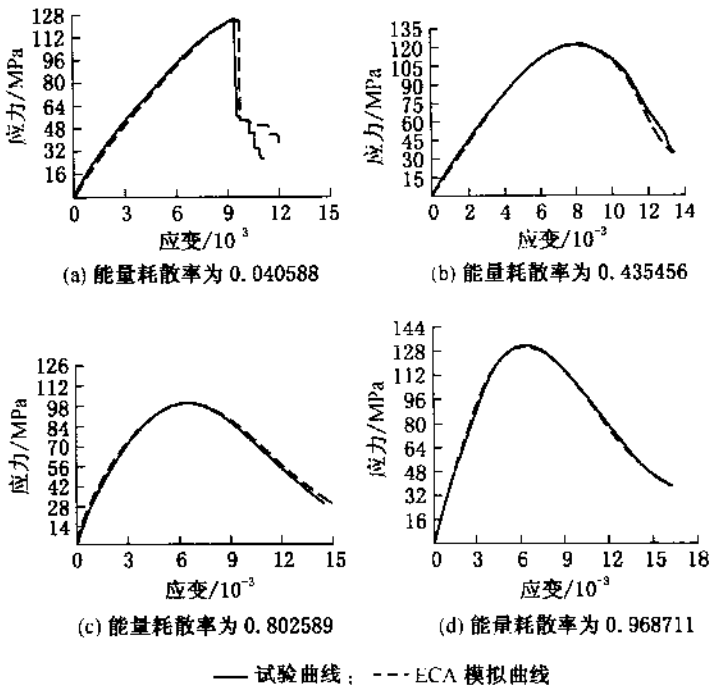


图 7-50 应力-应变曲线对比图

7.7 裂隙煤体中瓦斯运移规律的 LB 元胞自动机模拟

为了研究煤矿瓦斯抽放、煤层瓦斯赋存流动规律以及煤与瓦斯突出机理，国内外学者做了大量而卓有成效的研究工作。如我国学者周世宁[32]、俞启香[33]、章梦涛等[34]、赵阳升等[35]、孙培德等[36]从不同的角度研究了煤与瓦斯的耦合作用及煤层瓦斯的运移规律。国外 J. Litwiniszyn[37]，L. Paterson[38]等一些学者分别提出了煤层瓦斯突出的耦合作用模型并对煤层瓦斯的流动进行了初步的模拟。然而在以往的研究中，大都是将煤岩体视为宏观介质模型，采用有限元、有限差分等数值方法对微分方程进行离散，得到代数方程组或常微分方程系统，然后再用标准的数值方法求解。这些方法的优点是比较直观，但却无法反映整体系统的复杂性与流体粒子简单运动之间的联系，同时对于复杂的边界问题也往往难于处理。

20 世纪 80 年代基于分子运动论发展起来的 Lattice Boltzmann（简称 LB）方法，与从连续系统出发的传统数值方法正好相反。该方法基于对物理系统细观运动的描述，直接建立模拟物理系统演化的格子气模型。物理系统的宏观特性由模型的演化方程来计算，从而建立了宏观物理量与细观结构运动演化的相互联系。目前 LB 方法除了在一般的流体力学问题中得到了成功的应用，在多相流、化学反应扩散、渗流、粒子悬浮流等相关领域也得到了比较成功的应用[39-45]。然而由于瓦斯在裂隙煤体中的流动受到煤体对瓦斯的吸附作用，同时还受到采动压力、地应力、流场温度等因素的影响，瓦斯实际为可压缩流体，应

用 LB 方法模拟瓦斯的渗流特性受到限制，在这方面的研究还有待于探讨。为此，采用 LB 物理元胞自动机方法即 LB－PCA 方法，通过建立瓦斯渗流的动力学模型，对瓦斯在裂隙煤体中的渗流运移规律进行了初步的模拟。

7.7.1 裂隙煤体内瓦斯流场的 LB－PCA 模型[49]

1. 建模条件

瓦斯在裂隙煤体中的流动受到多种因素的影响，为了计算简便，仅考虑主要影响因素，对裂隙煤体中瓦斯流动模型作如下假设：

（1）由于煤层顶底板透气性与煤层相比要小得多，因此假定煤层顶底板围岩为不透气层，且不含有瓦斯。

（2）孔隙度不受煤层中瓦斯压力变化的影响。

（3）瓦斯流场的温度变化不大，瓦斯在煤层中的流动按等温过程处理。

（4）忽略瓦斯体力的影响。

基于上述 4 条假设，建立瓦斯渗流的动力学模型如图 7－51 所示。根据建模条件，瓦斯在裂隙煤体中的流动可认为不可压气体的流动。

根据图 7－51 建立的动力学模型，采用平面应变分析，模拟二维瓦斯流动问题。对于二维流动，目前常用 D2Q9 模型，粒子的离散速度方向如图 7－52 所示，e_i 为粒子的离散速度。

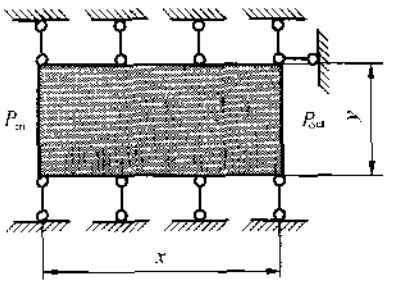


图 7－51 瓦斯渗流的动力学模型

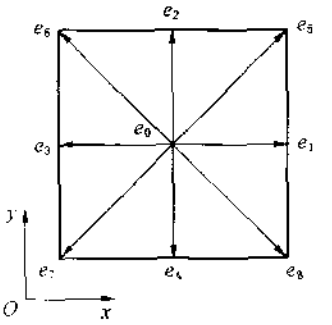


图 7－52 D2Q9 模型粒子速度矢量

$$\begin{cases} e_0 = 0 (i = 0) \\ e_i = (\cos\theta_i,\ \sin\theta_i),\ c\left(\theta_i = \dfrac{(i-1)\pi}{2},\ i = 1 \sim 4\right) \\ e_i = \sqrt{2}(\cos\theta_i, \sin\theta_i),\ c\left(\theta_i = \dfrac{(i-5)\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4},\ i = 5 \sim 8\right) \\ c = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \end{cases} \tag{7-21}$$

式中 c——粒子的迁移速率。

2. 瓦斯渗流演化方程

从物理学观点看，裂隙煤体内瓦斯的流动在单孔隙中须符合 Navier－Stokes 方程，在宏观尺度上应服从线性运移规律（Darcy 定律）。与裂隙煤体内瓦斯的流动尺度相对应，LB 方法模拟瓦斯的渗流规律也有两类方法：孔隙尺度模拟和代表单元（REV）尺度模拟。

因为在 REV 尺度上的模拟无须详细的内部结构信息，因而这种方法适用于大区域渗流问题[46]。

LB 方程的标准形式为

$$f_i(x+e_i\Delta t,t+\Delta t)-f_i(x,t)=-\frac{1}{\tau}[f_i(x,t)-f_i^{eq}(x,t)] \tag{7-22}$$

$$\tau=\tau_0/\Delta t$$

式中 τ——无量纲松弛时间；

$f_i^{eq}(x,t)$——局部平衡态分布函数。

对 D2Q9 模型，其平衡态分布函数为

$$f_i^{(eq)}=\omega_i\rho\left[1+\frac{eu}{c_s^2}+\frac{uu:(e_ie_i-c_s^2I)}{2c_s^4}\right] \tag{7-23}$$

对于渗流问题，考虑孔隙度 ϕ 的影响，平衡态分布函数可修正为[47]

$$f_i^{(eq)}=\omega_i\rho\left[1+\frac{eu}{c_s^2}+\frac{uu:(e_ie_i-c_s^2I)}{2\phi c_s^4}\right] \tag{7-24}$$

式中 ω_i——数值积分公式的权系数；

c_s——声速。

ω_i 和 c_s 的取值均依赖于选用的格子模型。

对式（7-22）等号左边在（x，t）作 Taylor 展开，得

$$f_i(x+\varepsilon e_i,t+\varepsilon)-f_i(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial t}+e_i\frac{\partial}{\partial x}\right]^n f_i(x,t) \tag{7-25}$$

同时，利用 Chapman－Enskog 多尺度展开，将 f_i 在 $f_i^{(eq)}$ 展开成 ε 幂级数形式，得

$$f_i=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n f_i^{(n)}=f_i^{(eq)}+\varepsilon f_i^{(1)}+\varepsilon^2 f_i^{(2)}+\varepsilon^3 f_i^{(3)}+\cdots \tag{7-26}$$

对式（7-25）、式（7-26）略去三阶以上的高次项，由两式 ε、ε^2 的系数分别相等，得

$$\varepsilon^0:\ f_i^{(0)}=f_i^{(eq)} \tag{7-27}$$

$$\varepsilon^1:\ \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial t}+e_i\frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial x}=-\frac{1}{\tau}f_i^{(1)} \tag{7-28}$$

$$\varepsilon^2:\ \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t}+e_i\frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial t_1}+e_i\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+e_i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_i^{(eq)}=-\frac{1}{\tau}f_i^{(2)} \tag{7-29}$$

对式（7-28）求零阶矩和一阶速度矩，得到 t_1 时间尺度上的宏观方程为

$$\begin{aligned}&\partial_{t_1}\rho+\partial_{x_1}(\rho u)=0\\&\partial_{t_1}(\rho u)+\partial_{x_1}\pi_{ij}^{(0)}=0\end{aligned} \tag{7-30}$$

式中 $\pi_{ij}^{(0)}$——零阶动量通量张量。

对式（7-79）求零阶矩和一阶速度矩，得到 t_2 时间尺度上的宏观方程为

$$\begin{cases}\partial_{t_2}\rho=0\\\partial_{t_2}(\rho u)+\dfrac{1}{2}\partial_{t_1}^2(\rho u)+\partial_{t_1}\partial_{x_1}\pi_{ij}^{(0)}+\dfrac{1}{2}\partial_{x_1}\pi_{ij}^{(1)}=0\end{cases} \tag{7-31}$$

对式（7-30）、式（7-31）进行多尺度黏合，得到流体在宏观时间 t 和宏观空间尺度 x 上的渗流动力学方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\left(\dfrac{u}{\phi}\right) = -\dfrac{1}{\rho}\nabla(\phi p) + v\nabla^2 u \end{cases} \tag{7-32}$$

式中 ρ——瓦斯密度；

p——瓦斯压力，$p = c_s^2\rho/\phi$；

u——瓦斯宏观速度；

ϕ——孔隙度；

v——黏性系数，$v = c_s^2\ (\tau - 0.5)\Delta t$。

在式（7-32）中，若选取孔隙度 $\phi = 1$，则其退化为一般流体动力学方程，这说明模型符合物理背景[46]。

7.7.2 模拟算例分析

采用瓦斯渗流的动力学模型（图7-51），模型尺寸和瓦斯压力均采用无量纲化处理，将瓦斯渗流场划分为80×80个正方形网格。采用压力边界条件，左边为输入压力，右边为输出压力，上下为不透气边界。

图7-53所示为 $P_{in} = 1.01$，$P_{out} = 1$ 时，用LB方法模拟的瓦斯流动达到稳定时整个流场的速度矢量图。从图7-53可以看出，在压力差不大时瓦斯在裂隙煤体中的稳定渗流为层状流动。

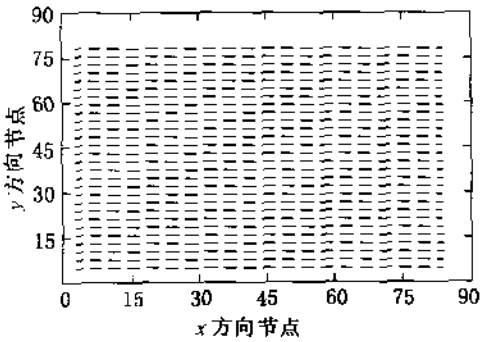


图7-53 瓦斯流场的速度矢量图

图7-54所示为不同Da下瓦斯流场位置（40，40）格点上的瓦斯压力随时步的演化曲线图，其具体参数为：实线，Da = 1.0e-3，Je = 1，Re = 1；虚线，Da = 1.0e-4，Je = 1，Re = 1。

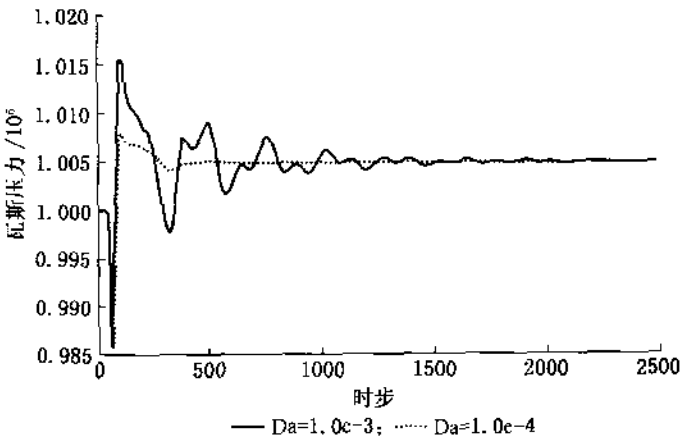


图7-54 格点（40，40）的瓦斯压力随时步的演化曲线

从图7-54可以看出，在瓦斯开始流动的瞬时，瓦斯压力梯度很大。瓦斯压力经过一定时步的波动后，逐渐趋向于稳定。这种现象说明在压力条件下，由于瓦斯分子之间的碰

撞，导致系统能量和瓦斯压力的变化起伏，即出现开始阶段的波动性。经过一定时步后，瓦斯分子间的运动达到平衡，系统能量保持不变，瓦斯渗流达到平衡状态。

若此时该点的压力峰值达到裂隙煤体抗拉强度，微裂纹被撕开，最终形成与暴露面平行的薄层，即层裂体，层裂体两侧存有两种气体：压力较大的瓦斯与压力较小的巷道空气。如果层裂体内有足够数量的气体渗流通道，使得两侧压力差迅速降低，层裂体就可能保持稳定状态；否则层裂体会在气体压力差的作用下发生失稳破坏，煤体碎片向巷道抛出，就发生瓦斯突出。图 7－54 的模拟结果与文献［48］采用逐次亚松弛迭代法得到的结果（图 7－55）吻合得很好。

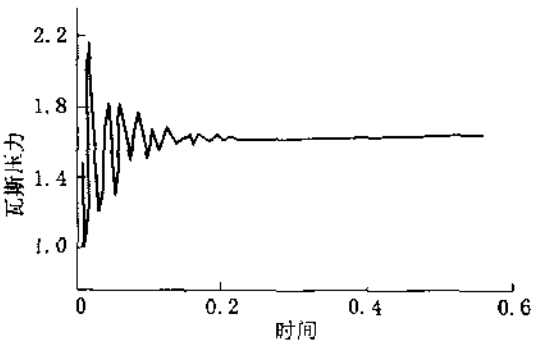


图 7－55　稳定渗流状态下的孔隙压力时间序列[48]

图 7－56 所示为瓦斯流动达到稳定时，垂直于 x 方向的速度分布。从图 7－56 可以看出，流场两侧的瓦斯流速小，而流场中部瓦斯流速大。图 7－56 的模拟结果与文献［47］中用 LB 方法模拟的热气流在多孔介质中的流动结果非常吻合。通过验证，用 LB 方法可以有效地模拟瓦斯在裂隙煤体中的流动。

在采矿工程中，采动压力对瓦斯流动有重大影响。图 7－57～图 7－59 所示分别为改变输出压力时，孔隙瓦斯的压力变化图、瓦斯压力随时间的演化图。

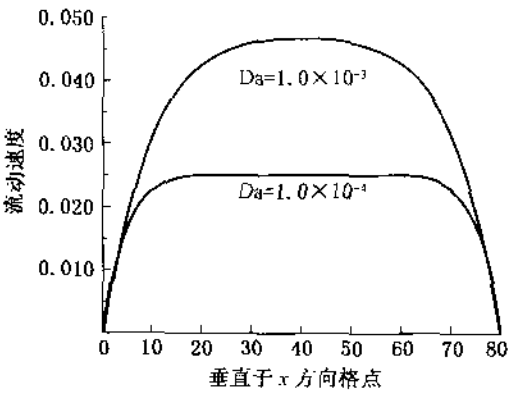


图 7－56　垂直于 x 方向瓦斯流动速度分布图

图 7 - 57 所示为输入压力变化时孔隙瓦斯压力变化图。当压力差不大时，瓦斯压力迅速下降；随着压力差的增大，瓦斯压力出现了显著的非线性现象。

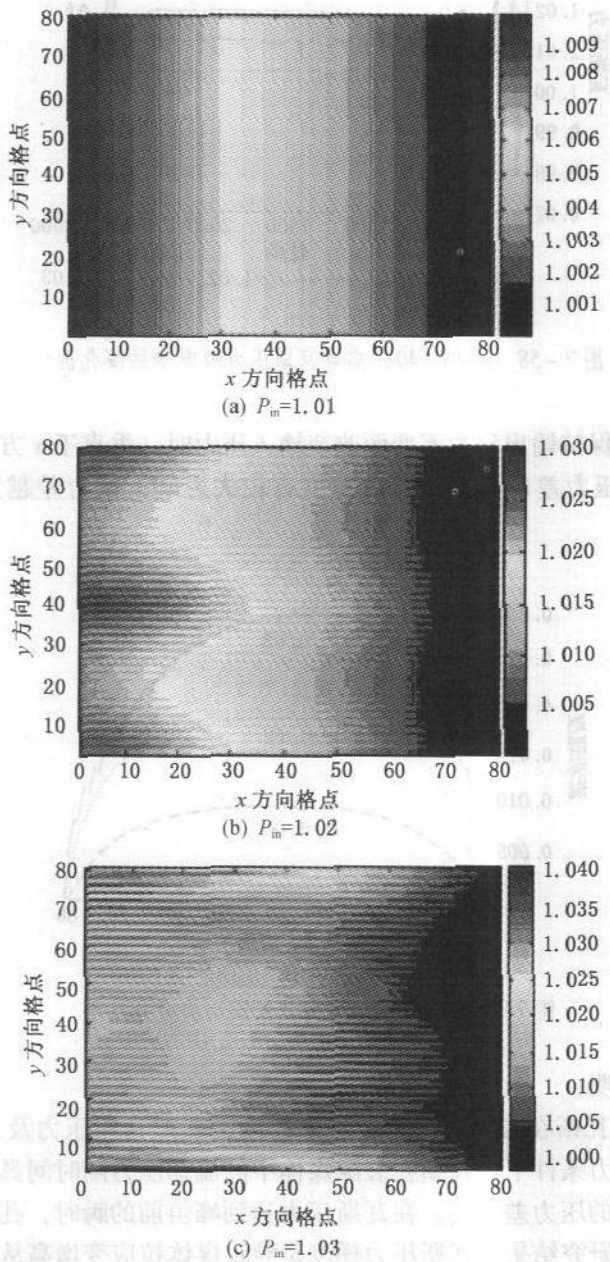


图 7 - 57　瓦斯压力变化图

图 7 - 58 所示为瓦斯流场（40，40）格点上的瓦斯压力随时间的变化曲线。当压力差较小时，瓦斯压力经过一定的时步后达到稳定值；当压力差较大时，孔隙瓦斯压力出现了发散现象。

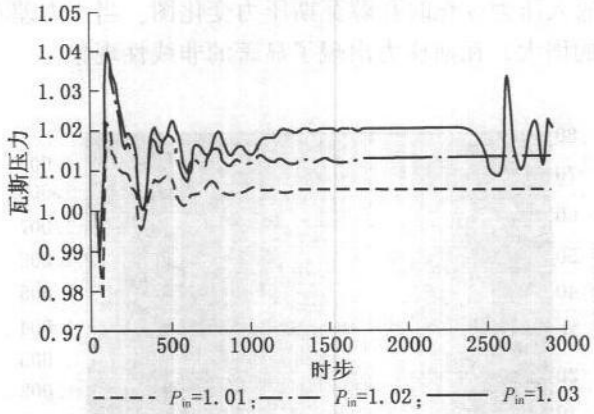


图 7-58　(40，40) 格点瓦斯压力随时步的演化曲线

图 7-59 所示为保持输出压力不变而改变输入压力时，垂直于 x 方向的速度分布。从图 7-59可以看出，压力差对瓦斯的流动速度有较大影响，压力差越大，瓦斯流动的越快。

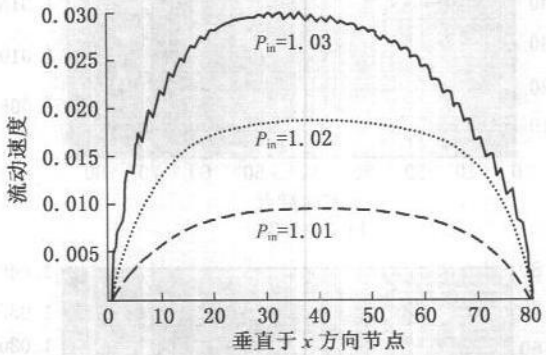


图 7-59　垂直于 x 方向瓦斯流动速度分布图

以上模拟分析表明：

(1) 采动压力对瓦斯在裂隙煤体中的流动速度、孔隙瓦斯压力及瓦斯压力梯度都有显著影响。在采动压力条件下，瓦斯在裂隙煤体中的流动压力随时间具有波动性，波动幅度的大小与流场两端的压力差有关。在瓦斯压力达到峰值前的瞬时，孔隙瓦斯压力梯度很大。根据氏平的试验研究结果，瓦斯压力梯度是导致煤体拉应变增高从而引起煤体破坏的直接原因。

(2) 采动压力差对瓦斯流动速度、孔隙瓦斯压力及瓦斯压力梯度都有显著影响。随着采动压力差的增大，瓦斯流动逐渐由层流过渡到紊流，同时孔隙压力出现发散，压力变化出现了显著的非线性现象。

(3) 由于瓦斯是一种可压缩流体，在以后的研究中还应考虑煤层瓦斯含量系数和透气系数及采动场温度变化的影响。

7.8 基于 PCA 算法的有限差分法初步

岩石材料是一种天然的地质材料，岩石系统是一种具有时间和空间特征的复杂性系统。对岩石系统进行力学分析的方法归纳起来只有两种，即解析法和数值法。由于岩石系统具有复杂性系统的典型的特征，除了一些简单的问题外，岩石力学分析主要集中于数值分析。岩石系统具有空间复杂性系统的明显特征，因此，传统的求解岩石力学的问题就要从“单元到整体”，将复杂问题化为简单问题，如 FEM 方法、有限差分法等。岩石的物理元胞自动机（PCA）模拟算法采用的就是这种典型的“自下而上”的建模方法，即从系统单元的状态和行为入手，模拟单元之间的相互作用，从而得出复杂系统整体的行为。由于元胞自动机方法能够有效处理非线性系统自组织演化行为，因此，有必要将元胞自动机方法与差分算法相结合，可获得理想的结果。

7.8.1 有限差分算法的基本原理

根据偏微分的积分定义，Wilkins 于 1963 年提出了解决偏微分方程的差分方案，如图 7-60所示。其关系式为

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{A\to 0}\left(\frac{1}{A}\int_s F n_i \mathrm{d}s\right) \tag{7-33}$$

式中 F——一个标量、矢量或张量；

x_i——位置矢量的分量；

A——积分面积；

ds——增量弧长度；

n_i——ds 弧的正法线单位分量。

式（7-33）是连续曲线积分，可以通过近似，将积分路径简化成有限多边形，如图 7-61 所示，公式如下：

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \approx \frac{1}{A}\sum_{n=1}^{N} \overset{n}{F}\varepsilon_{ik}\Delta \overset{n}{x}_i \tag{7-34}$$

式中 N——边的个数；

$\overset{n}{F}$——F 在边 n 上的平均值；

$\Delta \overset{n}{x}_i$——边 n 的矢量长度分量；

ε_{ik}——二维置换张量。

利用上述近似公式，即式（7-33）、式（7-34），就可以很方便地计算微分方程。这

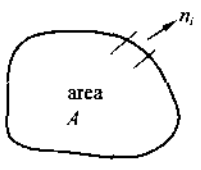


图 7-60 积分路径

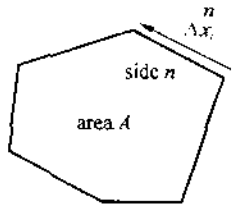


图 7-61 数值积分的边界离散化

种方法的优点在于它对有限多边形的形状和边的个数没有限制的，也有其他一些有限差分方法，但它们是基于矩形网格的，即仅能解决矩形问题，而式（7－34）不具有这些制约。

如果要将应力、应变和位移等矢量概念引入到元胞自动机模型中，必须找出力与位移之间的关系。根据运动方程，就可以确定两者之间的映射关系。

运动方程的表达式如下：

$$\rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \tag{7-35}$$

式中 ρ——密度；

$\dot{u}_i$——速度；

t——时间；

σ_{ij}——应力张量；

g_i——体力分量。

例如，考察一个运动物体 m 受随时间变化的力 F，其计算步骤如图 7－62 所示。

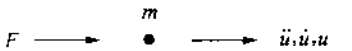


图 7－62　运动物体 m 受随时间变化的力 F

从图 7－62 可以看出，首先需要计算 $\ddot{u}$，即

$$\ddot{u} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{F}{m} \tag{7-36}$$

即

$$F = ma$$

通过在半个时步上采用中心差分方法计算式(7－36)，其左边就可以写为

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\dot{u}^{(t+\Delta t/2)} - \dot{u}^{(t-\Delta t/2)}}{\Delta t} \tag{7-37}$$

将式（7－37）代入式（7－36），得

$$\dot{u}^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}^{(t-\Delta t/2)} + (F^{(t)}/m)\Delta t \tag{7-38}$$

式（7－38）的左边表示格点在半个时步的速度。

将速度进行积分确定位移，即

$$u^{(t+\Delta t)} = u^{(t)} + \dot{u}^{(t+\Delta t/2)}\Delta t \tag{7-39}$$

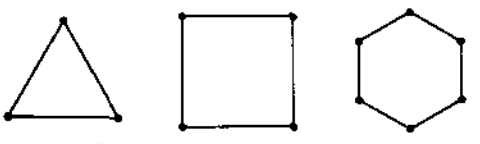
增加时步，确定系统外力 F，从而形成一个求解循环，如图 7－62 所示。

7.8.2　基于 PCA 算法差分算法

根据岩石力学基本原理和元胞自动机的基本理论，将应力、应变、力和位移等矢量和张量作为模型的基本变量，将有限差分算法结合起来，对传统的元胞自动机的概念进行了扩展，建立一种含有节点元胞和单元元胞的差分形式的 PCA 算法模型。

1. 元胞及元胞空间

传统的二维元胞空间通常可选择三角形、四方形或六边形三种网格排列，任一个三角形、四方形或六边形即表示一个元胞。现将传统的元胞概念加以扩展，在每个单元的结点增加一个结点元胞，如图 7－63 所示。



(a) 三角形　(b) 四方形　(c) 六边形

图 7－63　三种元胞构形

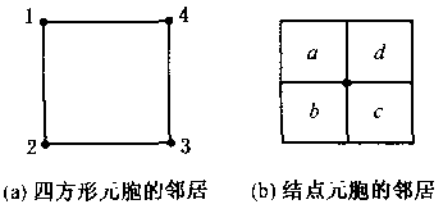
从图 7－63 可以看出，所建立的模型具有两类元胞构形。以四方形元胞构形为例，一类为四方形元胞，一类为结点元胞。

2. 元胞状态

两类元胞分别定义不同的状态变量，四方形元胞内的状态变量对应于应力、应变；结点元胞的状态变量为结点元胞上的位移和力。两种元胞相互连接起来，共同组成元胞空间。

3. 邻居

经典的元胞自动机理论中，邻居模型主要包括：冯·诺依曼型、Moore 型和扩展 Moore 型。这三种模型都是以第一类元胞作为邻居，在建立的模型中，元胞有两类邻居。以四方形元胞为例，具体邻居定义如下：对于任意一个四方形元胞，它的邻居元胞是位于该四方形元胞顶点位置的 4 个结点元胞 $\{1, 2, 3, 4\}$，如图 7－64a 所示；对于任意一个结点元胞，它的邻居元胞是包含该结点的 4 个四方形元胞 $\{a, b, c, d\}$，如图 7－64b 所示。



(a) 四方形元胞的邻居　(b) 结点元胞的邻居

图 7－64　邻居模型

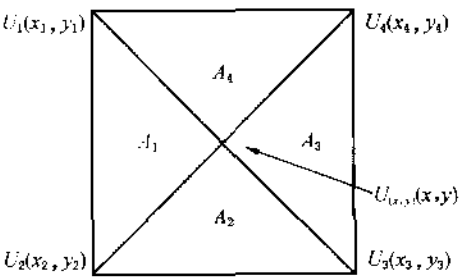


图 7－65　计算四方形元胞位移示意图

4. 演化规则

元胞演化规则定义了元胞从某时刻到下一时刻状态改变的映射关系，是元胞自动机五元组合中最关键的一个组元，正是由于演化规则的独特性才产生了适于模拟实际系统的构形，元胞自动机理论才显示其非凡的意义。

由于模型存在两类元胞，因此，演化规则也包含了两类元胞随时间演化的基本依据。以四方形网格元胞为例，定义的演化规则如下：

（1）对于任意一个四方形元胞 k，其邻居是与它相邻的结点元胞，如图 7－64a 所示。因此，四方形元胞的状态变量，即应力，在下一时刻的状态由其所有邻居结点元胞的位移共同决定，表达式如下：

$$\sigma_k^{t+1} = f(\sigma_k^t, u_{k1}^t, u_{k2}^t, u_{k3}^t, u_{k4}^t) \tag{7-40}$$

式中　σ_k^{t+1}——四方形元胞 k 在 $t+1$ 时刻的应力状态；

σ_k^t——四方形元胞 k 在 t 时刻的应力状态；

u_{ki}^t——四方形元胞 k 的第 i 个邻居结点元胞在 t 时刻的位移状态，$i=1, 2, 3, 4$。

（2）对于任意一个结点元胞，如图 7－64b 所示，其邻居是包含它的 4 个四方形元胞。因此，结点元胞的状态变量，即位移，在下一时刻的状态由其邻居四方形元胞的应力

和外力共同决定，即

$$u_k^{t+1} = g(u_k^t,\ \sigma_{kj}^t,\ \sigma_{k2}^t,\ \sigma_{k3}^t,\ \sigma_{k4}^t,\ F) \tag{7-41}$$

式中 u_k^{t+1}——结点元胞 k 在 $t+1$ 时刻的位移状态；

u_k^t——结点元胞 k 在 t 时刻的位移状态；

σ_{kj}^t——结点元胞 k 的第 j 个邻居四方形元胞在 t 时刻的应力状态，$i=1$，2，3，4；

F——系统外力。

（3）当系统达到平衡时，对四方形元胞的应力状态进行破坏判断，如果满足：

$$f(\sigma_k,\ C,\ \varphi,\ \tau_c) = 0 \tag{7-42}$$

式中 σ_k——系统平衡以后四方形元胞的应力状态；

C——四方形元胞的黏聚力；

φ——四方形元胞的内摩擦角；

τ_c——四方形元胞的抗剪强度。

则认为元胞破坏，应力 $\sigma_k = 0$。

假设岩石的弹性模量和抗拉强度服从 Weibull 分布，本构关系为线弹性，建立演化规则如下：

$$U_{(x,y)}(x,y) = \frac{1}{2A}[(U_1+U_2)A_1 + (U_2+U_3)A_2 + (U_3+U_4)A_3 + (U_4+U_1)A_4] \tag{7-43}$$

式中 A——四方形元胞的面积；

A_1，A_2，A_3，A_4——四方形元胞 4 个区域的面积，如图 7-65 所示；

U_1，U_2，U_3，U_4——四方形元胞 4 个邻居结点的位移。

已知应力［σ］、应变［ε］与位移［u］三者之间的关系式为

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \tag{7-44}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{7-45}$$

根据 Wilkins 提出的有限差分方案，确定系统外力为

$$F^i = \sum_{n=1}^{8} F_n^i = \sum_{n=1}^{8} \sigma_{ij} e_{jk} \Delta x_k \tag{7-46}$$

$$e_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 i、j、k 分别取值 x、y，e_{jk}为置换张量。计算结点元胞对四方形元胞产生的不平衡力，然后求和，如图 7-66 所示。

（4）如果$\tau \geqslant \tau_c$，则四方形元胞破坏。τ_c 表示元胞的抗剪强度，按照莫尔-库仑准则，其表达式为

$$\tau_c = C + \sigma_n \tan\varphi \tag{7-47}$$

式中 C——黏聚力；

φ——内摩擦角。

5. 实施步骤

应用以上定义的规则，即可对岩石受力变形直至破坏的动态演化过程进行模拟，具体实施步骤如下：

（1）以位移方式加载，在每个时步加载过程中，整个系统根据四方形元胞和结点元胞的演化规则进行演化，直到系统达到平衡。

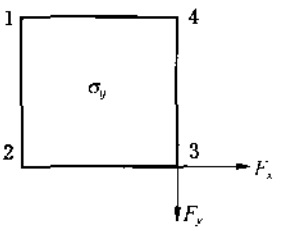


图 7-66 结点元胞不平衡力计算示意图

（2）根据上述定义的元胞破坏判断规则，判定元胞是否破坏，如果元胞破坏，则按照规则对破坏元胞进行死亡处理，并重复步骤（1），以寻求新的平衡；如果元胞未破坏，则判定系统在此次加载过程中达到了真正的平衡。

PCA 算法在从系统单元的状态和行为入手，可以直接从能量角度出发模拟单元之间的相互作用，从而得出岩石系统整体的动态演化过程；它能够与计算机结合起来，具有强大的复杂计算功能、固有的并行计算能力、高度动态特征以及具有空间概念等特征，使得它在模拟空间复杂系统（例如岩石系统）的时空动态演变领域具有很强的能力，能够很好地解决复杂性问题。

因此，充分考虑 PCA 模型算法的优势，将其与传统的有限差分法、有限元方法[22,23]等数值模拟方法进行杂交和耦合，亦即继承传统弹塑性力学的应力、应变等矢量概念与表达方法，在节点不平衡力消除计算中采用 PCA 自组织算法代替像 FEM 算法中大型刚度矩阵的求解，这样可以提高计算效率，特别是消除塑性计算中所谓不收敛问题，这是一个值得进一步探究的新领域。

参 考 文 献

[1] Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata [J]. Reviews of Modern Physics, 1983, 55 (3): 601 - 604.

[2] Gardner M. On cellular automata, self - reproduction. The garden of eden and game "life" [J]. Scientific America. 1971, 224 (2): 112 - 117.

[3] Dewdney A K. The game life of aquires some successors in three dimensions. Computer recreations [J]. Scientific American, 1987: 8 - 13.

[4] Bay C. Classification of semitotalistic cellular automata in three dimensions [J]. Complex system, 1988, 6 (2) 112 - 114.

[5] Hardy J, Pomeau Y, De Pazzis O. Molecular dynamics of a classical lattice gas. Transport properties and time correlation functions [J]. Phys. Rev. A, 1976, 13 (5): 1949 - 1961.

[6] Frisch U, Hasslacher B, Pomeau Y. Lattices - gas automata for the Navier - Stokes equation [J]. Physical Review Letters, 1986, 56: 1204 - 1208.

[7] Wolfram S. Theory and application of cellular automata [M]. Singapore: World Scientific, 1986.

[8] Wolfram S. Cellular automata fluid. Basic theory [J]. J. Stat. Phys, 1986, 45: 471 - 526.

[9] 谭云亮，周辉，王泳嘉，等. 模拟细观非均质材料破坏演化的物理元胞自动机理论 [J]. 物理学报，2001，20（4）：704－710.
[10] 周辉，王泳嘉，谭云亮，等. 岩体破坏演化的物理元胞自动机（PCA）（I）——基本模型 [J]. 岩石力学与工程学报，2002，21（4）：475－478.
[11] 周辉，谭云亮，冯夏庭，等. 岩体破坏演化的物理元胞自动机（PCA）（Ⅱ）——模拟例证 [J]. 岩石力学与工程学报，2002，21（6）：782－786.
[12] Khair A W. Acoustic emission pattern: an indicator of mode of failure in geologic materials as affected by their natural imperfections. In: Proc Third Conference on Acoustic Emission/Microseismic Activity in Geologic Structures and Materials [M]. Clausthal, Germany: Trans. Tech. Publications, 1984.
[13] Mogi K. Earthquakes Prediction [M]. Tokyo: Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich Publishier), 1985.
[14] 谭云亮，周辉，王泳嘉，等. 模拟岩石声发射及混沌性的 PCA 模型 [J]. 中国有色金属学报，2002，12（4）：802－807.
[15] 唐春安. 岩石破裂过程中的灾变 [M]. 北京：煤炭工业出版社，1993.
[16] 马志涛. 岩石破坏演化细观非均质物理元胞自动机（Mh－PCA）研究 [D]. 泰安：山东科技大学，2003.
[17] 唐春安. 岩石介质细观非均质性对岩石破裂过程影响 [J]. 岩土工程学报，2000，22（6）：706－710.
[18] 李明田，冯夏庭，周辉. 模拟岩石破坏过程的物理元胞演化力学模型 [J]. 岩石力学与工程学报，2003，22（10）：1656－1660.
[19] 陈国良，王煦法，庄镇泉，等. 遗传算法及其应用 [M]. 北京：人民邮电出版社，1999.
[20] 刘桂萍，傅征祥，刘杰. 摩擦时间依从的地震活动性细胞自动机模型 [J]. 地球物理学报，2000，43（2）：203－211.
[21] Srinivas M, Patnaik L M. Adaptive probability of crossover and mutation in genetic algorithms [J]. IEEE Trans. on SMC, 1994, 24 (4): 656－667.
[22] 王士民，冯夏庭，王泳嘉，等. 脆性岩石破坏的演化元胞自动机（ECA）研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2005，15（24）：2634－2639.
[23] 王士民. 脆性岩石细观破坏过程中的演化元胞自动机方法研究 [D]. 沈阳：东北大学，2004.
[24] 周辉，冯夏庭，谭云亮，等. 物理细胞自动机与岩石弹－脆性质的细观机制研究 [J]. 岩土力学，2002，23（6）：678－692.
[25] Beniawski Z T. Engineering Rock Mass Classifications [J]. Int. Rock Mech., 1975, 12: 101.
[26] 颜伟. 岩石蠕变的 FEM 和 PCA 模拟算法研究 [D]. 青岛：山东科技大学，2005.
[27] 谭云亮，颜伟，马洪岭. 细观非均质岩石蠕变特征的物理元胞自动机模拟 [J]. 岩土力学，2002，27（S）：278－282.
[28] 马志涛，谭云亮. 岩石破坏演化细观非均质物理元胞自动机模拟研究 [J]. 岩石力学与工程报，2005，24（15）：2704－2708.
[29] Ma Zhitao, Tan Yunliang, Zhang Ting. Modeling of rock failure based on physical cellular automata [J]. Journal of southeast University, 2005, 21 (3) 348－352.
[30] Mogi K. Earthquke Predication [M]. Toyko: Academic Press. 1985.
[31] Vichniac G. Simulating physics with cellular automata [J]. Physica D, 1984, 10: 96－115.
[32] 周世宁. 瓦斯在煤层流动的机理 [J]. 煤炭学报，1990，15（1）：61－67.
[33] 俞启香. 矿井瓦斯防治 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1993.
[34] 章梦涛，潘一山，梁冰. 煤岩流体力学 [M]. 北京：科学出版社，1995.

[35] 赵阳升. 煤体－瓦斯耦合数学模型与数值解法 [J]. 岩石力学与工程学报，1994，13（3）：229－239.

[36] 孙培德. Sun 模型及其应用——煤层气越流固气耦合模型及可视化模拟 [M]. 杭州：浙江大学出版社，2002.

[37] Litwiniszyn J. A model for the initiation of coal－gas outburst [J]. Int J. Rock Mech. Min. Sci. Geomechbstr，1985，22：39－46.

[38] Paterson L. A model for outburst in coal [J]. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr，1986，23：327－332.

[39] Spaid MAA，Phelan FRJ. Lattice Boltzmann methods for modeling microscale flow in fibrous porous media [J]. Physical Fluids，1997，9：2468－2474.

[40] 陶果. 岩石物理的理论模拟和数值实验新方法 [J]. 地球物理进展，2005，20（1）：4－11.

[41] Chen Shiyi，Doolen Gary D. Lattice Boltzmann method for fluid flows [J]. Fluid Mech.，1998，30：329－364.

[42] Hou S，Zou Q，Chen S，et al. Simulation of cavity flow by the Lattice Boltzmann method [J]，Computation Phys，1995，118：329－347.

[43] Rothman DH. Cellular－automation fluids：a model for flow in porous media [J]. Geophys，1988，53：509－518.

[44] Succi S，Foti E，Higuera F. Three dimensional flows in complex geometries with the Lattice Boltzmann method [J]. Europe phys，1989，10：433－438.

[45] 郭照立，郑楚光，李青，等. 流体动力学的格子 Boltzmann 方法 [M]. 武汉：湖北科学技术出版社，2002.

[46] Guo Zhaoli. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media [J]. The American Physical Society，2002，66（3）：1－9.

[47] 孔祥言. 高等渗流力学 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，1999.

[48] 李顺才. 破碎岩体非 Darcy 渗流的非线性动力学研究 [M]. 徐州：中国矿业大学，2006.

[49] 滕桂荣，谭云亮，高明. 基于 LB 方法对瓦斯在裂隙煤体中运移规律的模拟研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2007，27（Sup1）：3503－3508.

8 岩石力学的神经网络非线性分析方法

8.1 神经网络的非线性特征

在生物学上，神经系统的基本构造单元是神经细胞，也称为神经元。如图 8－1 所示，每个神经单元主要由三部分构成：细胞体、树突和轴突。树突的作用是向四方收集由神经细胞传来的其他信息，轴突的功能主要是传出从细胞体传来的信息。每个神经细胞所产生和传递的基本信息是兴奋或抑制，两个神经细胞的接触点即为突触。

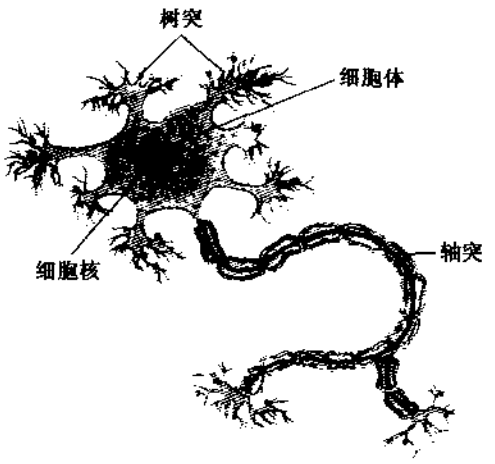


图 8－1 神经单元结构图

人工神经网络（Artificial Neural Network，简称 ANN）是对人脑或自然神经网络（Natural Neural Network）若干基本特性的抽象和模拟。人工神经网络以对大脑的生理研究成果为基础，其目的在于模拟大脑的某些机理与机制，实现某个方面的功能。国际著名的神经网络研究专家，第一家神经计算机公司的创立者 Hecht－Nielsen 给人工神经网络下的定义为[1]："人工神经网络是由人工建立的以有向图为拓扑结构的动态系统，它通过对连续或断续的输入作状态相应而进行信息处理"。目前，多层网络 BP 算法[1]和 Hopfield 网络模型[2]成为人工神经网络研究和应用的主体，其主要特点有以下几点：

（1）可以充分逼近任意复杂的非线性关系。

（2）所有定量或定性的信息都等势分布贮存于网络内的各神经元，故有很强的鲁棒性和容错性。

（3）采用并行分布处理方法，使得快速进行大量运算成为可能。

（4）可学习和自适应不知道或不确定的系统。

（5）能够同时处理定量、定性知识。

在上述 5 个特点中，最为重要的特点是第一个。因为人类的思维方式正在转变，从线性思维转变到非线性思维。神经元、神经网络都有非线性、非局域性、非定常性、非凸性和混沌等特性，我们在计算智能的层次上研究非线性动力系统、混沌神经网络以及神经网络，并进一步研究非线性神经场的兴奋模式、神经集团的宏观力学等。因为，非线性问题的研究是神经网络理论发展的一个最大动力，也是神经网络理论面临的最大挑战，可以这样说，现代人工神经网络的本质就是非线性。下面，讨论神经元膜传导性对网络非线性动

力学特征的影响[3]。

8.1.1 连续神经网络模型描述

设 u_i 为第 i 个神经元的平均膜电位，u_i 代表第 i 个神经元的状态，状态向量记为

$$u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)^{\mathrm{T}}$$

u_i 服从如下方程：

$$\tau\dot{u}_i=-u_i+\sum_j w_{ij}x_j+s_i-h_i \tag{8-1}$$

其中，x_j 为第 j 个神经元的输出信号，利用输出函数 $s(\cdot)$，可表示为

$$x_i=s(u_i)$$

定义势函数

$$V(u)=\sum_i u_i x_i-\sum_i F(u_i)-\frac{1}{2}\sum_{i,j}w_{ij}x_i x_j-\sum_i(x_i h_i)x_i \tag{8-2}$$

其中

$$F(u_i)=\int_0^{u_i}s(z)\,\mathrm{d}z \tag{8-3}$$

对 v 求偏导

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=-\tau s'(u_i)\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \tag{8-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\tau\sum_{i=1}^{n}s'(u_i)\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{8-5}$$

其中，$\tau>0$，$x_i=s(u_i)$ 为增函数，$s'(u_i)>0$，$\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\right)^2>0$，所以有 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，这表明随着时间的推移，势函数是减少的，状态向着势函数减少的方向移动。

8.1.2 神经元膜传导性对网络动力学特性影响

为了讨论的方便和重点突出，在式（8-1）中令 $s_i-h_i=0$ 并两边同除以 τ，则有

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\sum_j T_{ij}s(u_j)-pu_i \tag{8-6}$$

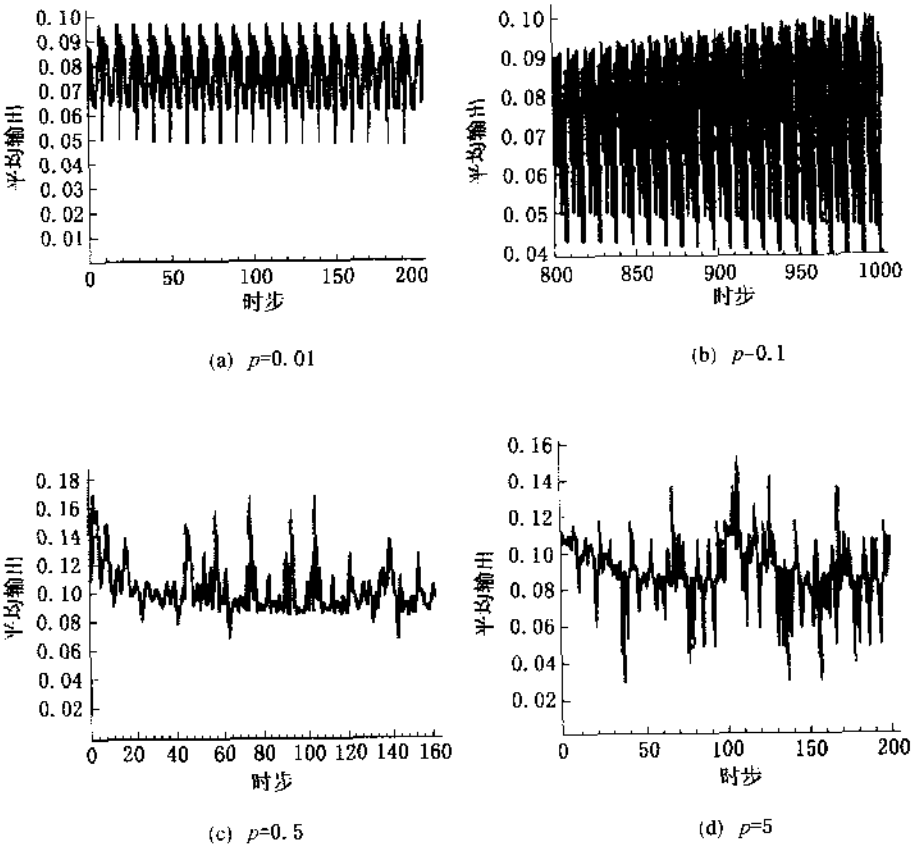
式中 $T_{ij}=w_{ij}/\tau$，代表神经元 i 和 j 之间的连接强度；$p=\frac{1}{\tau}$，代表神经元膜的传导性。网络的非线性映射为

$$s_i=s(u_i)=\tanh(\sigma u_i) \tag{8-7}$$

式（8-7）中 σ 为增益激活参数，由于上述关系的非线性，神经元的平均输出（s）的动力演化可由式（8-6）的数值积分得到。在模型求解中，选用 5 阶 Runge-Kutta 数值积分求解。

若网络中选取 100 个神经元，连接 10 个输入节点和 10 个输出节点，取增益激活参数 $\sigma=100$，连接强度 T_{ij} 及初始膜电位 u_i^0 可在［-1，1］内随机产生。为了消除个别神经元活动离散性，考察神经元的平均输出（s）随时间的变化，图 8-2 显示了不同传导性 p 条件下（s）随时间的变化，从图中可以看出，随着 p 值的增大，系统输出的动力学特性关系曲线呈现了从典型周期波动向无规则波动的演变。

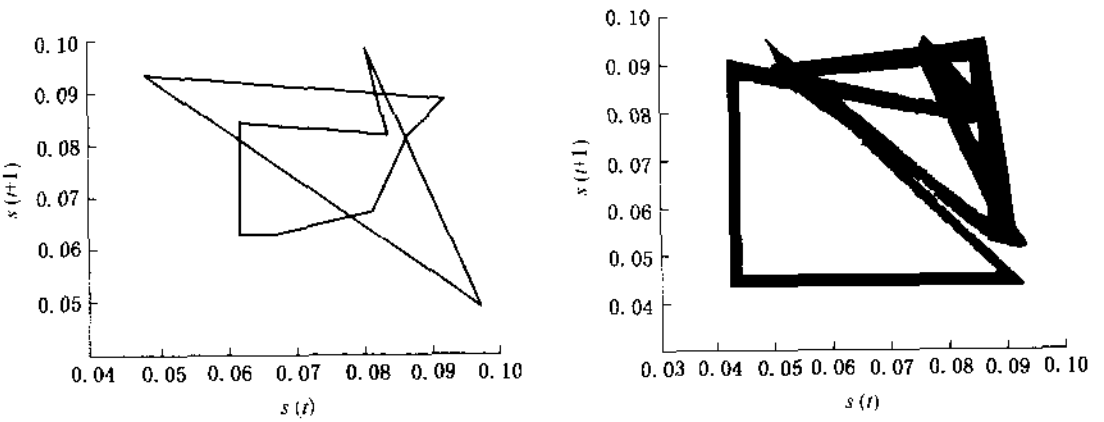
对图 8-2 进行“$s(t)-s(t+1)$”组成的相图分析，如图 8-3 所示。从图 8-3 中可以看出，当 $p=0.01$ 时，神经网络活动性呈现出明显的周期运动性态；当 $p=0.1$ 时，神经网络活动性开始呈现分叉周期轨道运动性态；当 $p=0.5$ 时，神经网络活动性已开始进入弱混沌运动轨道性态；当 $p=5$ 时，神经网络活动性进入了典型的混沌运动轨道性态。



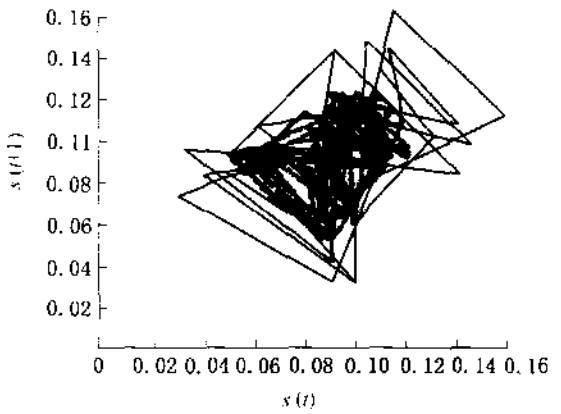
(a) p=0.01　　(b) p=0.1

(c) p=0.5　　(d) p=5

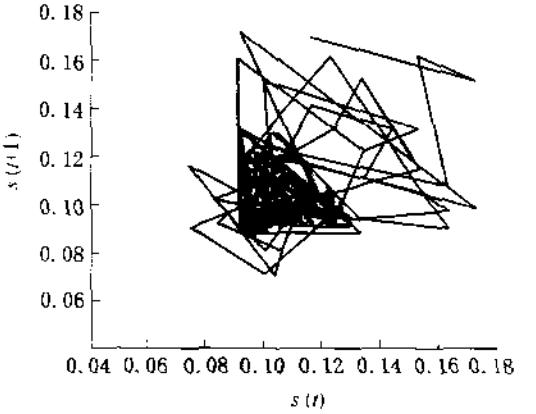
图 8-2　不同 p 值神经网络的活动性



(a) p=0.01　　(b) p=0.01



(c) p=0.01



(d) p=0.01

图 8-3　不同 p 值 $s(t)-s(t+1)$ 的相图

由于混沌轨道对初始条件十分敏感，进入混沌轨道的部位稍有差异，运动的轨迹将大不相同。从网络本身设计而言，一方面应当选择合理的 p 值，避免产生混沌现象，使网络能够稳定于定常吸引子或周期吸引子；另一方面可以选择合适的神经网络和调节神经元膜的传导性，以达到对不同性态的非线性动力学现象进行仿真的目的，这为研究混沌现象等非线性动力学特征提供了新的途径。同时也充分说明，神经网络是典型的复杂非线性动力学系统。

8.2　岩石本构关系的径向基函数神经网络快速逼近模型

由于岩石应力－应变关系即本构关系是进行岩石力学数值计算的基础，因而对岩石材料本构关系的描述成为众多学者长期关注的热点之一。如 Duncan、Chang[4] 提出了将弹模 E 和泊松比 ν 视为双曲线表达式的非线性弹性模型，殷有泉等[5] 研究了奇异屈服面的弹塑性本构关系和岩土介质在屈服面奇异点处的本构方程[6]，T. Kawamoto[7] 提出了岩体材料损伤本构关系等，这些研究成果大大促进了岩石力学与工程的进展。但是，由于岩石材料的复杂性，任何一种本构关系模型都难以对各种岩石材料的应力－应变关系作出真实的描述，这样便使得数值计算的结果与工程实际差别较大。另外，如果用弹塑性本构关系等进行数值计算，迭代过程往往要花费大量昂贵的机时，这也大大削弱了数值模拟的优势。将神经网络与数值计算方法结合已经成为一个新的趋势，如冯夏庭等[8] 提出了将 BP 神经网络用于岩石本构关系的表达思路，谭云亮等[9] 尝试基于具体岩石材料的应力－应变试验曲线，建立径向基函数神经网络快速逼近模型，为数值模拟中的本构关系更加切合岩石材料变形特征，更加接近工程实际要求和提高数值模拟的计算速度探索了新的途径。

8.2.1　径向基函数神经网络算法

神经网络的最大功能之一就是对复杂非线性函数的有效逼近。逼近的方式有两种：全局逼近和局部逼近。如果网络的一个或多个权值或自适应可调参数在输入空间的每一点对任何一个输出都有影响，则称为全局逼近，如多层前馈 BP 神经网络便是典型的例子。对

于每个输入、输出数据而言，由于网络的每一个权值均需要调整，从而导致全局逼近速度很慢；同时，由于权值的调整使用梯度下降法，存在局部极小和收敛速度慢等缺陷。如果对于输入空间的某个局部区域，只有少数几个权值影响网络的输出，则称为局部逼近。由于局部逼近神经网络对于输入、输出数据，只有少量的权值需要调整，从而学习速度快，其中 Broomhead 和 Lowe[10] 把 Powell[11] 提出的多变量插值径向基函数 RBF（Radial Basis Function）用于神经网络设计所构成的 RBF 神经网络便是成功的例子。与 BP 神经网络相比较，RBF 神经网络不仅学习速度快，而且避免了局部极小问题；同时，由于只有少量的权值需要调整，其推广能力显著增强，过拟和现象降低，从而导致对新样本的预测能力显著增强，这一点对岩石材料本构关系的逼近和预测具有重要意义。

如图 8－4 所示，RBF 神经网络包含两层：第一层为隐含层，传递函数为 RBF 非线性函数，它是一种局部分布对中心径向对称衰减的非负非线性函数；第二层为线性层，传递函数为线性函数。隐含层中每个神经元的权重和阈值定义了 RBF 函数的位置和宽度，一定量的隐含层 RBF 神经元数目和每一层正确的权重将能够逼近任意复杂函数并能达到设计的误差要求。从总体上看，由网络的输入到输出映射是非线性的，但从隐含层到输出层是线性的，这样网络权重就可以由线性方程组直接解出，这就是为什么 RBF 神经网络逼近速度快且避免了局部极小问题的缘由。

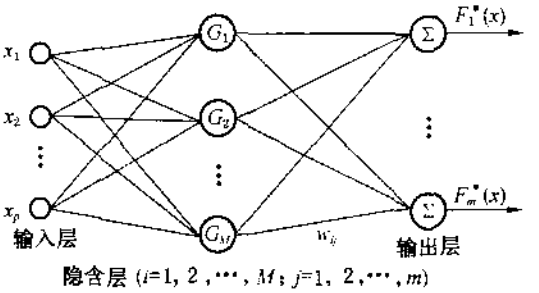


图 8－4　RBF 神经网络结构图

RBF 神经网络的学习过程为每次自动生成一个 RBF 神经元和调整相应的网络权重，这样不断地增加 RBF 神经元数目和调整权重，直至达到要求的误差指标和最大的训练步数为止。根据上述特点，RBF 神经网络的主要算法如下。

对于输入 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$，选取 RBF 为高斯函数：

$$\alpha_j(x)=\exp\left(-\frac{\|x-c_j\|^2}{\sigma_j^2}\right) \tag{8-8}$$

式中　c_j——第 j 个基函数的中心点，可根据文献［12］提出的自组织映射神经网络按照输入样本进行聚类分析确定；

σ_j——可以自由选取的参数，它决定该基函数围绕中心点的宽度；

$\|x-c_j\|$——向量 $x-c_j$ 的范数。

这样，随着 $\|x-c_j\|$ 的增大，$\alpha_j(x)$ 迅速衰减为 0，对于给定输入 $x\in R^n$，只有一小部分中心靠近 x 的处理单元被激活，也即达到局部逼近的目的。

这样，从输入层到隐含层便由式（8－9）实现非线性映射，从隐含层到输出层的线性关系可表示为

$$F_i^* = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}\alpha_j(x) \quad (i = 1,2,\cdots,M) \tag{8-9}$$

权重调节为

$$w_{ij}(L+1) = w_{ij}(L) + \beta[F_i^{*d} - F_i^*(L)]\alpha_j(x)/[\alpha^T(x)\alpha(x)] \tag{8-10}$$

式中 F_i^{*d}——第 i 个输出量的期望值；

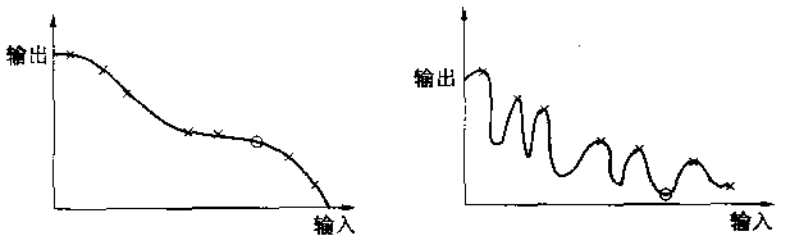
$F_i^*(L)$——第 i 个输出量第 L 次计算输出值；

β——学习率；

$\alpha(x)$——隐含层基函数映射向量。

8.2.2 推广能力的改进

推广能力是指经训练后的网络对未在训练集中出现的样本作出正确反应的能力。大量研究表明，BP 神经网络因每次学习后对网络权重进行全部调整，若过多学习特殊样本，且过分追求训练集内误差小，就会丧失推广能力。如图 8－5b 所示现象称为过拟合现象，这是因为过多学习时往往记住了个别特例以至于某些噪声而未能学到真正的规律。



(a) 推广能力好　　(b) 推广能力差

×—训练样本；○—推广样本

图 8－5　推广能力曲线图

虽然 RBF 神经网络采用局部逼近训练方法，网络本身结构已经改善了推广能力，但过拟合现象没有消除。为进一步改善网络的推广能力，根据文献［8］的研究结果，可将表征推广能力的判据加入网络中，即

$$\Delta F \geqslant \frac{n\lambda}{\Delta w 2\log_2\left(1+\frac{F}{E}\right)} \tag{8-11}$$

式中 Δw——训练过程中样本集相继两次训练完成时输入节点连接权值的算术平均值的差值；

ΔF——响应于某次训练完成时的权值对新样本辨识输出结果的方均根误差；

n——输入节点数；

λ——待定参数，试验表明 $\lambda = 1 \times 10^{-4}$；

F——训练样本归一化输出的均值；

E——训练样本归一化输出的均方根误差。

8.2.3 典型应力－应变曲线逼近分析

1. 大理岩典型应力－应变曲线

Rummel 和 Fairhurst 于 1970 年对大理岩在不同围压下的应力－应变关系进行了试验，曲线如图 8－6 所示[7]。从图中可以看出，侧压值 $\sigma_3 = 0 \sim 36\text{MPa}$ 时，属于应变软化阶段；侧压值 $\sigma_3 = 55\text{MPa}$ 时，属于应变硬化阶段。对图 8－6 中不同围压下的应力－应变曲线进行学习逼近和预测，基本上能够反映大理岩在不同应力条件下变形的规律。

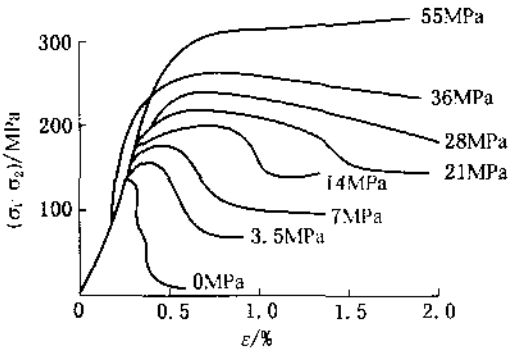


图 8－6 大理岩应力－应变试验曲线[7]

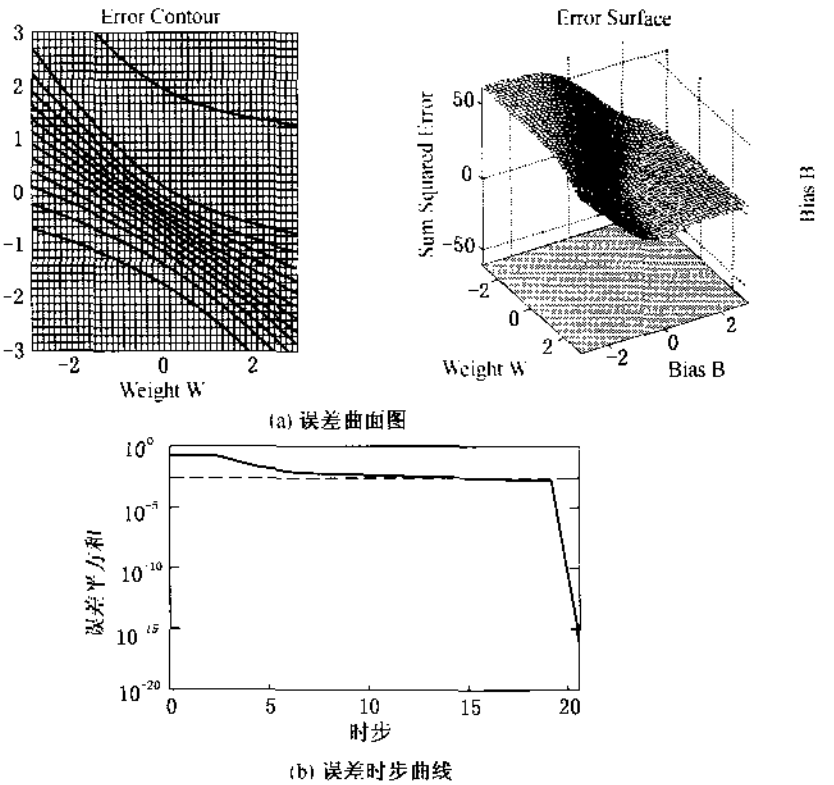


图 8－7 RBF 神经网络误差特征

2. 大理岩应力－应变曲线逼近训练学习

对应力－应变曲线逼近的 RBF 神经网络基本参数为：训练网络误差平方和目标值为 0.002，隐含层最多单元数为 100 个，RBF 分布常数 $\sigma_j = 0.1$。对图 8－6 中 $\sigma_3 = 0$，7MPa，28MPa，55MPa 时的应力－应变曲线进行学习训练，为了考察网络的稳定性，对 $\sigma_3 =$ 7MPa 时的误差变化特点进行分析。图 8－7a 所示为权重 w 和阈值在［－3，3］内变化时的网络误差平方和曲面图，从图中可以看出，网络误差曲面具有单一低谷点，稳定性很好。图8－7b所示为网络学习误差时步曲线，从图中可以看出，当学习次数达到 11 次即隐含层的神经网络为 11 个，学习时间为 11s 时，误差便达到精度要求。与相同目标要求的 BP 神经网络相比，BP 神经网络需要学习 18000 次，时间需要 144s，RBF 神经网络比 BP 神经网络提高学习速度约 13 倍。

经训练后，用学习样本即 $\sigma_3 = 0$、7MPa、21MPa、55MPa 时的应力－应变曲线进行测试，其结果如图 8－8 所示。从图中可以看出，拟合效果十分理想，平均拟合误差为 5%。

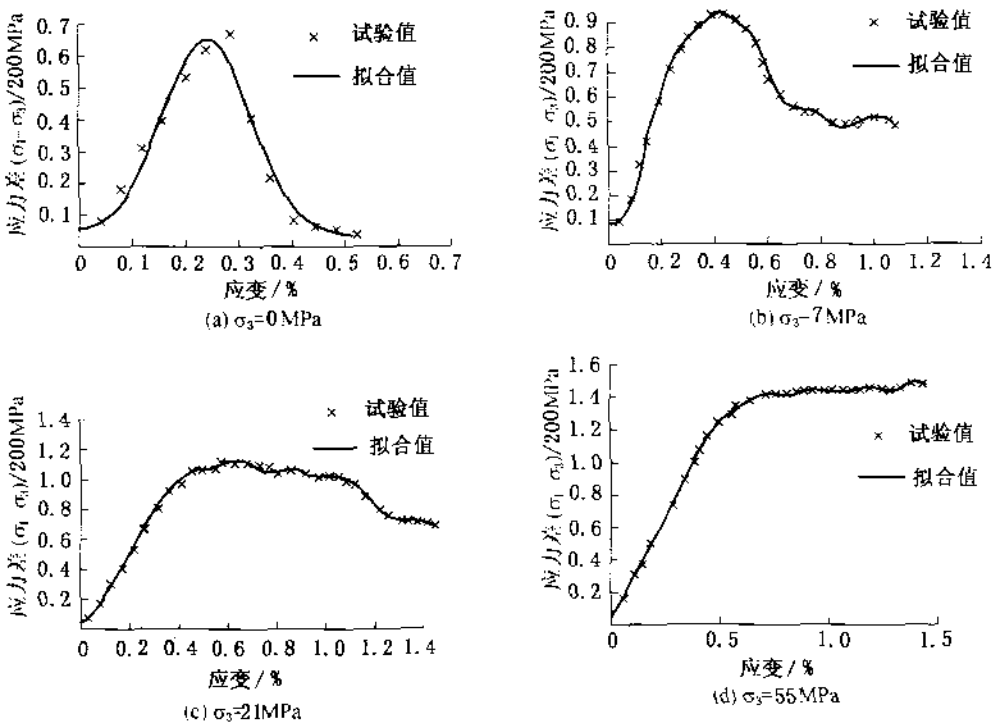


图 8－8　大理岩应力－应变曲线逼近结果

3. 大理岩应力－应变曲线预测分析

为了测试 RBF 神经网络对新样本的预测效果，对 $\sigma_3 = 0.35$，14MPa，28MPa 时的应力－应变曲线进行预测检验，其结果如图 8－9 所示。从图中可以看出，预测结果令人满意，不仅预测的趋势与试验结果一致，而且预测精度较高，预测平均误差为 8.9%。因此，用 RBF 神经网络对岩石本构关系通过试验数据进行学习训练，可以代替传统的弹塑

性本构关系，使得岩石力学数值方法向着快速、高效的目标迈进。

逼近工程实际的岩石本构关系是一项有待于长期研究的课题，通过建立径向基函数神经网络来逼近基于试验的岩石应力－应变曲线的结果表明，用径向基函数神经网络不仅能够很好地逼近任何岩石的本构关系，使得本构关系更加切合实际，具有广泛适用性；而且逼近速度非常快，远远优于其他弹塑性等本构模型的迭代计算，这为岩石力学数值计算的发展探索了新的途径。当然，有关这方面的研究还是初步的，需要进一步深化。

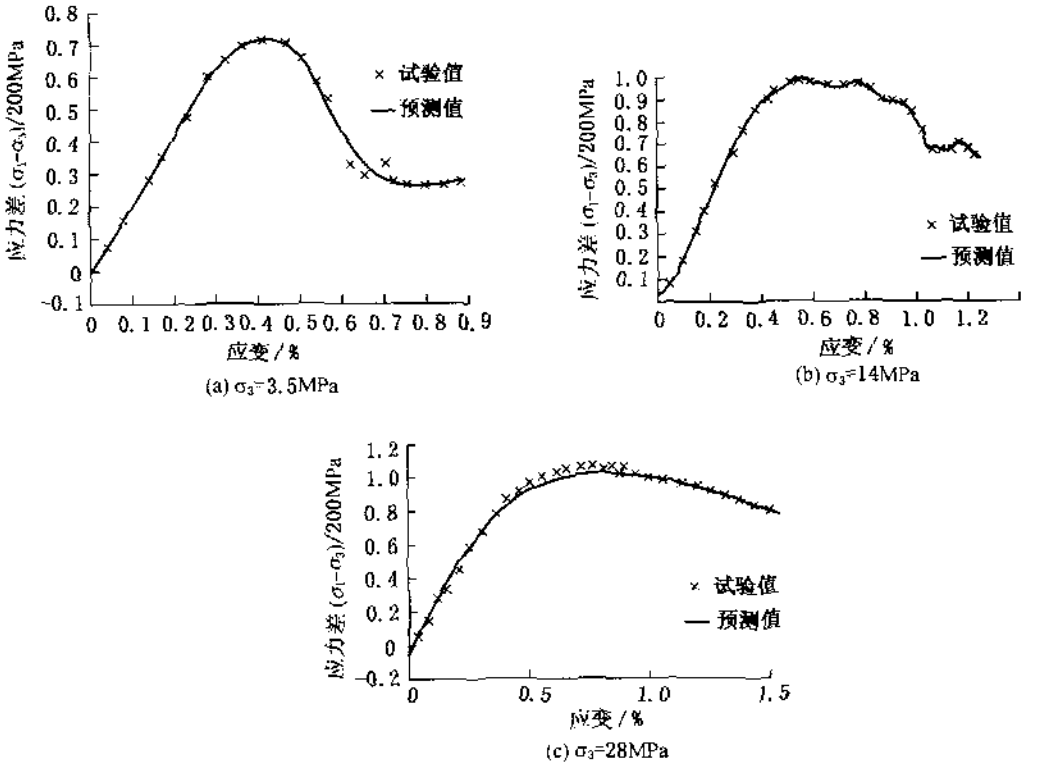


图 8-9　大理岩应力－应变曲线预测结果

8.3　分级加载下岩石流变的神经网络模型[13]

随着岩石工程向深部的延伸，岩石的流变研究越来越被人们重视，如深部矿山巷道支护、深部地下人防工程等都与岩石流变变形有关。许多学者对岩石流变模型作了大量的研究，这些工作主要集中在以下方面：

（1）根据室内流变试验结果，采用胡克弹性体、圣维南塑性体以及理想牛顿黏滞体等基本模型元件，以不同方式的组合构成复合流变力学模型来模拟岩石的流变行为。

（2）根据室内试验资料，采用回归方法建立岩石流变的经验本构关系式。

（3）针对岩石流变的加速蠕变特性及非线性流变，对基本元件进行改进，或采用元件模型理论与经验模型相结合的方法，建立岩石流变的非线性本构模型。

这些研究虽能在一定程度上反映岩石流变的特性，但仍存在以下局限性：

（1）尽管岩石的非线性流变特性已被大家所共识，但目前对岩石的非线性流变的某些特性还不十分清楚，尤其是对非线性流变的研究难度较大。文献［14，15］对岩石的非线性流变进行了初步研究，采用的是模型理论和经验模型相结合的方法，是一种半经验的修正理论。

（2）由于实际条件的限制，目前岩石的室内流变试验一般都是采用分级加载的方式进行，并按线性叠加原理整理试验结果，从而得到岩石的流变曲线。但岩石的流变一般都是非线性的，实际上岩石的非线性流变并不满足线性叠加原理，由线性叠加原理得到的流变曲线势必有一定的偏差，而且很多岩体工程所受到的载荷本身就是随施工进度或程序逐级施加的。

对分级加载下岩石的非线性流变研究具有重要的理论和实践意义。文献［16，17］虽然对分级加载下岩石的蠕变方程进行了推导，但仍是基于线性叠加原理的，因此对分级加载下岩石的非线性流变研究必须采用新的方法。宋飞等[13]基于 ANN 能逼近任何非线性点，建立分级加载下岩石流变的 BP 神经网络模型。

8.3.1 建模描述

许多岩石体所受的荷载常常因施工程序而逐级施加，目前的岩石流变室内试验一般均按分级加载方式进行。所谓分级加载，是指在同一试样上逐级加上不同的应力，即在一级应力水平下蠕变经历给定的时间或达到稳定后，将应力水平提高到下一级的水平，直到所需的应力水平。

对于线性流变体，分级加载下其蠕变方程可按线性叠加原理进行描述，或按线性叠加原理对蠕变曲线进行处理转化为分级加载曲线。对于非线性流变体，它不满足线性叠加原理，总蠕变变形不能简单地由每一级荷载的蠕变响应叠加而成。设岩石的非线性蠕变方程为

$$\varepsilon(t)=\sigma J_1(t)+\sigma^2 J_2(t,\ t)+\sigma^3 J_3(t,\ t,\ t)+\cdots \tag{8-12}$$

式中 $J_1(t)$——线性蠕变柔量；

$J_2(t,\ t)$，$J_3\ (t,\ t,\ t)$，……——系列非线性蠕变柔量。

对于某一级载荷增量 $\Delta\sigma$，在 Δt 作用时间内的蠕变响应为

$$\varepsilon(\Delta t)=\Delta\sigma J_1(\Delta t)+(\Delta\sigma)^2 J_2(\Delta t,\ \Delta t)+(\Delta\sigma)^3 J_3(\Delta t,\ \Delta t,\ \Delta t)+\cdots \tag{8-13}$$

由式（8－13）可以看出，对此级荷载其蠕变响应是 $\Delta\sigma$、Δt 的非线性函数，反映了应力高阶项的影响。同时，在此时间内还要考虑以上各级荷载的蠕变变形以及各级荷载的相互作用对变形的影响，在 Δt 时间内总蠕变变形还和前期荷载有关。对于三轴蠕变试验，蠕变变形还要受到围压大小的影响。

鉴于以上分析，建立如下关于时间 t 的增量型神经网络本构模型：

$$\Delta\varepsilon_{ph}=f(\sigma_p,\ \varepsilon_p,\ \Delta\sigma_p,\ \Delta t_{ph}) \tag{8-14}$$

式中 f——神经网络输出；

σ_p，ε_p——主应力及主应变；

$\Delta\sigma_p$——主应力增量；

$\Delta\varepsilon_{ph}$——时间增量和荷载增量的主应变增量；

Δt_{ph}——时间增量，其始终都是以施加荷载增量 $\Delta\sigma_p$ 的时刻作为初始时刻，下标 p 为荷载增量级数，h 为时间增量级数。

这样，由 σ_p，ε_p，$\Delta\sigma_p$ 和 Δt_{ph} 共 10 个分量作为输入节点，$\Delta\varepsilon_p$ 的三个分量作为输出单元，通过试验曲线上的数据点构造训练样本，对网络进行训练。对某一岩土材料进行不同加载方式的流变试验就可以建立该材料比较完备的流变神经网络本构模型。

8.3.2 试验验证分析

利用上述所建立的分级加载下岩土流变的神经网络模型，对某斜坡的石膏角砾岩的蠕变试验结果进行模拟，以验证该模型的正确性。

1. 石膏角砾岩的蠕变试验

石膏角砾岩试样取自山西省灵石县南关镇仁义河特大桥南岸斜坡位置，其常规三轴压缩试验的力学特征参见文献［18］。分别在三轴压缩流变仪上进行了浸水单轴和三轴压缩蠕变试验，试件直径为 50mm，高 100mm。蠕变试验采用单试件法，分级加载，其应力级一般为 7～8 级，围压分别为 0，1.0，2.0，3.0，4.0MPa，蠕变曲线如图 8－10 所示。

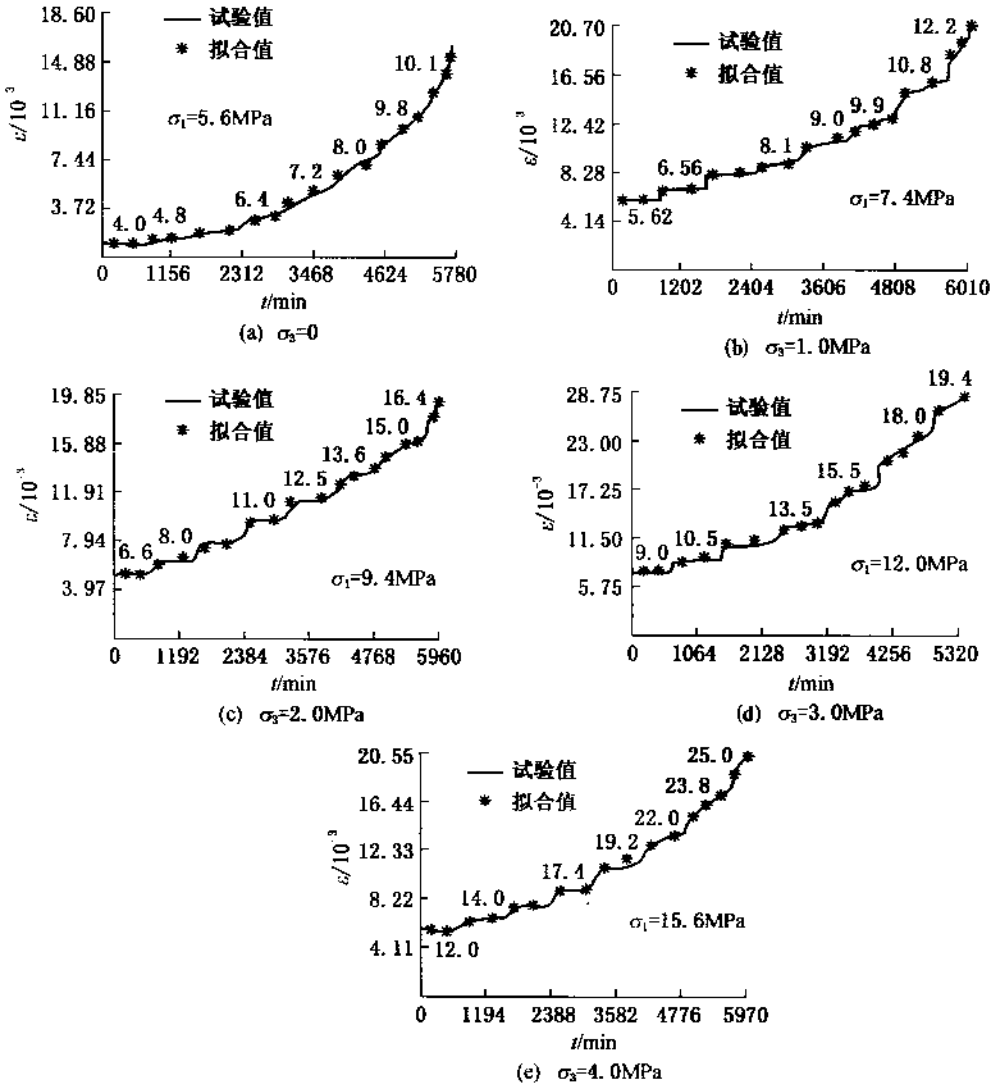


图 8－10 石膏角砾岩蠕变曲线

2. 网络模型的训练及预测分析

网络模型采用三层 BP 网络结构，网络系统误差取 5×10^{-10}，在（-1，1）内随机选取初始权值和阈值，激活函数采用 S 型函数，采用自适应调整学习速率法。调整准则为：如果前一时刻的学习速率降低了误差，则增加学习速率 1.01～1.05 倍；如果前一时刻的学习速率使误差升高得较多如 1.04 倍，则降低学习速率 0.5～0.9 倍；误差在其他情况下学习速率不变。对图 8-10 中 $\sigma_3=0$，2.0MPa，4.0MPa 时的蠕变曲线选取试验数据，并进行归一化处理，作为网络训练样本，进行网络训练。

通过试算确定隐含层神经元数为 12。当网络训练了 13471 次后，系统误差满足要求，停止训练。用训练好的网络对学习样本即 $\sigma_3=0$，2.0MPa，4.0MPa 时的蠕变曲线进行拟和，其结果如图 8-10a、图 8-10c 和图 8-10e 所示。各图效果较好，平均拟合误差为 4.7%。

然后，用训练好的网络对 $\sigma_3=1.0$MPa，3.0MPa 时的蠕变曲线进行预测，结果如图 8-10b、图 8-10d 所示。从图中可以看出，网络泛化能力较强预测效果较好，预测平均误差为 7.8%，结果令人满意，说明用人工神经网络模型可以有效描述分级加载下岩石流变的非线性特性，从而解决了分级加载下用线性叠加原理来描述非线性流变的问题。同时，神经网络具有很强的容错性，即试验数据的局部不准确不会影响到整个网络的性能，这为研究岩石的流变特性特别是分级加载下岩石的非线性流变特性提供了一条新途径。

8.4 冲击地压 AE 时间序列小波神经网络预测模型

近些年来，人们对岩石破坏孕育过程中的声发射特征进行了大量的研究[19-21]，这些成果为用声发射监测预报冲击地压的发生奠定了良好的基础。在国内外煤矿开采中，通过监测到的声发射时间序列进行分析并对其发展的趋势进行预测已经成为预报冲击地压的主要手段之一。其中，灰色模型[22]和神经网络模型[23]用于时间序列的预测发展最快。但预测研究[24]表明，灰色模型较适合于“指数增长型”的时间序列，而传统的神经网络方法往往因难以科学地确定其网络的结构且学习训练参数易陷入局部极小的状况，影响预测的精度和可靠性。为此，谭云亮等[25,26]建立了小波神经网络预测模型，以避免人为给定网络结构参数的弊端，并使网络达到最佳的逼近效果，以保证冲击地压时间序列预测的可靠性。

8.4.1 小波神经网络传递函数

小波神经网络是通过小波变换和神经网络有机的结合，即采用非线性小波基函数代替非线性 Sigmoid 等传递函数来构造神经网络的拓扑结构。它是通过对小波的分解平行和伸缩变换，即采用平行因子和收缩因子而得到新的级数，比一般的小波具有更多的自由度，可进一步优选适当的参数，用较少的级数项组成小波神经网络，达到对给定时间序列的最佳逼近。

对于满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi)|^2|\xi^{-1}|\,\mathrm{d}\xi<+\infty \tag{8-15}$$

的平方可积函数 $\varphi(t)\in L^2(R)$ 为母小波，其中，$\hat{\varphi}(\xi)$ 为 $\varphi(t)$ 的 Fourier 变换。

令
$$\varphi_{ab}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{8-16}$$

其中，a、b 为实数，且 $a\neq 0$，称 $\varphi_{ab}(t)$ 为由母小波生成的依赖于 a、b 的连续子波，也称为小波基。

对于非线性函数 $f(t)\in L^2(R)$，其小波变换可以表示为

$$k_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(f)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t \tag{8-17}$$

在式（8-16）、式（8-17）中，b 起着平移作用，a 决定着 $\varphi_{ab}(t)$ 的频谱结构、窗口大小和形状。因此，a、b 可称为 $\varphi_{ab}(t)$ 伸缩因子和平移因子，对于函数 $f(t)$ 的局部结构的分辨率可以通过调节 a、b 来实现。与 Fourier 分析相似，小波分析同样是将信号函数分解为小波标准正交基，并以此来逼近信号函数。但由于小波基具有良好的局部化性质，能够实现对信号函数最佳的逼近。

取不同的伸缩因子 a_i 和平移因子 b_i 决定的小波基 $\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,N)$ 作为神经网络传递函数，即由

$$\varphi_i(t)=\frac{1}{\sqrt{|a_i|}}\varphi\left(\frac{t-b_i}{a_i}\right) \tag{8-18}$$

代替 Sigmoid 等传递函数，来达到对任意函数的最佳逼近。

8.4.2 小波神经网络预测模型

选用小波基级数有限项的线性叠加来逼近 AE 时间序列函数，即

$$\hat{u}(t)=\sum_{i=1}^{N}w_i\varphi_i\left(\frac{t-b_i}{a_i}\right) \tag{8-19}$$

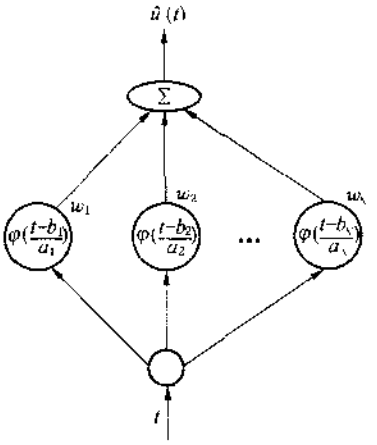


图 8-11 小波神经网络拓扑结构

式中 $\hat{u}(t)$——声发射时间序列 $u(t)$ 的预测值；

w_i——权重；

N——小波基的个数。

对于如图 8-11 所示的单层节点且仅有一个输入 t、一个输出 $\hat{u}(t)$ 小波神经网络，可以通过下式所示的最小均方误差能量函数对网络的结构参数 w_i，a_i，b_i 和 N 进行优化，即

$$E_N=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}[y(t)-\hat{y}(t)]^2 \tag{8-20}$$

其中，N 值可以根据逐步检验的方法来确定：给定允许的拟和误差 ε，先从 $N=1$ 开始计算，逐步计算 E_i，若 $E_i<\varepsilon$，则取 $N=i$；否则继续下去，直到 $N=N^*$ 时使得 $E_{N^*}<\varepsilon$ 为止，此时，取 $N=N^*$。

对于每个给定的 N，通过式（8-20）进一步计算参数 w_i，a_i，b_i，步骤如下：

（1）选用 Morlet 母小波：

$$\varphi(t)=\cos(1.75t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \tag{8-21}$$

（2）令 $\eta=(t-b_i)/a_i$，$\hat{u}=-\sum[u(t)-\hat{u}(t)]$，则求得 w_i，a_i，b_i 的梯度为

$$g(w_i)=\frac{\partial E_N}{\partial w_i}=\hat{u}\cos(1.75\eta)\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}} \tag{8-22}$$

$$g(b_i)=\frac{\partial E_N}{\partial b_i}=\frac{\hat{u}w_i}{a_i}[1.75\sin(1.75\eta)+\eta\cos(1.75\eta)]\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}} \tag{8-23}$$

$$g(a_i)=\frac{\partial E_N}{\partial a_i}=\frac{\hat{u}\eta w_i}{a_i}[1.75\sin(1.75\eta)+\cos(1.75\eta)]\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}$$

（3）采用共轭梯度法优化参数 w_i，令权重向量 $w=(w_1, w_2, \cdots, w_N)$，若 w 的第 k 次的搜索方向记为 $s(w)^k$，则有

$$s(w)^k\begin{cases}-g(w)^k & ,k=1 \quad (8-24)\\ -g(w)^k+\dfrac{g(w)^{kN}g(w)^k}{g(w)^{(k-1)N}g(w)^{k-1}}\cdot s(w)^{k-1} & ,k\neq 1 \quad (8-25)\end{cases}$$

（4）权重向量按下式调节：

$$w^{k+1}=w^k+a_w s(w)^k \tag{8-26}$$

其中，a_w 为搜索步长，一直到 w 收敛于某一确定值为止。

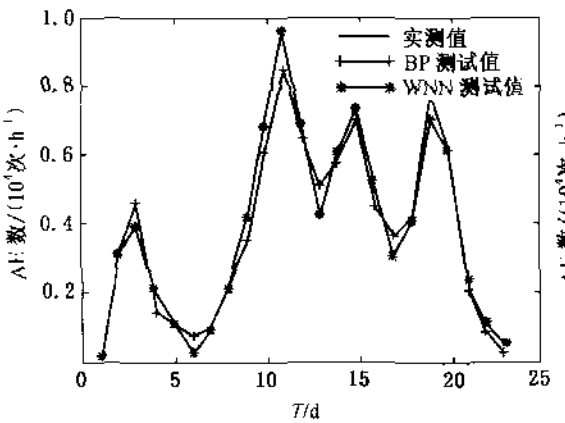
（5）同理，按照上述方法对参数 a_i、b_i 进行优化。

8.4.3 应用举例

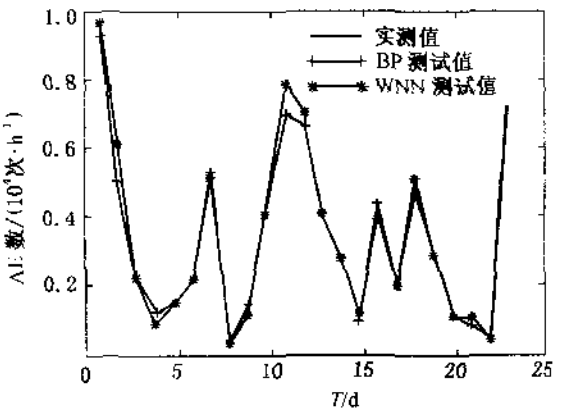
原北京矿务局门头沟矿 20 队工作面西区第三刀柱西二下山安设 Y1、Y2、Y3 三个声发射探头，以监测冲击地压发生的情况，1986 年 6 月 1 日至 23 日共监测研究 23 天。对监测到的声发射 AE 能率数，分别用 BP 神经网络和本书提出的小波神经网络 WNN 进行训练学习和预测分析，其结果如图 8－12 所示。

对三个钻孔的 AE 能率数预测误差分析表明，本书提出的 WNN 网络的预测绝对误差平均为 1.1%，而 BP 网络的预测绝对误差平均为 6.7%，具体见表 8－1。这说明，WNN 网络预测结果远好于 BP 网络预测结果。

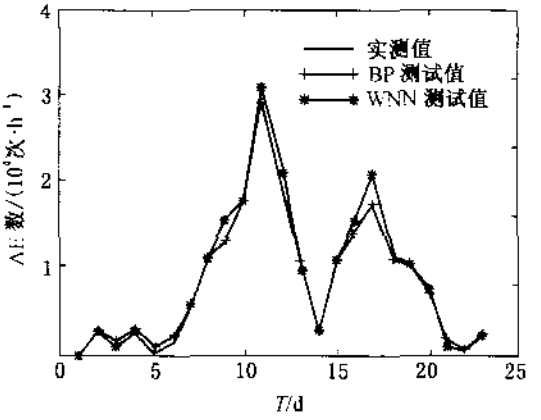
综上所述，小波神经网络预测模型有效地避免了传统神经网络需要人为给定网络参数的不足，通过伸缩和平移因子决定的正交小波基函数代替 Sigmoid 等传递函数，使得网络能够达到最佳逼近的效果。实例分析表明，该模型预测精度高，对冲击地压监测到的声发射等时间序列分析与预测，具有重要的应用价值。



(a) Y1 钻孔



(b) Y2 钻孔



(c) Y3 钻孔

图 8-12 门头沟矿声发射时间序列预测结果图

表 8-1 预测绝对误差对比表 %

钻 孔	Y1	Y2	Y3	平 均
BP 网络	7.8	5.5	6.8	6.7
WNN 网络	1.4	0.7	1.2	1.1

8.5 巷道分类指标的神经网络聚类分析模型

巷道的分类是决定选择巷道的支护形式、进行合理支护设计的基础；而合理的选择能够反映巷道类别的指标，又是进行巷道分类的前提条件。在采矿工程中，由于巷道围岩系统是典型的非线性系统，各分类指标之间往往存在着非线性相关性，在实际中可选择的指标往往很多，如地质因素、受力源、围岩物理力学性质、开采技术条件等方面。作为分类指标，一方面，必须遵循能够从各个不同的侧面较全面地反映巷道的属性，这就要求指标多；另一方面，从工程应用的角度讲，指标过多则给分类和应用带来困难。很显然，需要寻求一种解决上述矛盾的有效途径。

人工神经网络通过连接强度的调整，表现出类似人脑的学习、归类和分类特征。谭云亮等[27,28]通过建立神经网络聚类分析模型，对巷道分类指标进行聚类分析，以达到用尽量少而且全的指标，对巷道进行合理分类的目的，即起到对指标进行“分选”的作用。

8.5.1 有监督学习与无监督学习

神经网络模型是由网络的拓扑结构、神经元特性和学习或训练规则这三个因素所决定的，这里主要对有监督学习算法和无监督学习算法进行比较和分析。

1. 有监督学习算法

有监督学习算法是通过外部“示教者”（或“导师”）进行学习，对于给定的输入模式，当实际的输出结果和正确的期望输出（导师信号）有误差时，网络将通过调节相应的连接强度和机制，向减少误差的方向改变连接强度，通过多次训练.，最后和正确的结果

相符合。在这类算法中最著名的是带隐含层的网络反向误差传播算法（Back propagation algorithm）简称 BP 算法。

2. 无监督学习算法

无监督学习算法则不需要导师信号，学习表现为自适应于输入空间的检测规则，其学习过程为：给系统提供动态输入信号以使各个单元以某种方式竞争，“获胜者”神经元本身或其相邻域得到增强，其他神经元进一步抑制，从而将信号空间划分成有用的多个区域。竞争学习算法是这类算法比较典型的一种，还有如 ART 算法[29]和 Kohonen 的拓扑映射[30]都采用这种学习规则。

8.5.2 基于无监督学习的聚类分析模型

1. 自组织特征映射无监督聚类法的思路

自组织特征映射法是一种无师监督的聚类方法。与传统的模式聚类相比较，它所形成的聚类中心能映射到一个曲面或平面上，而保持拓扑结构不变。设 $X \in R^k$ 为输入模式向量，W 为权值向量矩阵，$Y \in R^N$ 为输出节点的匹配响应，如图 8-13 所示。

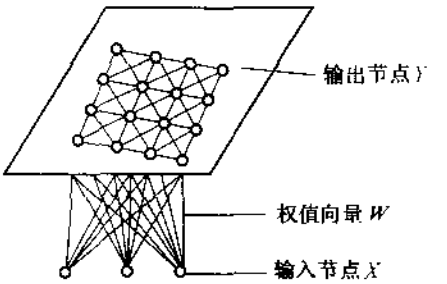


图 8-13 自组织特征映射神经网络

在时刻 t 有

$$Y = W \oplus X \tag{8-27}$$

其中，$\oplus$ 代表一种运算，选择该种运算为 Euclidean 距离运算，即

$$Y = \| W(t) - X(t) \| E \tag{8-28}$$

输出节点响应的大小意味着该节点关于输入模式矢量的匹配程度。求最佳匹配的条件为

$$Y_{opt}(t) = \min[y_i(t) \mid i = 1, 2, \cdots, N] \tag{8-29}$$

然后在该节点及其拓扑领域依下列规则作调整：

$$W_{ij}(t+1) = \alpha(t)[x_i(t) - W_{ij}(t)], i \in N_c(t) \tag{8-30}$$

其中，$\alpha(t)$ 为调节系数，$N_c(t)$ 为 t 时刻以 c 为中心神经单元个数。

2. 无监督聚类法实现过程

根据上述思想，无监督聚类法网络拓扑结构如图 8-14 所示，实现将 k 个输入模式 $X_k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$ 聚为 p 个类别，其中 x_i^k 为输入模式的 n 个分量。

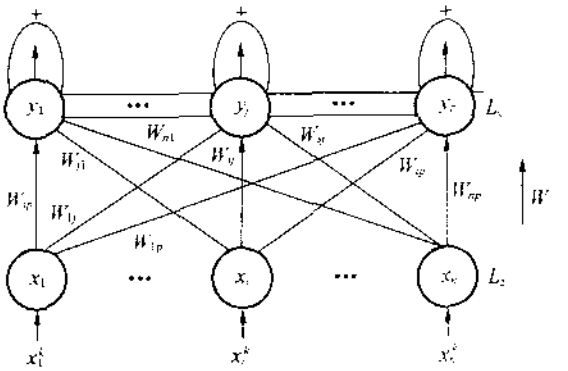


图 8-14 无监督聚类法网络拓扑结构

实现聚类分析的算法过程如下：

（1）激活所有的输出节点 $i(i=1, 2, \cdots, I)$。

（2）初始化权值 $W_{ij}=\varepsilon_{ij}$，此处 ε_{ij} 为随机函数（$-1<\varepsilon_{ij}<+1$）。

（3）输入模式向量 $\{x_j\}(j=1, 2, \cdots, N)$。

（4）计算 Euclidean 距离平方 $ED_{ij}^2=\sum_{j=1}^{N}(W_{ij}-X_j)^2$。

（5）确定节点 i 是否满足 $ED_{ij}^2<ED_{kj}^2$，所有的 $K=1, 2, \cdots, I, K\neq i$。

（6）若满足 $ED_{ij}^2\leqslant ED_{kj}^2$（Threshold），则指定模式 $\{x_j\}$ 归属于节点 i，此处 ED_{kj}^2（Threshold）是可选择的极限半径，超出该半径，则认为不属于 i 类。

（7）更新权系数 $W_{ij}(n+1)=\frac{1}{n+1}W_{ij}(n)+\frac{1}{n+1}x_j$，$n$ 的初值为 0，在输入第一个模式后，$W_{ij}(1)=x_j$。

（8）输入下一模式，确定其属于哪个节点，并相应地更新 $\{W_{ij}\}$ 权值。

8.5.3 回采巷道分类指标无监督学习聚类分析

1. 回采巷道分类指标的选取

（1）三个围岩强度指标（$\sigma_{顶}$，$\sigma_{底}$，$\sigma_{帮}$）。对于围岩强度，选取围岩单轴抗压强度，并分为顶板强度 $\sigma_{顶}$、底板强度 $\sigma_{底}$、两帮强度 $\sigma_{帮}$。$\sigma_{顶}$ 取下位直接顶 4～5m 范围内各岩层的加权平均值，$\sigma_{底}$ 取直接底 3m 范围内各岩层的加权平均值；$\sigma_{帮}$ 取两帮 3m 范围内岩层的加权平均值。

（2）岩体品质因数 Q 指标。1974 年 Barton 提出了著名的岩体节理影响指标——岩体品质因数 Q。Q 值能够充分反映节理对围岩稳定性的影响，能够充分体现地质作用的影响。

（3）煤柱尺寸影响系数 ξ。回采巷道与一般的普通巷道相比，除了在地质条件、围岩物理性质、巷道本身形状及尺寸等基本条件相同以外，它还有一个重要的不同点，即受回采所产生的支承压力的影响。若不考虑邻近回采工作面采空区稳定以后掘巷的情形，根据巷道受采动影响的程度，巷道类型可以划分为沿空留巷、小煤柱护巷和大煤柱护巷三种类型。事实上，由于对沿空留巷的情形可以视煤柱尺寸为 0，而大煤柱护巷相当于不受采动影响，所以用煤柱尺寸可以表征回采压力的影响。对文献［31］的资料整理分析表明，对于不同煤层强度，极限稳定煤柱尺寸宽度 B 随采深 H（m）的关系如下：

$$B=\begin{cases}15.43+0.098H, & \sigma_c<10\text{MPa}\\ 8.43+0.046H, & 10\leqslant\sigma_c\leqslant20\text{MPa}\\ 5.34+0.0326H, & \sigma_c>20\text{MPa}\end{cases}\tag{8-31}$$

定义煤柱尺寸影响系数 ξ 为

$$\xi=1-\frac{B'}{B}\tag{8-32}$$

式中 B'——实际留设的煤柱尺寸。

因此，用煤柱尺寸影响系数 ξ 可以体现回采压力的影响程度。

（4）顶板组合影响强度 R_1。顶板上位、下位结构组合状况，对巷道稳定性影响很大。比如，在 4～5m 范围内的顶板，在岩性及各分层厚度相同的情况下，“上硬－下软”和

“下硬－上软”两种不同结构组合对巷道围岩稳定性影响大不一样。一般情况下，“下硬－上软”型更不利于巷道围岩稳定性，因此，对下位 2m 厚度范围顶板给予权重 W_1 为 0.65，上位 3m 厚度范围顶板给予权重 W_2 为 0.35。定义上位 3m、下位 2m 厚度顶板岩层的加权平均强度为顶板组合影响强度 R_I，即

$$R_I = \frac{1}{2}W_1\sum \sigma_{下i}m_{下i} + \frac{1}{3}W_2\sum \sigma_{上i}m_{上i} \tag{8-33}$$

（5）巷道跨度 L。巷道跨度 L 的大小对回采巷道稳定性影响较大，一般来说，跨度越大稳定性越差，跨度越小稳定性越好。

（6）采深 H。同一围岩性质的巷道，处于不同的采深，其应力状态及显现规律不一样。在重力型地应力作用下，采深 H 越大越不易支护。因此，选择采深作为重力型地应力指标来反映巷道稳定性。

（7）倾角 α。岩层倾角的大小不仅对巷道断面的成形影响较大，而且对巷道稳定性和支护形式的选择也有较大的影响。

2. 回采巷道稳定性分类指标无监督学习聚类分析

综合上述 9 项指标，可将巷道分为 4 类，其分类指标标准值见表 8－2。

表 8－2　回采巷道分类指标标准值

指　标	$\sigma_{顶}$/MPa	$\sigma_{底}$/MPa	$\sigma_{帮}$/MPa	Q	ξ	R_I/MPa	L/m	H/km	α/(°)
Ⅰ类（极难支护）	5	2	0.5	0.1	1	10	2.8	0.3	45
Ⅱ类（难支护）	25	20	10	1	0.7	20	3.2	0.5	25
Ⅲ类（较易支护）	50	35	20	5	0.4	30	4.8	0.8	15
Ⅳ类（易支护）	80	60	30	10	0	40	6.0	0.9	10

按照表 8－2 所述指标顺序建立数据文件，利用已编好的聚类分析程序，对上述 9 项指标进行如下聚类分析研究：

（1）当门限值 Threshold 取 6 时，指标聚为 7 个类别：$\{\sigma_{顶},\sigma_{底},\sigma_{帮}\}$，$\{Q\}$，$\{\xi\}$，$\{R_I\}$，$\{L\}$，$\{H\}$，$\{\alpha\}$。

（2）当门限值 Threshold 取 15 时，指标聚为 6 个类别：$\{\sigma_{顶},\sigma_{底},\sigma_{帮}\}$，$\{Q\}$，$\{\xi\}$，$\{R_I\}$，$\{H\}$，$\{L,\alpha\}$。

（3）当门限值 Threshold 取 20 时，指标聚为 5 个类别：$\{\sigma_{顶},\sigma_{底},\sigma_{帮}\}$，$\{Q\}$，$\{\xi,H\}$，$\{R_I\}$，$\{L,\alpha\}$。

（4）当门限值 Threshold 取 30 时，指标聚为 4 个类别：$\{\sigma_{顶},\sigma_{底},\sigma_{帮}\}$，$\{Q,R_I\}$，$\{L,\alpha\}$，$\{\xi,H\}$。

（5）当门限值 Threshold 取 50 时，指标聚为 3 个类别：$\{\sigma_{顶},\sigma_{底},\sigma_{帮},Q,R_I\}$，$\{\xi,H\}$，$\{L,\alpha\}$。

以上结果表明，随着 Threshold 值的增大，指标所聚的类别数减少。如 Threshold 取 30 时，指标聚成 4 类。在这 4 个类别中，顶板强度 $\sigma_{顶}$、底板强度 $\sigma_{底}$、两帮强度 $\sigma_{帮}$ 是从围岩的物理力学性质方面来反映巷道的属性；Q 值、顶板组合影响强度 R_I 则是侧重于节理、

构造及顶板组合状况来反映巷道的属性；而煤柱尺寸影响系数 ξ 及采深 H 是从巷道围岩的受力状况来反映巷道属性；至于巷道跨度 L 和倾角 α 则是以开采的技术条件和工程环境来反映巷道属性。以上聚类结果与实际情况基本吻合。

8.5.4 软岩巷道分类指标无监督学习聚类分析

以软岩巷道分类指标为例，验证上述聚类分析模型的可靠性。根据文献［32］所选用识别软岩巷道类别指标经标准化处理的值见表 8－3。

表 8－3 软岩巷道分类指标经标准化处理的值

指 标	Ⅰ类(极软)	Ⅱ类(较软)	Ⅲ类(中稳)	Ⅳ类(稳定)	平均值
单向抗压强度 σ_c/MPa	1.5	5	12.5	20	9.75
软化系数 n	0.24	0.44	0.51	0.58	0.44
颗粒接触化 k	0.4	0.45	0.5	0.55	0.475
裂隙间距 d/cm	6.5	30	105	180	80.38
黏聚力 C/MPa	2	4	7	10	5.75
饱和含水量 ω/%	0.17	0.14	0.12	0.09	0.13
抗压人指标 $\sigma_{压人}/\gamma H$	1	1.7	2.6	3.5	2.2

利用上述无监督学习神经网络聚类分析算法，得到如下结论：

（1）当 Threshold 取 3 时，指标聚为 5 个类别：$\{\sigma_c\}$，$\{n,k,\omega\}$，$\{C\}$，$\{\sigma_{压人}/\gamma H\}$，$\{d\}$。

（2）当 Threshold 取 7 时，指标聚为 4 个类别：$\{\sigma_c\}$，$\{n,k,\omega,\sigma_{压人}/\gamma H\}$，$\{d\}$，$\{C\}$。

（3）当 Threshold 取 15 时，指标聚为 3 个类别：$\{\sigma_c,C\}$，$\{n,k,\omega,\sigma_{压人}/\gamma H\}$，$\{d\}$。

上述结果表明，随着 Threshold 值的增大，指标所聚的类别数减少。如当 Threshold 取 15 即指标聚为 3 个类别时，各类别中的指标性质相近，都是从相同的侧面反映巷道属性：单向抗压强度 σ_c、黏聚力 C 都属于岩石本身力学性质，n，k，ω，$\sigma_{压人}/\gamma H$ 主要是侧重软岩固有物理性质，而裂隙间距 d 则是侧重于地质构造作用。这说明了用无监督学习聚类分析的结论与反映软岩类型指标的性质吻合程度较好。应当指出，Threshold 的取值大小应根据工程需要决定，不同的问题及不同的聚类要求将有不同的 Threshold 取值。

通过上述实例可以看出，自组织性的神经网络基于无监督学习算法，建立神经网络聚类分析模型，对巷道分类指标进行聚类分析，聚于每一类的指标，都具有相同或相近的性质，与实际情况吻合较好，该方法具有较高可信度，令人满意。同时，通过无监督学习神经网络聚类分析，一方面，可以对性质相近的指标进行归类，发现共性；另一方面，对相近性质的指标进行合理减少，从而达到指标少而且全面，使分类得以简化的目的。

8.6 巷道稳定性类别的神经网络识别方法

正如 8.5 节讨论的，巷道围岩是一典型的复杂非线性动力学系统，评价巷道稳定性类别的指标有许多，相互之间有着复杂的关联性。例如，巷道稳定性极限状态的高度和宽度

之间是相互影响的，按照力学优化的原则，当改变巷道高度（或宽度）时，其围岩周边达到或近似达到等应力状态的巷道宽度（或高度）也必须随之改变。因此，考虑评价各因素之间的非线性关联性，建立巷道稳定性类别神经网络识别模型[33]十分重要。

8.6.1 多输入节点小波神经网络识别模型

对巷道围岩稳定性类型识别系统而言，影响的因素有很多。若有 I 个影响因素，则可以把这 I 个影响因素(x_1，x_2，…，x_I)作为输入节点，巷道所属稳定性类别作为输出节点，如图 8－15 所示。

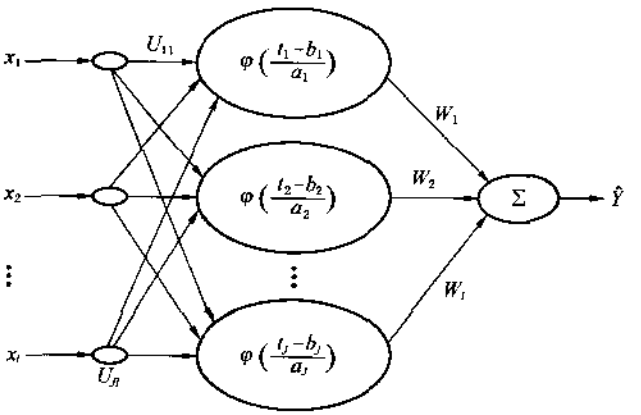


图 8－15　多输入节点小波神经网络结构

这样巷道稳定性类别所属的预测值 $\hat{Y}$ 可表示为由小波基有限项线性叠加。

$$\hat{Y}=\sum_{j=1}^{J} W_j\varphi\left(\frac{t_j-b_j}{a_j}\right) \tag{8-34}$$

式中　W_j——第 j 个小波基单元输出的权重。

对于第 j 个小波基单元的输入 t_j 有

$$t_j=\sum_{i=1}^{I} U_{ji}x_i \tag{8-35}$$

式中　U_{ji}——第 i 个输入 x_i 连接第 j 个小波基单元的权重。

则式（8－34）可以表达为

$$\hat{Y}=\sum_{j=1}^{J} W_j\varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^{I} U_{ji}x_i-b_j}{a_j}\right) \tag{8-36}$$

若有 Q 个训练样本 x_1^k，x_2^k，…，x_I^k，Y^k($k=1$，2，…，Q)，通过网络学习与训练，确定网络参数 U_{ji}，a_j，b_j，w_j 及 J 值。

利用最小均方差能量函数进行优化：

$$E_Q=\frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{Q}[Y^k-\hat{Y}^k]^2 \tag{8-37}$$

其中，J 值可以根据逐步检验的方法来确定：给定允许的拟和误差 ε，先从 $J=1$ 开始

计算，逐步计算 E_j，若 $E_j < \varepsilon$，则取 $J = j$；否则继续下去，直到 $J = J^*$ 时使得 $E_{J^*} < \varepsilon$ 为止，此时，取 $J = J^*$。

通常，选用 Mrolet 母小波

$$\varphi(x) = \cos(1.75x)e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8-38}$$

对于每个给定的 J，可进一步计算参数 W_j，a_j，b_j 及 U_{ji}，采用误差反向传播训练算法来调节 WNN 中小波基函数的参数和网络的连接权值，其具体学习算法如下：

（1）初始化小波神经网络各参数，将小波基函数的尺度因子 a_j、平移因子 b_j 以及网络节点连接权值 U_{ji}、W_j 赋以随机的初始值。

（2）输入学习样本 $x_i^k(i = 1, 2, \cdots, I; k = 1, 2, \cdots, Q)$ 和相应的期望输出 Y^k，其中 Q 为学习样本数。

（3）根据式（8-36），利用当前的网络参数计算小波神经网络模型的输出值。

（4）利用最速下降法修改小波神经网络各参数：

$$U_{ji} = U_{ji} - \eta \frac{\partial E}{\partial U_{ji}} + \alpha \Delta U_{ji} \tag{8-39}$$

$$W_j = W_j - \eta \frac{\partial E}{\partial W_j} + \alpha \Delta W_j \tag{8-40}$$

$$a_j = a_j - \eta \frac{\partial E}{\partial a_j} + \alpha \Delta a_j \tag{8-41}$$

$$b_j = b_j - \eta \frac{\partial E}{\partial b_j} + \alpha \Delta b_j \tag{8-42}$$

式中 η——学习率；

α——动量因子。

（5）当网络误差小于预先设定值或学习步数达到最大训练步数时，停止小波神经网络的学习，否则返回步骤（2）。

8.6.2 巷道稳定性类别实例

以阜新、肥城、兖州、淄博、新汶、徐州、淮南等局的 15 条回采巷道的观测资料作为学习的样本。输入单元数 9 个，输出单元 1 个，网络节点特征见表 8-4。

表 8-4 网络节点特征

输入单元		输出单元	
x_1：采深	x_2：采高	$Y = 0 \sim 0.2$：	稳定性极好
x_3：倾角	x_4：煤柱尺寸	$Y = 0.2 \sim 0.4$：	稳定性好
x_5：顶板强度	x_6：底板强度	$Y = 0.4 \sim 0.6$：	稳定性中等
x_7：两帮强度	x_8：巷道宽度	$Y = 0.6 \sim 0.8$：	稳定性差
x_9：巷道高度		$Y = 0.8 \sim 1.0$：	稳定性极差

将 15 条回采巷道样本特点单位化后进行学习，其输入单元样本特征、输出单元样本目标特征见表 8-5。学习稳定以后，网络将得到各连接权重值并存于网络中。

表8-5 学习样本特征

序号	输入单元									输出单元 Y
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
1	0.463	0.800	0.117	0.200	0.975	0.43	1.350	0.960	0.960	0.15
2	0.403	0.900	0.117	0.120	1.730	0.62	0.895	0.875	1.000	0.3
3	0.815	1.100	0.706	0.030	0.840	0.67	0.850	0.960	1.150	0.6
4	0.815	1.100	0.647	0.090	0.556	0.18	0.600	0.960	1.040	0.7
5	0.519	0.570	0.294	0	0.778	0.53	0.750	0.990	1.150	0.3
6	0.620	1.100	0.323	0.075	0.889	0.29	0.650	0.960	1.040	0.4
7	0.611	0.700	0.206	0	1.010	1.11	0.805	0.875	1.080	0.3
8	0.602	0.700	0.206	0	0.462	0.26	0.550	1.875	1.040	0.5
9	0.157	1.050	0.206	0.250	0.133	0.44	0.450	1.000	1.080	0.3
10	1.019	1.200	0.471	0.100	0.667	0.10	0.500	1.330	1.730	0.9
11	1.056	1.050	0.676	0.130	0.333	0.22	0.430	1.000	1.153	0.1
12	2.389	0.465	0.206	1.000	2.560	0.82	0.625	0.875	0.807	0.85
13	7.643	1.200	0.147	0	1.258	0.22	0.750	1.200	1.115	0.15
14	1.000	0.800	1.000	0.120	1.000	1.00	1.000	1.000	1.000	0.15
15	1.000	0.800	1.000	1.000	1.000	1.00	1.000	1.000	1.000	0.18

输入两个测试样本：

样本1：采深280m，采高2.2m，倾角10°，煤柱尺寸28m，顶板强度38MPa，底板强度35MPa，煤体强度11MPa，巷道高度2.1m，巷道宽度2.8m。

样本2：采深560m，采高2.0m，巷道倾角12°，煤柱尺寸10m，顶板强度20MPa，底板强度10MPa，煤体强度6MPa，巷道高度2.0m，宽度3.2m。

测试结果表明，样本1属于Ⅱ类巷道（较易维护），样本2属于Ⅳ类巷道（较难维护），这与实际情况吻合较好。

8.7 初始地应力场人工神经网络识别方法[34]

在岩石力学与工程中，岩石材料的本构关系和地应力场的分布是两大关键因素。而地应力是地壳运动的结果，它取决于历次构造运动所产生的应力，地壳升降运动引起的加荷、卸荷，岩浆活动的温差应力，岩体物理力学性质的变化等。迄今为止，还没有办法做到定量地以地球发展的历史为根据去求解可供工程应用的初始地应力场。可供工程应用的初始地应力值主要靠实测资料，但少数测点难以满足工程建设的需要，这就提出了如何利用少数测点反演初始地应力场问题。总结通常初始地应力各种计算方法的不足，蒋中明、徐卫亚等[34]把有限变形理论和人工神经网络理论的优点结合起来，利用有限变形理论进行正分析，然后利用人工神经网络的高度非线性特征计算模型的荷载边界条件和各种名义参数，再将得到的荷载边界条件应用于正分析程序之中，从而模拟岩体的初始地应力场。

8.7.1 有限变形基本理论

有限变形问题主要针对塑性变化历程及延性破坏机制等问题而提出，最初的想法是在20世纪60年代初由Turner[35]等提出，70年代前期在理论上得到较为成熟的发展，奠定了有限变形理论的基础，我国陈至达教授[36]为此作出杰出贡献。有限变形是指岩体内部质点的位移和旋转，如果忽略不计会对平衡方程产生严重影响。在处理有限变形问题时，对材料的非线性给予考虑，使由变形造成的对内外力平衡的影响在计算中得以体现，所以需要一种兼顾材料非线性和几何学上非线性的一般性非线性解析法，其中包含了在微小变形理论中未给予考虑的一些因素。有限变形理论通过求解运动方程和结构方程，进而计算出模型的应力、应变和位移。

1. Cauchy运动方程式

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \tag{8-43}$$

式中 ρ——材料密度；

b_i——物质的体力；

$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$——速度的材料导数；

$\sigma_{ij,j}$——应力张量。

式（8-43）为在受外力作用时质点的运动状态，在静力平衡状态下加速度为0，故式（8-43）可表示为

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=0 \tag{8-44}$$

2. 结构方程式

由结构方程式，可以推导出如下关系式：

$$\sigma_{ij}^{\nabla}=H_{ij}(\sigma_{ij},\ \xi_{ij},\ k) \tag{8-45}$$

式中 σ_{ij}^{∇}——相互旋转应力张量；

H_{ij}——设定函数；

k——考虑了加载过程的参数。

相互旋转应力速度张量为

$$\sigma_{ij}^{\nabla}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t}-\omega_{ik}\sigma_{kj}+\omega_{kj}\sigma_{jk} \tag{8-46}$$

式中 $\frac{\mathrm{d}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t}$——$\sigma$的材料时间导数；

σ_{kj}，σ_{jk}——应力张量；

ω_{ik}，ω_{kj}——旋转速度张量。

根据式（8-44）至式（8-46）和边界条件及初始条件，再加上应变速度$\xi_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$的6个关系式构成15个方程。由这15个方程式可以求得应力速度和应变速度张量各6个，速度矢量3个，共15个未知数。

8.7.2 反演BP网络模型

神经网络的模型采用BP网络模型，BP网络模型是把一组样本的输入、输出变成非

线性优化问题。如果输入层有 n 个神经元，输出层有 m 个神经元，则网络是从 n 维欧氏空间到 m 维欧氏空间的映射。通过调整 BP 网络中的连接权值、网络的规模（包括 n、m 和隐含层节点数），就可以实现任意精度逼近任何非线性函数。BP 网络由输入层、输出层及隐含层组成，隐含层可有一个或多个，每层由多个神经元组成。当信号输入时，首先传到隐节点，经过作用函数后，再把隐节点的输出信号传播到输出层节点，经过处理后输出结果。

1. 输入、输出样本向量获取

通过改变边界荷载的方法，利用基于有限变形理论的计算程序进行正分析计算。其目的是为了获得边界荷载作用下应力与边界荷载、物理力学参数之间的映射对应关系，并以此应力值作为输入样本向量，将对应的边界荷载及物理力学参数作为输出样本向量。

经过人工神经网络模型的学习识别，获取各种影响因素对映射关系影响的权重，即可获得反演计算所需的映射模型。当把实测应力作为新输入样本赋予模型后，即可得到唯一的与之对应的计算边界荷载和相应岩石力学参数。

2. 正向传递

对于给定的 N 个样本，网络的期望输出为

$$T_d = [T_{d1},\ T_{d2},\ \cdots,\ T_{dN}] \tag{8-47}$$

当输入第 n 个样本时，对于网络中的第 l（$l=1,\ 2,\ \cdots,\ L$）层第 j 个神经元的输入、输出分别为

输入
$$net_{jn}^{(l)} = \sum_{i=1}^{n_{j-1}} W_{ji}^{(l)} O_{in}^{(l-1)} \tag{8-48}$$

输出
$$O_{jn}^{(l)} = f\left(net_{jn}^{(l)}\right) \tag{8-49}$$

神经网络学习的目的是实现对每一样本

$$E_n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(T_{jdn} - T_{jn}\right)^2 (n = 1,2,\cdots,N) \tag{8-50}$$

达到最小，从而保证网络总误差极小化。

$$E = \frac{1}{2n}\sum_{n=1}^{N} E_n \tag{8-51}$$

式（8-50）中 T_{jdn}，T_{jn} 为输出层第 j 个节点的期望输出和实际输出。

3. 反向传递

采用梯度算法对网络权值、罚值进行修正。第 l 层的权重迭代方程为

$$W(k+1) = W(k) - \eta\Delta E_n \tag{8-52}$$

$$\Delta E_n = \frac{\partial E_n}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \frac{\partial E_n}{\partial net_{jn}^{(l)}}\frac{\partial net_{jn}^{(l)}}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \frac{\partial E}{\partial net_{jn}^{(l)}} O_{in}^{(l-1)} \tag{8-53}$$

式中 η——节点误差学习步长；

k——迭代次数。

$$\delta_{jn}^{(l)} = \frac{\partial E_n}{\partial net_{jn}^{(l)}} \tag{8-54}$$

4. 学习过程

（1）网络初始化，用一组随机数对网络赋予初始权值，设置学习步长 η、允许误差

ε、网络结构（即网络层数 L 和每层节点数 n_l）。

（2）为网络提供一组学习样本。

（3）对每个学习样本 n 循环，逐层正向计算网络各节点的输入和输出，计算第 n 个样本的输出误差 E_n 和网络的总误差 E，当 E 小于允许误差 ε 或者达到指定的迭代次数时，学习过程结束；否则，进行误差反向传播，反向逐层计算网络各节点误差 $\delta_{jn}^{(l)}$。

输出层

$$\delta_{jn}^{(L)} = O_{jn}^{(L)}(1 - O_{jn}^{(L)})(y_{jdn} - O_{jn}^{(L)}) \tag{8-55}$$

隐含层

$$\delta_{jn}^{(l)} = O_{jn}^{(l)}(1 - O_{jn}^{(l)}) \sum \delta_{jn}^{(l)} \omega_{kj}^{(l+1)} \tag{8-56}$$

修正网络连接权值

$$W_{ij}(k+1) = W_{ij}(k) + \eta \delta_{jn}^{(l)} O_{jn}^{(l-1)} \tag{8-57}$$

8.7.3 计算反演实例

某水电工程坝址区地质环境复杂，断层交错。大坝进水口处有 300m 的人工高边坡，在高边坡下部布置有引水发电隧洞。为研究初始地应力场对边坡及隧洞工程的影响，进行了初始地应力的测量工作，取得了一定的初始地应力测量值。为较为精确地估计初始地应力的分布状况，蒋中明等[34]采用了反演方法对初始地应力场进行模拟。

1. 学习样本的确定

如前述，通过改变边界荷载和计算区域内岩石力学参数，利用正算程序进行正分析计算，可获得边界荷载（用于模拟构造应力的荷载）作用下的应力值。经过多次改变边界荷载和计算区域内岩石力学参数后进行正向计算，将获得的对应于测点的水平应力最大、最小值作为输入样本，将对应的边界荷载和材料力学参数作为输出样本，学习样本见表 8-6。

表 8-6 学 习 样 本

输入样本												输出样本				
σ_a/MPa						σ_b/MPa						p/kN	K	μ_1	μ_2	μ_3
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6					
-1.41	-1.63	-4.13	-1.47	-1.67	-1.96	-1.36	-0.94	-4.78	-1.34	-1.66	-1.61	-5.5	1.0×10^4	0.35	0.32	0.30
-2.76	-3.24	-7.16	-2.78	-3.08	-4.03	-1.69	-1.65	-6.25	-1.64	-2.19	-2.44	-11.0	2.0×10^4	0.38	0.35	0.33
-3.15	-4.23	-8.66	-3.22	-3.66	-5.22	-1.77	-1.95	-6.99	-1.70	-2.40	-2.85	-16.0	3.0×10^4	0.42	0.39	0.37
-3.81	-5.62	-1.15	-4.07	-4.47	-7.21	-1.95	-2.55	-8.39	-1.86	-2.70	-3.83	-22.0	4.0×10^4	0.45	0.42	0.41

注：p 为荷载集度最大值；μ 为名义泊松比；σ_a 为最小水平主应力值；σ_b 为最大水平主应力值；“-”表示压应力。

2. 边界荷载和计算力学参数反演计算

学习样本通过程序学习后，利用所获得的非线性映射关系，将实测应力结果作为输入向量，经运算即可获得荷载反演结果：三角形荷载最大值 p 为 -12.98MPa，强风化带的名义泊松比 μ_1 为 0.44，弱风化带的名义泊松比 μ_2 为 0.393，微风化带的名义泊松比 μ_3 为 0.375。实测应力输入向量见表 8-7。

表8-7 实测应力输入向量

测点号	σ_a	σ_b	测点号	σ_a	σ_b
1	-3.00	-2.00	4	-2.00	-1.50
2	-4.00	-2.00	5	-3.40	-2.30
3	-5.50	-2.50	6	-4.00	-2.00

3. 岩体初始地应力场分布模拟

将得到的模型边界荷载值及边界条件施加在计算模型上，进行正演计算，第一主应力场分布如图8-16所示。从应力分布情况可以看出，岩体中的初始地应力场随深度的增加而加大，在河谷地带出现应力集中。同时由于计算模型中考虑了断层的影响，在断层附近也出现一定程度的应力集中现象。

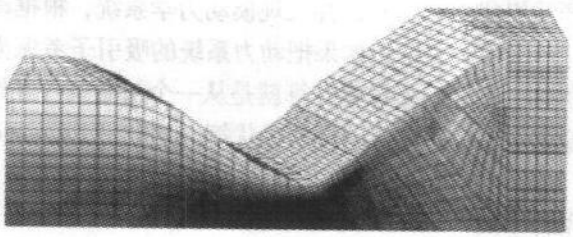


图8-16 第一主应力场分布

测点的计算应力和实测应力见表8-8，其最大误差为4.35%，而国内外的统计资料显示，初始地应力值的测量结果的误差可达到25%~30%，由此来看，该计算成果的精确度较高，是可信的。由表8-8可知，侧压力系数在1.08~1.63之间变化，与按实测地应力计算的侧压力系数（1.3~1.6）非常接近，两向水平应力的比值在1.35~2.71之间。值得说明的是，为了验证按该方法得到的计算结果的可靠性，在反演分析过程中，预留了4个点（7~10）检验点而不参与反演计算，结果表明，误差很小，满足工程要求。

表8-8 测点的计算应力和实测应力对照

测点号	计算应力			实测应力		误差/%		σ_a/σ_H	σ_a/σ_b
	σ_a	σ_b	σ_H	σ_a	σ_b	σ_a	σ_b		
1	-3.07	-2.04	-3.32	-3.00	-2.00	2.27	1.97	1.08	1.50
2	-4.10	-2.05	-5.54	-4.00	-2.00	2.40	2.27	1.35	2.00
3	-5.67	-2.61	-6.24	-5.50	-2.50	3.09	4.35	1.10	2.17
4	-2.06	-1.53	-2.53	-2.00	-1.50	3.03	2.24	1.23	1.35
5	-3.53	-2.35	-4.06	-3.45	-2.30	2.29	2.17	1.15	1.50
6	-4.11	-2.06	-6.70	-4.00	-2.00	2.80	2.91	1.63	2.00
7	-3.59	-2.05	-3.95	-3.50	-2.00	2.59	2.33	1.10	1.75
8	-5.77	-2.81	-6.29	-5.60	-2.70	2.96	4.00	1.09	2.05
9	-4.08	-2.04	-4.49	-4.00	-2.00	2.11	1.87	1.10	2.00
10	-5.09	-3.05	-6.01	-5.00	-3.00	1.83	1.71	1.18	1.67

8.8 弹塑性有限元的神经网络计算方法[37]

神经网络作为一个非线性大规模动力系统，具有高度的并行计算能力。将神经网络技术应用到计算力学领域已经成为一个值得关注的热点[38]。其中，如何将力学计算与神经网络计算进行等价至关重要。钟万勰等[39]提出了参变量变分原理，并基于此原理，将弹塑性力学问题转化为数学规划问题。孙道恒等[40,41]将弹性力学问题的求解转化为等式约束下的二次优化问题，并用 Hopfield 神经网络模型实现，构造了适合神经网络处理的弹塑性力学模型。任小强等[37]根据神经网络的基本优化原理，研究了基于 Lagrange 函数适合求解弹塑性力学问题的神经网络方法，建立了一种以非线性函数为传递函数的神经网络模型，探讨了其稳定性和收敛性，给出了提高网络优化计算效率的神经优化策略，并通过算例验证了该神经网络求解弹塑性有限元问题的有效性和可行性。

8.8.1 Lagrange 神经网络模型

神经网络是由神经元组成的一个非线性大规模动力学系统，根据动力学系统的规律，系统的最终行为完全由它的吸引子决定，如果把动力系统的吸引子考虑为适当的能量函数（或广义目标函数）的最优解，神经网络优化计算就是从一个初始条件开始，随着系统本身运动而达到稳定状态，该稳定状态就对应于问题的最优解。这就是 Lagrange 神经网络模型用于优化计算的原理。

考虑不等式约束条件下的标准二次规划问题：

$$\begin{cases}\min & \dfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx+c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} & Ax\leqslant b\end{cases} \tag{8-58}$$

式中，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$；$c=[c_1,c_2,\cdots,c_n]\in R^n$；$b=[b_1,b_2,\cdots,b_m]\in R^m$；$A$ 为 $m\times n$ 阶矩阵；G 为 $n\times n$ 阶实对称正定矩阵。引入变量 $z=[z_1,z_2,\cdots,z_m]\in R^m$，将式（8-58）化为等式约束条件下的二次规划问题：

$$\begin{cases}\min & \dfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx+c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} & Ax-b+z^{\mathrm{T}}z=0\end{cases} \tag{8-59}$$

根据最优化理论，定义增广 Lagrange 函数：

$$L(x,y,z)=x^{\mathrm{T}}Gx/2+c^{\mathrm{T}}x+y^{T}(Ax-b+z^{\mathrm{T}}z) \tag{8-60}$$

式中，$y=[y_1,y_2,\cdots,y_m]^{\mathrm{T}}\in R^m$，为 Lagrange 乘子。

根据微分方程的稳定性理论，建立动力学系统方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\nabla_x L(x,y,z)=-(Gx+c+A^{\mathrm{T}}y) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\nabla_y L(x,y,z)=-(Ax-b+z^{\mathrm{T}}z) \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\nabla_z L(x,y,z)=-2zy^{\mathrm{T}} \\ x_i=g(u_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ y_i=g(v_j)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ z_r=g(w_r)\ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\end{cases} \tag{8-61}$$

式中，b、c 为网络输入，$x\in R^n$ 为网络的输出。神经元传递函数 $g(u)=(e^u-e^{-u})/2$。当传递函数为非线性函数时，可提高优化计算速度，同时又可与力学问题的非线性有机地结合，提高求解力学问题的精度。

8.8.2 弹塑性力学二次规划描述方法

经典弹塑性理论可简要叙述如下：

平衡方程

$$A^{(\nabla)}\mathrm{d}\sigma+\mathrm{d}b=0 \tag{8-62}$$

几何方程

$$\mathrm{d}\varepsilon=L^{(\nabla)}\mathrm{d}u \tag{8-63}$$

边界条件

$$n^{(\nabla)}\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\tilde{p},\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}\tilde{u} \tag{8-64}$$

本构关系

$$\begin{cases}\mathrm{d}\sigma=D(\mathrm{d}\varepsilon-\mathrm{d}\varepsilon^p)\\ f(\sigma,\ \varepsilon^p,\ k)\leqslant 0\\ \mathrm{d}\varepsilon^p=(\partial g/\partial\sigma)\lambda\\ \lambda\begin{cases}>0,\ f=0\\ =0,\ f<0\end{cases}\end{cases} \tag{8-65}$$

式中 $A^{(\nabla)}$，$L^{(\nabla)}$——微分算子矩阵；

$n^{(\nabla)}$——方向向量矩阵；

$\mathrm{d}\sigma$——应力增量；

$\mathrm{d}b$——体积力增量；

$\mathrm{d}\varepsilon$——应变增量；

$\mathrm{d}\varepsilon^p$——塑性应变增量；

$\mathrm{d}u$——位移增量；

$\mathrm{d}\tilde{u}$——给定位移增量；

$\mathrm{d}\tilde{p}$——给定面力增量；

D——弹性本构关系矩阵；

k——强化参数；

λ——流动参数；

$f(\sigma,\varepsilon^p,\ k)\leqslant 0$——屈服约束条件；

g——塑性势函数。

设弹塑性问题只有一个屈服条件，对加载函数作 Taylor 展开：

$$f=f^0+\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\sigma+\left[\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p}\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varepsilon^p+\left[\frac{\partial f}{\partial k}\right]\mathrm{d}k+O^2(\mathrm{d}\sigma,\ \mathrm{d}\varepsilon,\ \mathrm{d}k) \tag{8-66}$$

式中 f^0——增量之前的加载函数，若当前为加载状态，则 $f=f^0$。

经过有限元离散后，体系的势能为

$$\begin{cases}\Pi[\lambda(\sigma,\varepsilon^p,\ k)]=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u^{\mathrm{T}}K\mathrm{d}u-\mathrm{d}u^{\mathrm{T}}\left[\dfrac{1}{2}\Phi\lambda+P\right]\\ C\mathrm{d}u-U\lambda-d+v=0\\ v^{\mathrm{T}}\lambda=0,\ v\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 0\end{cases} \tag{8-67}$$

其中

$$K=\sum_{e=1}^{N_E}\int_{\Omega_e}B^{\mathrm{T}}DB\mathrm{d}\Omega$$

$$\Phi=\sum_{e=1}^{N_E}\int_{\Omega_e}B^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial g}{\partial\sigma}D\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Omega$$

$$P=\sum_{e=1}^{N_E}\int_{\Omega_e}(N^{T}\mathrm{d}b)\mathrm{d}\Omega+\sum_{e=1}^{N_E}\int_{S_p}(N^{\mathrm{T}}\mathrm{d}p)\mathrm{d}S$$

$$Q=\sum_{e=1}^{N_E}\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma}D\right]^{\mathrm{T}}B\mathrm{d}\Omega$$

$$C=\sum_{e=1}^{N_P}\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma}D\right]B\mathrm{d}\Omega$$

$$U=\sum_{e=1}^{N_P}\int_{\Omega_e}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right]^{\mathrm{T}}D\left[\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right]-\left[\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^{p}}\right]^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right]\right\}\mathrm{d}\Omega$$

$$d=\sum_{e=1}^{N_P}\int_{\Omega_e}f^{0}\mathrm{d}\Omega$$

上述二次规划问题中 λ 是参变量，将其转换为下述标准的二次规划问题：

$$\begin{cases}\min\ V^{\mathrm{T}}GV/2+V^{\mathrm{T}}I\\ \text{s. t. } AV\leqslant J\end{cases}\tag{8-68}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix}K & -(\Phi/2+\mu Q^{\mathrm{T}})\\ -(\Phi/2+\mu Q^{\mathrm{T}}) & 2\mu Q\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-Q & U\\ 0 & E\end{bmatrix},\quad V=[du\quad \lambda^{p}]^{\mathrm{T}}$$

$$I=[-P\ \mu d]^{\mathrm{T}},\ J=[-d\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

式中 μ——正常数。

此时，弹塑性有限元问题表示为一个不等式约束条件下的标准二次规划问题[41]，可用 Lagrange 神经网络模型求解。

8.8.3 算例

以层状岩石材料为例[39]，如图 8-17 所示，Ⅰ、Ⅱ为弹性单元，Ⅲ为弹塑性单元。材料均为各向同性 $E=50\mathrm{GPa}$，$\nu=0.25$。层状材料的屈服准则、势函数可取为

$$f=|\tau_{xy}|+\sigma_{y}\tan\varphi\leqslant 0$$

$$g=|\tau_{xy}|+\varphi\sigma_{y}\tan\varphi+C_{0}$$

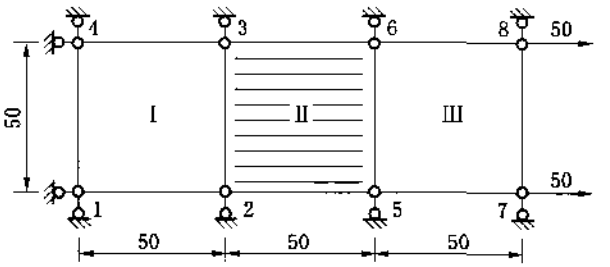


图 8-17 层状岩石单元/mm

对于本例，由对称性可得

$$f_1 = \sigma_y \leqslant 0$$

$$g_1 = f_1$$

其计算结果见表8-9。可见，Lagrange 神经网络模型计算结果与文献［39］中结果一致。

表8-9 节 点 位 移

项 目	u_i/mm		
	$i=2$	$i=5$	$i=7$
文献［39］	0.1667	0.3542	0.5208
本结果	0.1667	0.3542	0.5208

参 考 文 献

［1］ Hecht-Nielsen R. The theory of back propagation neural network［M］. In Review, 1988.

［2］ Hopfield J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities［J］. Proc Natl Acad Sci, USA, 1982, 79: 2254-2558.

［3］ 谭云亮. 膜传导性对神经网络动力学特性影响［J］. 应用基础与工程科学学报, 1997, 5 (3): 331-334.

［4］ Duncan J M, Chang C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils［J］. J Soil Mech Found Div ASCE, 1996 (SM5): 1629-1653.

［5］ 殷有泉. 奇异屈服面的弹塑性本构关系的应力空间表述和应变空间表述［J］. 力学学报, 1986 (1): 31-38.

［6］ 殷有泉, 周早生. 岩土介质在奇异屈服面奇异点处的本构方程［J］. 岩石力学与工程学报, 1985 (1): 33-38.

［7］ Kawamoto T. Deformation and fracturing behavior of discontinuous rock mass and damage mechanics theory［J］. Int J Num & Anal Methods Geomech, 1988 (12): 1-30.

［8］ 冯夏庭, 杨成祥. 智能岩石力学 (2) ——参数与模型的识别［J］. 岩石力学与工程学报, 1999, 18 (3): 350-353.

［9］ 谭云亮, 王春秋. 岩石本构关系的径向基函数神经网络快速逼近模型［J］. 岩土工程学报, 2001, 23 (1): 14-18.

［10］ Broomhead D S, Lowe D. Multivariable functional interpolation and adaptive networks［J］. Complex System, 1988 (2): 321-355.

［11］ Powell M J D. Radial basis functions for multivariable interpolation［C］//IMG Conference on Algrorithm for the Approximation of Function and Data. UK: shrivenham, 1985: 143-167.

［12］ 谭云亮, 王泳嘉. 回采巷道分类指标的神经网络聚类分析［J］. 岩石力学与工程学报, 1995, 14 (2): 139-144.

［13］ 宋飞, 赵法锁. 分级加载下岩石流变的神经网络模型［J］. 岩石力学, 2006, 27 (7): 1187-1190.

［14］ 孙钧. 岩土材料流变及其工程应用［M］. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.

［15］ 郭增玉, 张朝鹏, 夏旺民. 高湿度 Q2 黄土的非线性流变本构模型及参数［J］. 岩石力学与工程学

报，2000，19（6）：780－784.
[16] 陶振宇，王宏，余启华. 分级加载下大理岩的流变特性试验研究 [J]. 四川水利发电，1991，(1)：27－33.
[17] 张忠亭，罗居剑. 分级加载下岩石蠕变特性研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2004，23（2）：218－222.
[18] 赵法锁，张伯友，彭建兵，等. 仁义河特大桥南桥台边坡软岩流变性研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2002，21（10）：1527－1532.
[19] 谭云亮，王学水. 煤矿坚硬顶板活动过程中声发射特征初步研究 [J]. 岩石力学与工程学报，1992（3）：275－283.
[20] 唐春安. 岩石破裂过程中的灾变 [M]. 北京：煤炭工业出版社，1993：70－73.
[21] 谭云亮，周辉，韩宪军. 冲击地压声发射前兆模式分析 [J]. 岩石力学与工程学报，2000，19（4）：425－428.
[22] 邓聚龙. 灰色预测与决策 [M]. 武汉：华中理工大学出版社，1992：35－48.
[23] 卢学强. 神经网络方法及其在非线性时间序列预测中的应用 [J]. 系统理论与实践. 1997（6）：97－99.
[24] 谭云亮，石永奎，宋忠安. 现场矿山压力信息分析及预测模型 [M]. 北京：煤炭工业出版社，1996：16－27.
[25] 谭云亮，孙中辉，杜学东. 冲击地压 AE 时间序列小波神经网络预测模型 [J]. 岩石力学与工程学报，2000，19（增）：1034－1036.
[26] 谭云亮，赵同彬，颜伟. 非线性岩石力学问题求解的几点思考 [J]. 岩土力学，2004，25（增）：10－13.
[27] 谭云亮，王泳嘉. 回采巷道分类指标分析模型. 岩石力学与工程学报 [J]，1995，14（2）：139－144.
[28] 谭云亮，石永奎，刘传孝. 无督学习的神经网络类分析模型及在软岩类型指标分析中的应用 [J]. 山东科技大学学报，1995，14（4）：349－353.
[29] Carpenter G A，Grossberg S. Category learning and adaptive pattern recognition，a neural network model [J]. Proc Third Army Conference on Applied Mathematics and Computing ARO Report. 86－1. 1985：37－56.
[30] Kohonen T. Self－Organized formation of topologically correct feature maps [J]. Biological Cybernetics，43：56－69.
[31] 邹喜正，等. 回采巷道围岩变形与护巷煤柱宽度间关系研究 [J]. 矿山压力与顶板管理，1992（4）.
[32] 谭云亮. 软岩类型的模数的识别 [J]. 软岩工程，1990（1）.
[33] 谭云亮，吴士良. 巷道类别的神经网络识别方法 [J]. 煤，1997，6（4）：12－14.
[34] 蒋中明，徐卫亚，邵建富. 基于人工神经网络的初始地应力场三维反分析 [J]. 河海大学学报，2002，30（3）：53－57.
[35] Turner M J，Dill E H，Martin H C，et al. Large deflection analysis of complex structures subjected to heating and external loads [J]. J Aero Sci，1960，27：97－107.
[36] 陈至达. 有理力学 [M]. 徐州：中国矿业大学出版社，1998.
[37] 任小强，陈务军，付功义，等. 求解弹塑性有限元问题的神经网络方法 [J]. 上海交通大学学报，2005，39（5）：801－804.
[38] 高行山，李红达，叶大麒. 结构分析和设计中神经网络计算研究评述 [J]. 计算力学学报，2000，17（2）：223－228.

[39] 钟万勰，张洪武，吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用 [M]. 北京：科学出版社，1997：128－193.

[40] 孙道恒，胡俏，徐灏. 弹性力学的实时神经计算原理与数值仿真 [J]. 力学学报，1998，30（3）：348－352.

[41] 孙道恒，孙训方，胡俏，等. 弹塑性力学问题的神经网络计算模型 [J]. 计算力学学报，2000，17（3）：273－277.

9 遗传算法在岩石力学中的应用

9.1 遗传算法概述

众所周知，自然界生物经历了从简单到复杂、从低级到高级的长期进化过程，自然界所提供的答案是经过漫长的自适应过程而得到的结果。利用这一过程本身去解决一些较为复杂的问题，不必非常明确地描述问题的全部特征，只需要根据自然法则就可以产生新的更好的解。遗传算法正是基于这种思想而发展起来的一种通用问题的求解方法。

遗传算法 GA（Genetic Algorithms）研究的历史比较短，20 世纪 60 年代末期到 70 年代初期，主要由 Michigan 大学的 John Holland 与其同事、学生研究形成了一个较为完整的适用于优化问题研究的理论和方法[1]。遗传算法本质是一种求解问题的并行全局搜索方法，它能在搜索过程中自动获取和积累有关搜索空间的知识，并自适应地控制搜索过程以求得最优解。由于遗传算法在处理非线性问题所表现出的稳健性、高效性，受到越来越多的注重和研究应用。遗传算法在机器学习、过程控制、经济预测、工程优化等领域取得的成功，已引起了数学、物理学、化学、生物学、计算机科学、社会科学、经济科学及工程应用等领域专家的极大兴趣和广泛关注[2,3]。

9.1.1 GA 求解问题的基本思路

基于对自然界中生物遗传与进化机理的模仿，针对不同的问题，很多学者设计了许多不同的编码方法来表示问题的可行解，研究出了许多不同的遗传算子来模仿不同环境下的生物遗传特性。不同的编码方法和不同的遗传算子构成了各种不同的遗传算法。这些遗传算法都有共同的特点，即通过对生物遗传和进化过程中选择、交叉、变异机理的模仿，来完成对问题最优解的自适应搜索过程。这样，所有遗传算法的基本组成要素都可以通过式（9－1）的形式化定义来描述。

$$SGA = (C,\ E,\ P_0,\ M,\ \Phi,\ \Gamma,\ \Psi,\ T) \tag{9-1}$$

式中 C——个体的编码方法；

E——个体适应度评价函数；

P_0——初始群体；

M——群体大小；

Φ——选择算子；

Γ——交叉算子；

Ψ——变异算子；

T——遗传算法终止条件。

遗传算法是从代表问题可能潜在解集的一个种群开始的，而一个种群则由经过基因编码的一定数目的个体组成。每个个体实际上是染色体带有特征的实体。染色体作为遗传物

质的主要载体，即多个基因的集合，其内部表现（即基因型）是某种基因组合，它决定了个体形状的外部表现。因此，在一开始需要实现从表现型到基因型的映射（即编码）工作。由于仿照基因编码的工作很复杂，往往进行简化，如二进制编码。初代种群产生后，按适者生存和优胜劣汰的原理，逐代演化产生出越来越好的近似解。在每一代，根据问题域中个体的适应度大小挑选个体，并借助于自然遗传学的遗传算子进行组合交叉和变异，产生出代表新的解集的种群。这个过程将导致种群像自然进化一样的后生代种群比前代更加适应于环境，末代种群中的最优个体经过解码，可以作为问题近似最优解。

遗传算法的求解步骤如下：

第一步：对代表问题的可行解进行编码。

第二步：随机产生初始种群，个体数目一定，每个个体表示染色体的基因编码。

第三步：按具体评价目标计算个体的适应度。

第四步：判断是否符合优化准则，若符合，输出最佳个体及其代表的最优解，并结束计算；否则转向下一步。

第五步：依据适应度选择再生个体，适应度高的个体被选中的概率高，适应度低的个体可能被淘汰。

第六步：按照一定的交叉概率和交叉方法，生成新的个体。

第七步：按照一定的变异产生新一代的种群，然后再返回到第三步。

9.1.2 GA 操作算子

在遗传算法的运行过程中，算法不对所求解问题的实际决策变量直接进行操作，而是对表示可行解的个体编码施加选择、交叉、变异等遗传运算，通过这种遗传操作来达到优化的目的，这是遗传算法的特点之一。遗传算法通过这种对个体编码的操作，不断搜索出适应度较高的个体，并在群体中逐渐增加其数量，最终寻求出问题的最优解或近似最优解。

1. 编码方法

在遗传算法中如何描述问题的可行解，即把一个问题的可行解从其解空间转换到遗传算法所能处理的搜索空间的转换方法称为编码。编码是应用遗传算法时要解决的首要问题，也是设计遗传算法时的一个关键步骤。迄今为止，人们已经提出了多种不同的编码方法，如二进制编码方法、格雷码编码方法、浮点数编码方法和符号编码方法等。

（1）二进制编码方法。二进制编码方法是遗传算法中最常用的一种编码方法，它使用的编码符号集是由二进制符号 0 和 1 所组成的二值符号集{0，1}，它所构成的个体基因型是一个二进制编码符号串。二进制编码符号串的长度与问题所要求的求解精度有关。假设某一参数的取值范围是$[U_{\min}, U_{\max}]$，用长度为 L 的二进制编码符号串来表示该参数，则它总共能够产生 2^L 种不同的编码。该二进制编码的编码精度为 $\delta=(U_{\max}-U_{\min})/(2^L-1)$。

假设某一个个体的编码是 X：$b_L\ b_{L-1}\ b_{L-2}\cdots b_3\ b_2\ b_1$，则对应的解码公式为 $x=U_{\min}+\left(\sum_{i=1}^{L} b_i 2^{i-1}\right)(U_{\max}-U_{\min})/(2^L-1)$。

二进制编码方法的优点是：编码、解码操作简单易行，交叉、变异等遗传操作便于实现，便于利用模式定理对算法进行理论分析。

（2）格雷码编码方法。格雷码编码方法是二进制编码方法的一种变形，特点是连续

的两个整数所对应的编码值之间仅仅只有一个码位不相同，其余码位都完全相同。

二进制编码和格雷码的转换方法如下：

设二进制编码为 $A=a_m\ a_{m-1}\cdots\ a_2\ a_1$，其对应的格雷码为 $B=b_m\ b_{m-1}\cdots\ b_2\ b_1$。由二进制编码到格雷码的转换公式为：$b_m=a_m$，$b_i=a_{i+1}\#a_i(i=1,2,\cdots,m-1)$；由格雷码到二进制码的转换公式为：$a_m=b_m$，$a_i=a_{i+1}\#b_i(i=1,2,\cdots,m-1)$。#表示异或运算符。

通过格雷码编码方法，任意两个整数的差是这两个整数所对应的格雷码之间的海明距离。

格雷码编码方法的优点是：具有二进制编码的优点，并且还具有提高遗传算法的局部搜索能力。

（3）浮点数编码方法。浮点数编码方法是指个体的每个基因值用某一范围内的一个浮点数来表示，个体的编码长度等于其决策变量的个数。这种编码方法使用的是决策变量的真值，浮点数编码方法也称作真值编码方法。

浮点数编码方法的优点是：适合在遗传算法中表示范围较大的数据和精度要求较高的情况，便于处理复杂的决策变量约束条件，便于设计针对问题的专门知识的遗传算子。

（4）符号编码方法。符号编码方法是指个体染色体编码串的基因值取有代码含义的符号集，这个符号集可以是一个表示数字的序号表，如{1，2，3，4，…}，也可以是一个代码表，如{A1，A2，A3，A4，…}等。

符号编码方法的优点是：有利于在遗传算法中利用所求解问题的专门知识，便于遗传算法与相关近似算法之间的混合使用。

2. 选择算子

遗传算法使用选择算子来对群体中的个体进行优胜劣汰操作，适应度较高的个体被遗传到下一代群体中的概率较大，适应度较低的个体被遗传到下一代群体中的概率较小。

1）比例选择

比例选择是指使各个个体被选中的概率与其适应度大小成比例。

设群体大小为 M，个体 i 的适应度为 F_i，则个体 i 被选中的概率 P_i 为

$$P_i=F_i\Big/\sum_{i=1}^{M}F_i(i=1,2,\cdots,M) \tag{9-2}$$

2）最优保存策略

最优保存策略是指当前群体中适应度最高的个体不参与交叉、变异运算，而是用它替换掉当代群体中经过交叉、变异等操作后所产生的适应度最低的个体。一方面，该策略的实施可保证迄今为止所得到的最优个体不会被交叉、变异等遗传运算所破坏；另一方面，该策略也容易使某个局部最优个体不易被淘汰掉，从而使遗传算法的全局搜索能力不强。该策略一般要与其他一些操作方法配合起来使用，才能获得最优搜索效果。

3）期望值方法

期望值方法的基本思想是根据每个个体在下一代群体中的生存期望值来进行随机选择运算。其具体操作过程如下：

（1）计算群体中每个个体在下一代群体中的生存期望数目 N_i。

$$N_i=MF_i\Big/\sum_{i=1}^{M}F_i(i=1,2,\cdots,M) \tag{9-3}$$

（2）若某一个体被选中参与交叉运算，则它在下一代群体中的生存期望数目减去0.5；若某一个体未被选中参与交叉运算，则它在下一代群体中的生存期望数目减去1.0。

（3）随着选择过程的进行，若某一个体的生存期望数目小于0，则该个体就不再有机会被选中。

4）排序选择

排序选择方法的思想是对群体中的所有个体按其适应度大小进行排序，基于这个排序来分配各个个体被选中的概率。其具体操作过程如下：

（1）对群体中的所有个体按其适应度大小进行降序排序。

（2）根据具体求解问题，设计一个概率分配表，将各个概率值按上述排列次序分配给各个个体。

（3）以各个个体所分配到的概率值作为其能够被遗传到下一代的概率，基于这些概率值用比例选择的方法来产生下一代群体。

5）联赛选择方法

联赛选择方法是指从群体中任意选择一定数目的个体（称为联赛规模），其中适应度最高的个体保存到下一代。把这一过程反复执行，直到保存到下一代的个体数达到预先设定的数目为止。

3. 交叉算子

遗传算法中的交叉运算，是指对两个相互配对的染色体按某种方式相互交换部分基因，从而形成两个新的个体。交叉运算在遗传算法中起着关键作用，是产生新个体的主要方法。交叉算子的设计和实现与所研究的问题密切相关，一般要求它既不要太多地破坏个体编码串中表示优良性状的优良模式，又要能够有效地产生出一些较好的新个体模式。从遗传运算过程中产生新个体的能力方面来说，交叉运算是产生新个体的主要方法，它决定了遗传算法的全局搜索能力。

（1）单点交叉。单点交叉是在个体串中随机设定一个交叉点，实行交叉时，该点前或后的两个个体的部分结构进行互换，并生成两个新个体。例如，交叉点设置在第4和第5个基因座之间，交叉时，该交叉点后的两个个体的部分码串相交换，这样就得到了两个新个体，见表9-1。

表9-1 单点交叉表

配对个体名称	配对个体编码	新个体名称	新个体编码
个体A	1001 \| 111	新个体A'	1001000
个体B	0011 \| 000	新个体B'	0011111

交叉点是随机设定的，当染色体为n时，有$n-1$个交叉点设置。所以，单点交叉可能实现$n-1$个不同的交叉结果。

（2）两点交叉和多点交叉。两点交叉和多点交叉操作与单点交叉类似，只是随机设置两个或多个交叉点，具体操作过程见表9-2。

表9-2 两点交叉和多点交叉表

配对个体名称		配对个体编码	新个体名称	新个体编码
两点交叉	个体 A	10 \| 110 \| 11	新个体 A′	1001011
	个体 B	00 \| 010 \| 00	新个体 B′	0011000
多点交叉	个体 A	10 \| 001 \| 11 \| 110 \| 010	新个体 A′	10000110110l0
	个体 B	11 \| 000 \| 10 \| 011 \| 111	新个体 B′	11001101101l1

（3）算术交叉。算术交叉是指由两个个体的线性组合而产生出两个新的个体，为了能够进行线性组合运算，算术交叉的操作对象一般是由浮点数编码所表示的个体。

假设在两个个体 X_A、X_B 之间进行算术交叉，则交叉运算后产生出的两个新个体是

$$\left.\begin{aligned} X'_A &= aX_B + (1-a)X_A \\ X'_B &= aX_A + (1-a)X_B \end{aligned}\right\} \tag{9-4}$$

式（9-4）中，a 为一参数，可以是一个常数，也可以是一个变量。

（4）其他交叉方法。针对各种不同问题，又有相应的不同的交叉方法，如树结构交叉法、TSP 的部分匹配交叉法、顺序交叉法和周期交叉法等。

4. 变异算子

模仿生物遗传和进化过程中的变异环节，在遗传算法中也引入了变异算子来产生新的个体。遗传算法中的变异运算，是将个体染色体编码串中某些基因座上的基因值用该基因座的其他等位基因来替换，从而形成一个新的个体。变异运算只是产生新个体的辅助方法，但也是必不可少的一个运算步骤，因为它决定了遗传算法的局部搜索能力。交叉算子与变异算子的相互配合，共同完成对搜索空间的全局搜索和局部搜索，从而使得遗传算法能够以良好的搜索性能完成最优问题的寻优过程。

（1）基本位变异。基本位变异操作是指对群体中的个体编码串以变异概率 p_m 随机指定的某一位或某几位基因座上的基因值作变异运算。如二进制编码串 1011011，经过变异后变成 1110011 的形式。

（2）均匀变异和非均匀变异。均匀变异操作是指分别用符合某一范围内均匀分布的随机数，以某一较小的概率来替换个体编码串中各个基因座上的原有基因值。非均匀变异操作是指对每个基因座都以一定的概率对原有基因值作一随机扰动，以扰动后的结果作为变异后的新基因。这样的操作就相当于整个解向量在解空间中作了一个轻微的变动。

（3）边界变异。边界变异操作是指随机地取基因座的两个对应边界基因值之一去替代原有基因值。当变量的取值范围特别宽，并且无其他约束条件时，边界变异会带来不好的作用。但它特别适用于最优点位于或接近于可行解的边界时的一类问题。

（4）高斯变异。高斯变异操作是指进行变异操作时，用符合均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布的一个随机数来替换原有基因值。

9.1.3 GA 数值实验

采用 VC 语言编制遗传算法通用程序[4-7]，并进行数值试验研究，以说明遗传算法的进化计算过程和该算法在复杂函数优化问题研究中的可行性和有效性。

1. 多峰值函数极值的 GA 求解

用常规的数学优化方法求解多峰值函数极值时，常出现陷入局部极小而无法继续寻优的状态。而遗传算法是采用同时处理群体中多个个体的方法，即对搜索空间中多个解进行评估，并行地“爬”多个峰。这一特点使遗传算法具有较好的全局搜索能力，减少了陷入局部最优解的风险。

算例 1：求解测试函数 $f(x)=x\sin(10\pi x)+2$ 在优化变量区间 $[-1, 2]$ 的极大值（图 9-1）。

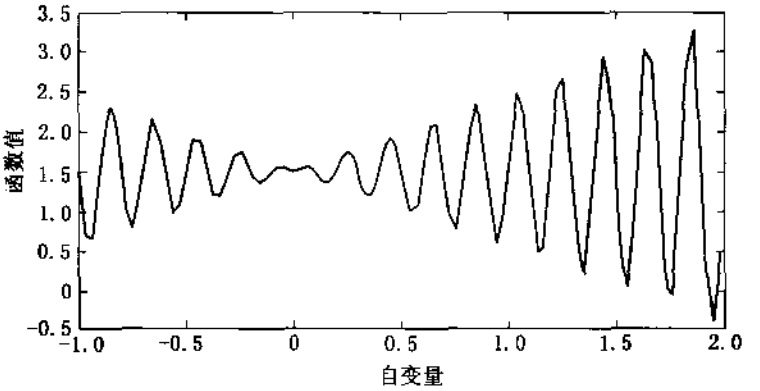


图 9-1　测试函数的曲线图

设置遗传算法运行参数：种群规模为 20，最大进化代数为 300，交叉概率为 0.7，变异概率为 0.01。

图 9-2 至图 9-7 分别表示第 0 代、5 代、20 代、50 代、70 代和 100 代染色体个体适应度的变化情况。从图中可以看出，随着进化代数的增加，平均个体的适应度在增强。

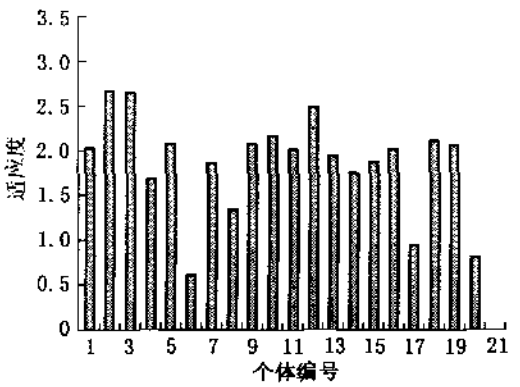


图 9-2　第 0 代染色体的适应度

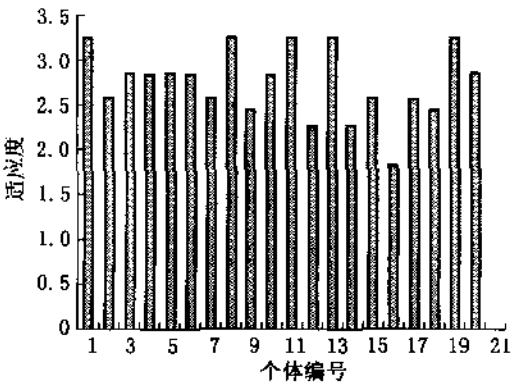


图 9-3　第 5 代染色体的适应度

将全部进化计算结果绘制成曲线，如图 9-8、图 9-9 所示，从图中可以看出，在进化到 50 代就找到了该测试函数的最大值，说明该算法对求解多峰函数最大值是非常有效的。

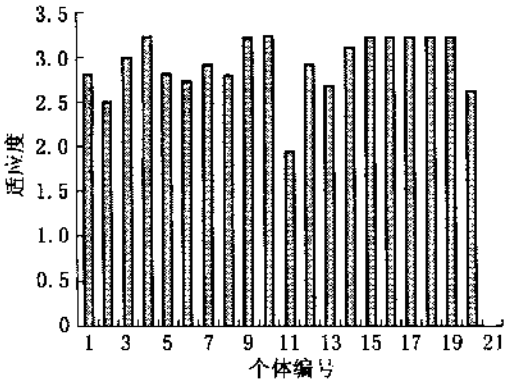


图 9-4　第 20 代染色体的适应度

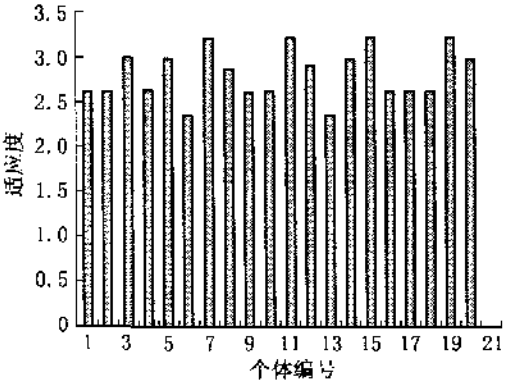


图 9-5　第 50 代染色体的适应度

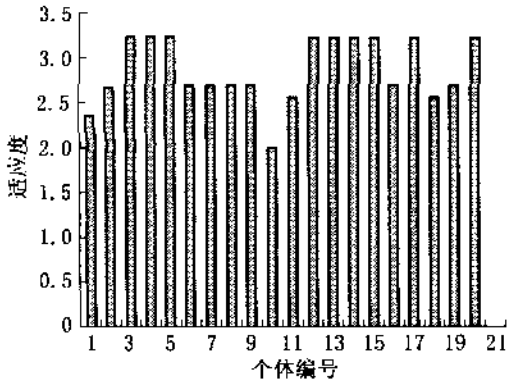


图 9-6　第 70 代染色体的适应度

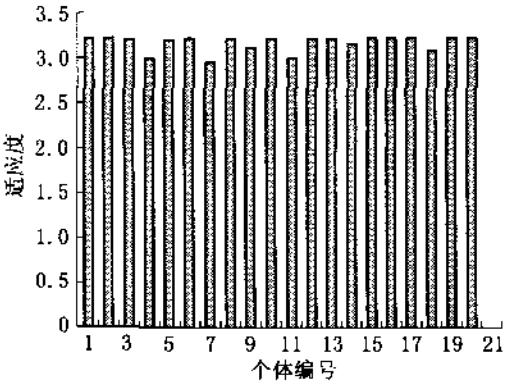


图 9-7　第 100 代染色体的适应度

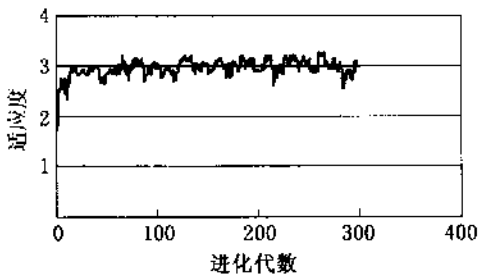


图 9-8　平均适应度进化曲线

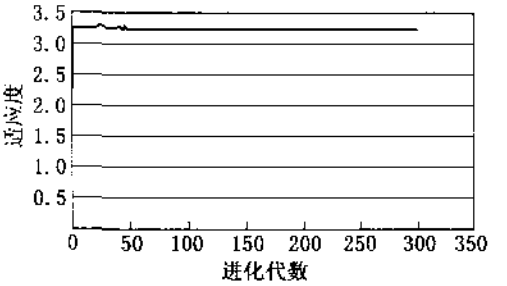


图 9-9　最大适应度进化曲线

算例 1 的求解过程表明，遗传算法具有良好的全局优化特性，可以快速地从局部极值中跳出，仅经历了 50 代进化就找到了该多峰函数的最大值，特别适合多峰函数求极大值问题，这说明该算法具有良好的函数优化性能。

2. 多变量函数极值的 GA 求解

算例 2：求解多变量函数 $\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \\ -5.12 \leqslant x_i \leqslant 5.12 (i = 1,2,3) \end{cases}$ 的极小值。

这是一个简单的平方和函数，只有一个极小点 $f(0, 0, 0)=0$，适应值函数为 $\min f(x_1, x_2, x_3)$。

采用二进制编码和最优保存策略方式，设置遗传算法运行参数：群体规模为 20，最大进化代数为 30，交叉概率为 0.7，变异概率为 0.03，每个变量的精度设置为 0.01。方程中变量的取值是实数形式的，而本次遗传算法采用二进制串进行，因此需要将实数转化成相应的二进制形式。二进制串的长度与所求参数的精度要求有关，设二进制串的首位为符号位，对应的实数为正时取 1，为负时取 0。

通过 GA 计算表明，最佳个体出现在 22 代，对应的参数值为 $x_1=0.0012$，$x_2=-0.0235$，$x_3=0.06$；而算例 2 的解析解为 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$。图 9-10 所示为群体的最优适应值和平均适应值随进化代数变化的曲线，从图中可以看出，随着进化代数的增加，群体中个体的适应值逐渐向最小值集中，表明群体的个体逐渐移向最优解。本例说明，遗传算法在求解多变量函数的极值方面也具有很好的效果。

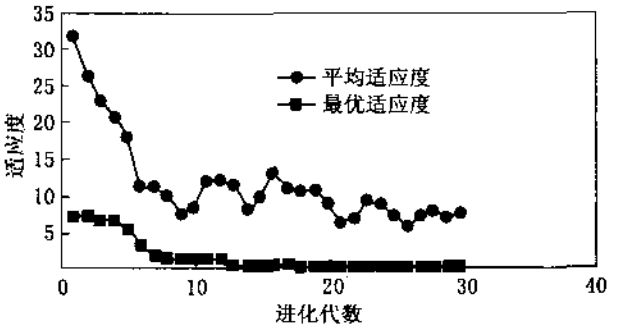


图 9-10　群体的最优适应值和平均适应值随进化代数变化的曲线

算例 3：求解函数 $f(x, y)=x^2+y^2$，$x, y\in[-10, 10]$ 的最小值。

设置遗传算法运行参数：采用取二进制编码和保存最优个体策略方式求解 $\min f(x, y)$，群体规模为 20，最大进化代数为 40，交叉概率为 0.6，变异概率为 0.05，每个变量的精度设置为 0.01。

图 9-11 至图 9-16 形象地说明了遗传算法在可行解域内的搜索过程。在初始群体中，个体在解域内较分散，随着进化代数的增加，个体的搜索空间向最优点（0，0）处聚集。在第 40 代时，除了几个个别点外，大部分点都在（0，0）周围。

图 9-11 所示为初始候选解的分布，它们是随机的。随着遗传迭代的进行，大部分的可行解逐渐向较优区域集中，表示遗传过程正在逐渐淘汰不良解，同时使得较优区域内的搜索密度增强，找到最优解的概率也加大。但在可行解区域的其他部分也还有部分候选解的存在，这可以有效地防止陷入局部极值。经过 40 代的进化后大部分解均已集中在（0，0）附近。

9.1.4　影响 GA 优化效果的因素分析

GA 中的控制参数包括种群规模、染色体编码长度、交叉概率、变异概率、进化代数等因素，这些参数对遗传算法的性能都有重要影响。要使 GA 获得良好性能就需要确定出合适的控制参数范围，遗传算法的控制参数选择对收敛速度和寻优结果有很大的影响。目

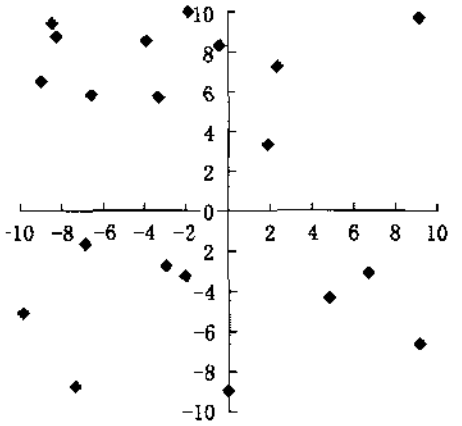


图 9－11　第 0 代解分布情况

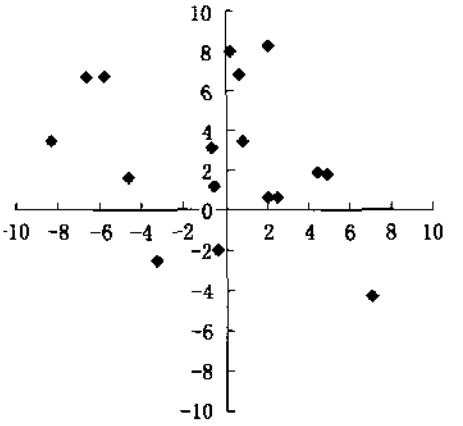


图 9－12　第 5 代解分布情况

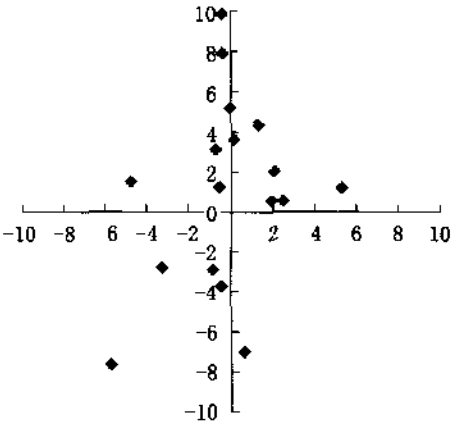


图 9－13　第 10 代解分布情况

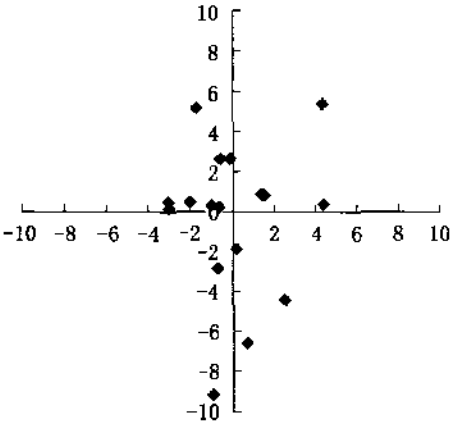


图 9－14　第 15 代解分布情况

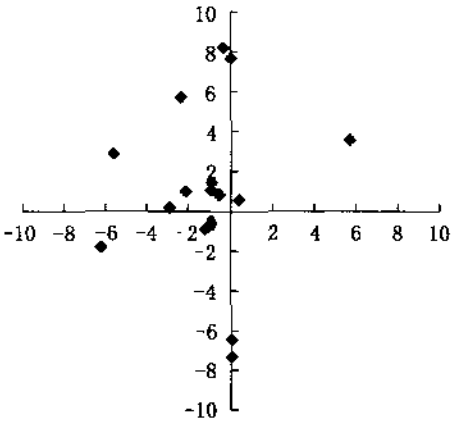


图 9－15　第 20 代解分布情况

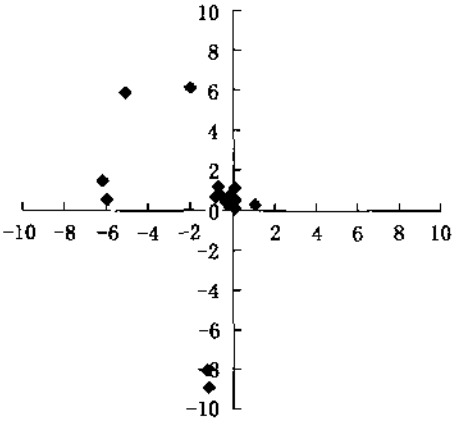


图 9－16　第 40 代解分布情况

前，国内外文献对这一问题的研究甚少，大部分使用 GA 的人都是在参数选取的范围内随机地给定一组参数值，这样会导致结果的随意性，使 GA 执行效果不理想。本书对遗传算法的参数选取进行探讨，最终获得了比较好的参数取值范围，这将为今后应用遗传算法中的参数选择提供工作基础。

1. 种群规模

种群规模在遗传算法寻优的整个过程中都担任着极其重要的角色，因为它限定了搜索样本个体的多少。种群规模较小可以提高遗传算法的运算速度，但却降低了种群的多样性，不仅影响最优解的搜索，而且有可能导致算法出现早熟现象。

2. 交叉概率

交叉概率是控制交叉运算的主要操作参数，一般取较大值，但取值过大会破坏群体中的优良模式，对进化计算产生不利影响；而取值过小又会造成新个体的产生速度较慢，降低寻优速度及收敛性能。

3. 变异概率

变异概率是控制变异算子运算的主要参数，依据变异算子的作用，变异概率过大虽能产生较多的新个体，但也增大了破坏较好个体的机会，降低算法寻优速度；若变异概率过小则影响种群的多样性，使得算法的全局收敛性能及局部搜索能力变差。

设置最大进化代数为 200，种群数量为 [30，120]，染色体编码长度为 [8，36]，交叉概率为 [0.2，0.9]，变异概率为 [0.02，0.10]。当进化结果达到一定的精度要求时，程序终止。将运行结果达到一定精度时的进化代数和种群数量、染色体编码长度、交叉概率和变异概率的变化关系绘制成图，如图 9－17 至图 9－20 所示。

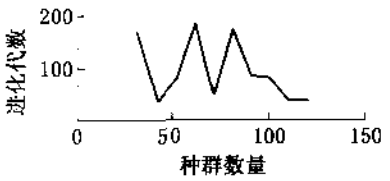


图 9－17　种群数量与进化代数

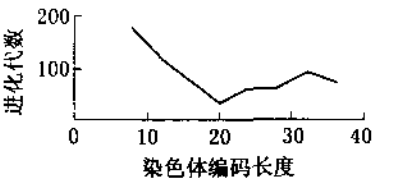


图 9－18　染色体编码长度与进化代数

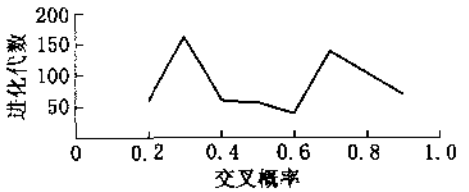


图 9－19　交叉概率与进化代数

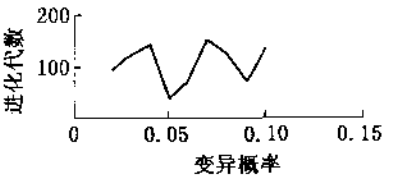


图 9－20　变异概率与进化代数

由图 9－17 可见，种群数量在 30～80 之间时进化代数出现波动，当种群数量大于 80 时，进化代数迅速下降。图 9－18 可见，随着染色体编码长度的增加，进化代数呈减小趋势。综合图 9－17、图 9－18 可知，通过增加种群数量和染色体编码长度，可以使遗传算法更快、更好地收敛到最优值。通常认为，只要增加进化代数和参与进化的个体数，就能

够得到最优值，但这会使得计算量迅速上升。图 9－19 表明，交叉概率在［0.2，0.9］之间变动时，进化代数出现了波动，交叉概率为 0.6 时，收敛速度最快。图 9－20 表明，变异概率在［0.02，0.1］之间变动时，进化代数也出现了波动，变异概率为 0.05 时，收敛速度最快。以上计算结果为以后在遗传计算中选取种群数量、染色体编码长度、交叉概率和变异概率的工作提供了依据。

从以上仿真结果可以看出，不同的参数设置对 GA 的执行结果有很大的影响。

9.1.5 GA 与传统优化搜索方法的比较

1. 传统优化搜索方法

传统优化搜索方法主要有解析法、穷举法、随机法三种类型。解析法主要包括直接法和间接法，穷举法主要包括完全穷举法、回溯法、动态规划法和限界剪枝法[8]，随机法主要包括导向随机方法和盲目随机方法。

（1）解析法。解析法是研究最多的方法，一般可分为直接法、间接法。直接法是根据梯度信息，按最陡方向逐次运动来寻求局部极值，即爬山法。间接法是通过让目标函数的梯度为零，进而求解一组非线性方程来寻求局部极值。一般而言，如果目标函数连续可微，解空间方程比较简单，解析法是适用的。但是当方程的变量为几十或几百时，解析法就无能为力了。

（2）穷举法。穷举法可以克服解析法的缺点，而且简单易行，即在一个连续有限的搜索空间或离散无限搜索空间中，计算每个点的目标函数值。显然，这种方法效率太低而鲁棒性不强。许多实际问题所对应的搜索空间太大，不允许一点一点地慢慢求解。

（3）随机法。随机法比上述的搜索方法有所改进，是一种常用的方法，但它的搜索效率依然不高。随机法通过在搜索空间中随机地游动，记录下所取得的最好结果[9]。该算法并非最优，本质上仍然是一种枚举法。一般当解在搜索空间中呈紧致分布时，搜索才有效，但这一条件在实际应用中很难满足。这些算法对于目标函数连续可微、单峰，解空间较小的情况较为适用，而对于多峰且具有较大解空间的问题效率明显下降。

2. 遗传算法的特点

与传统的搜索方法相比，GA 采用了独特的方法和技术，主要有以下几个方面的特点：

（1）遗传算法不是直接作用在参变量集上，而是利用参变量集的某种编码，遗传算法的处理对象不是参数本身，而是对参数集进行了编码的个体。此编码操作使遗传算法可直接对结构对象进行操作，这一特点使得遗传算法具有广泛的应用领域。

（2）遗传算法不是处理单个点，而是采用同时处理群体中多个个体的方法，即对搜索空间中多个解进行评估，并行地“爬”多个峰。这一特点使遗传算法具有较好的全局搜索能力，减少了陷入局部最优解的可能。同时，也使遗传算法本身十分易于并行化。

（3）在遗传算法中，基本上不用搜索空间的知识或其他辅助信息，而仅用适应度函数值来评估个体，并在此基础上进行遗传操作。遗传算法的适应度函数不仅不受连续可微的约束，而且其定义域可以任意设定，这使得该算法的应用范围大大扩展。

（4）遗传算法不是采用确定性规则，而是采用概率的变迁规则来指导它的搜索方向。遗传算法采用概率作为一种工具来引导搜索过程朝着搜索空间的更优化的解区域移动，因此实际上有明确的搜索方向。

（5）遗传算法具有隐含并行性，隐含并行性与并行性含义不同，它不是指串群可以并行地同时操作，而是指虽然每一代只对 N 个串操作，但实际上处理了大约 $O(N^3)$ 模式，换句话说，虽然只执行了 N 个串的计算量，但在没有占用多于 N 个串的内存的情况下，并行地得到了 $O(N^3)$ 个模式的处理。这种隐含的并行性是遗传算法优于其他解过程的关键所在。

遗传算法的上述特点，表明遗传算法适用于解决维数很高、总体很大的复杂的非线性问题，而且，对于大搜索空间问题，遗传算法能以相对极少的时间达到最优解。遗传算法具有本质并行性以及被赋予的自组织、自适应和自学习等智能特征，与传统算法相比，遗传算法以其简单、鲁棒性强，不需要很多的先验知识等特点，使它能适应于不同环境、问题，并且在大多数情况下都能得到最优解。这些特点，使遗传算法已成功地应用到那些难以用传统方法求解的复杂问题之中，从而成为一个引人注目的研究方向。

9.2 基于 GA 的岩石力学参数反演

9.2.1 岩石力学反分析概述

岩石力学主要是解决有关岩体工程稳定性分析、应力场和位移场的计算以及变形预测等方面的问题。通常是用力学计算的方法来回答上述问题，在计算模型确定后，如何确定计算所需的各项输入信息（如围岩力学性质参数、初始地应力等）就成为问题的关键。近些年，许多岩石力学工作者[10-15]经过不断研究提出了一种较为有效的确定岩石力学参数的方法，即根据施工期和使用期的原位观测资料来反推岩体的基本参数和初始地应力的方法，这种方法称做反分析法。在实际工程中，对岩体的位移及应力往往可以通过现场监测得到，所以反分析法就是将现场监测的结果（如位移、应力等）作为已知条件，利用相应的数学、力学模型，并通过相应的计算来反推出岩体的力学参数和初始地应力，然后将这些求得的参数反馈回模型中，预测在以后的工况下，岩体可能产生的应力和变形，这种预测可作为以后工程施工的指导。总之，反分析的目的在于对工程范围内岩体的初始地应力和力学特征参数的估计，以及对工程的稳定性作出合理的评价和符合实际的预测，并对施工中的工程进行支护参数和方案的反馈设计等。

自从 20 世纪 70 年代提出由现场量测信息反求岩体本构模型及物性参数的反分析方法以来，有关反演的研究已成为国内外学者和工程师十分关注的课题，并在较短时期内迅速取得了大量系列成果，为获取岩体力学参数开辟了新的途径。近 40 年来，位移反分析方法已由简单的线弹性反演问题发展到非线性、黏－弹－塑性反分析，从单一的毛洞围岩到考虑支护结构体系反演，从有限元位移反演到边界元位移反演，从确定性反演到非确定性随机反演等。随着科学发展，各种交叉学科、前沿学科不断被引入岩石力学反分析中，推动了反分析的发展。近几年来，随着人工智能技术的引入，岩石力学反分析出现了智能化的趋势。模拟退火法[16]、人工神经网络[17,18]、遗传算法[19-22]等前沿学科被不断引入岩土力学反分析中，进一步推动了反分析的发展。

由于位移反分析中的正反分析优化方法不需要反解未知量，而直接采用最优化方法，可以广泛用于求解各种线性、非线性参数的反分析问题，在岩体位移反分析的众多方法中，该方法应用范围最广、使用频率最高。但实际应用中发现，在一般情况下目标函数的

各阶导数很难求得，因而只能选用黄金分割法、变量轮换法、单纯形法、复合形法等较为简单的直接搜索法。

这些传统优化方法存在的主要问题是：反演结果依赖于初值的选取；难以进行多参数优化，并且优化结果易陷入局部极值等情况；计算复杂，通用性差，拟合精度往往不能满足要求；无法考虑实际模型对参数估计的特殊要求。

在位移反分析过程中，最优化方法对优化结果的影响不应忽略，然而在目前的反演研究中，反演算法的影响很少被考虑。以往的工作大都局限于用优化方法解决某一具体工程问题，很少在优化方法的优劣方面开展工作。最优化方法是进行巷道位移反分析的有力工具，如果优化迭代方法选择不当，将导致迭代过程收敛缓慢、解的稳定性较差、易陷入局部极小值等情况，特别是待定参数的数目较多时，进行反分析费时、费工，不能保证搜索收敛到全局最优解。

采用合理的优化方法进行岩体位移反分析，将有助于提高反演参数的数量和精确性。综上所述，若能找到一种比较好的位移反分析优化方法，将对岩体稳定性等方面的分析具有重要的意义

9.2.2 岩体位移反分析的描述方法

1. 数学描述法[23,24]

设 D 为 n 维空间的连通区域，变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，D 的边界记为 B。从而，问题的描述形式为

$$L(u,Q)=f,\quad x\in D \tag{9-5}$$

$$M(u,Q)=g,\quad x\in B \tag{9-6}$$

式中 Q——状态变量；

u——与介质特性有关的物理参量；

L——作用于 D 上的微分算子；

M——作用于边界上的微分算子；

f——作用条件；

g——边界作用条件。

u 的分量中含内因（如介质特性参数等）及外因（如外力作用等）。如果 u、f、g 已知，把 u、f、g 代入式（9-5）式（9-6）中，均存在某种意义下与物理背影相符合的广义解，此求解过程为正分析。相反，如果 u、f、g 并非全已知，而在 D 的某个子集 D_s 上可实测出解 Q 的某些信息，那么，如何从这些实测信息中求得 u、f、g 中的未知量，则为一个反分析过程。

2. 力学描述法[25,26]

岩体位移求解的力学描述是指在边界条件和隧洞的几何形状、围岩的力学性质及外荷载等已知的情况下，求解岩体的变形规律。其数学描述包括基本方程、初始条件、边界条件等。

基本方程 $$E(u(x),C(x),D(x))=f(x),x\in\Omega \tag{9-7}$$

初始条件 $$I(u(x))=\varphi(x),x\in\Omega \tag{9-8}$$

边界条件 $$B(u(x))=\phi(x),x\in\partial\Omega \tag{9-9}$$

式中 x——k 维向量，是空间坐标向量，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$；

$f(x)$ ——位移函数；

$\varphi(x)$ ——初始函数；

$\phi(x)$ ——边界函数；

Ω——模型所在区域；

$\partial\Omega$——边界；

u，C，D——几何方程算子、本构方程算子、平衡方程算子。

对一个岩体力学系统，如仅 u 未知，而其余均已知，则为正分析过程；如 u 可实测得到部分或全部，而其他量中存在未知条件，则为反分析过程。

3. 系统描述法[27,28]

由系统论的角度来看，岩体力学研究对象实质为一个复杂的巨系统，人们对其进行的各种施工活动均可看成系统输入，而人们能看到的位移、变形破坏等均可看成系统对输入反应的输出，此过程如图 9－21 所示。

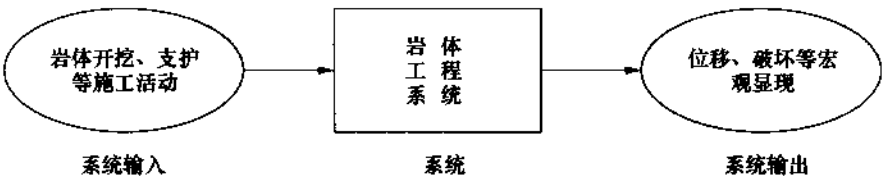


图 9－21　分析的系统描述图

由于实际岩体工程中，外观表现的位移、应力、应变等均可由观测得到，而施工活动等因素也能直接人为控制，因此实际上岩体位移反分析问题就变成了求解岩体工程系统的模型、状态参数等，实质上该问题为一个系统辨识问题。

9.2.3　反分析求解的困难

已知岩体的开挖形状，根据实地量测的变形量，求描述这个系统的最佳力学模型、围岩的力学性质参数及初始地应力的大小，这类问题称为岩体位移反分析。岩体位移正反分析关系如图 9－22 所示。利用围岩位移反求地应力和岩石性质参数是一种行之有效的方法，但这种方法存在着如下的一些求解困难。

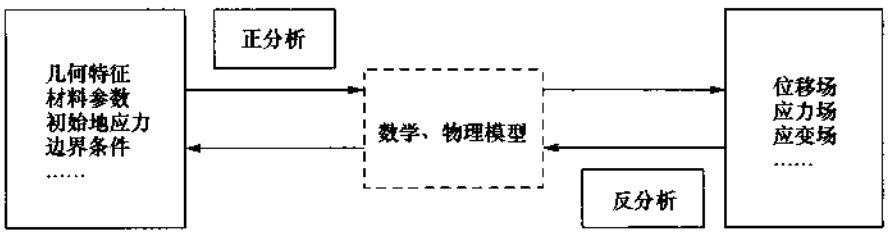


图 9－22　正反分析关系示意图

1. 反问题的不适定性

数学家 Hadamard 在 1923 年针对数学物理方程的定解问题，提出“适定性”概念。如果这个定解问题同时满足解是存在的、解是唯一的、解是连续依赖于数据的，那么，称

这个定解问题是适定的，否则，称该问题是不适定的。反问题的一个重要属性为它通常是不适定问题，因而使得反问题无论在理论分析还是在数值计算时都将遇到困难。在岩体位移反分析中可能出现解的非唯一性，即在研究范围内，目标函数出现了多峰（多解），或解的不存在以及解的不稳定情况。这种情况称为该岩体位移反分析问题是不适定的。

2. 反问题的非线性

大量的位移反分析问题本质上属于非线性问题。由于非线性问题在理论和数值计算上的困难，使得在非线性反分析中，当需要增加辨识的参数时，反演的困难和计算时间也都大大增加，甚至可能出现计算不收敛的情况。

在岩体力学系统反问题的研究中，由于存在着上述的求解困难，造成了反问题的研究明显落后于正问题的研究。

9.2.4 位移反分析的遗传算法研究

1. 位移反分析的基本思想

为了进行岩体位移反分析研究，可在隧洞的横断面（以矩形为例）上布置 n 个测点，设测得的隧洞顶板的位移量为 $s_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$，如图 9-23 所示。隧洞的位移量与围岩的刚度参数、强度参数及初始地应力有关，即隧洞位移可视为围岩的弹性模量 E、泊松比 μ、黏聚力 C、内摩擦角 φ 及初始地应力 σ_{ij} 的函数[29,30]，即

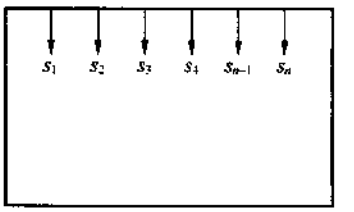


图 9-23 岩体位移测点布置图

$$s=f(E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \qquad (9-10)$$

式中 s——量测的隧洞位移量，$s=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$；

E——弹性模量；

μ——泊松比；

C——黏聚力；

φ——内摩擦角；

σ_x，σ_y，τ_{xy}——初始地应力。

由式（9-10）可以看出，若要通过量测的隧洞位移量反演出上述 7 个变量，需要布置的测点数目 $n\geqslant 7$。

反分析就是通过量测得到的隧洞位移值 s，借助于优化方法来寻找满足式（9-10）的 E，μ，C，φ，σ_x，σ_y，τ_{xy} 的最优值。为此，建立如下目标函数：

$$F(x)=\min\sum_{i=1}^{n}[s_i-f_i(E,\mu,C,\varphi,\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})]^2 \qquad (9-11)$$

式中 s_i——第 i 个测点处的量测位移；

$f_i(E,\mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$——第 i 个测点处的计算位移。

求式（9-11）目标函数的最小值，即最能反映隧洞围岩力学参数和初始地应力的真实值。根据函数极值条件，若 E，μ，C，φ，σ_x，σ_y，τ_{xy} 是所求的真实值，则它们必须满足如下方程组[30]：

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}=2(s_i-f_i(x))\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \qquad (9-12)$$

式中 $f_i(x)$ ——$f_i(E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$；

x_j——j 的取值分别为1，2，3，4，5，6，7，并对应于 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$。

解方程（9－12）可得最优解 E^*，μ^*，C^*，φ^*，σ_x^*，σ_y^*，τ_{xy}^*。但对于地下工程中隧洞的材料非线性或几何非线性问题，由于不能直接给出 $f(x)$ 的解析表达式，欲求式（9－12）的解析表达是不可能的，因而也无法采用函数极值条件的方法求解方程式（9－11）的解，只能采用数值计算法进行求解。

隧洞位移反分析的基本思想是：首先采用 FLAC 建立隧洞位移的数值模拟模型，然后用 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的不同组合来模拟计算这些量测点处的隧洞位移，并用计算出的模拟位移去逼近相应点的实际量测位移。当这种逼近达到所要求的精度时，所对应的 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 即为所求的最优解。

由此可以看出，实际上反演隧洞围岩力学参数和初始地应力的过程是一个优化问题，该问题的目标函数为

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} [s_i(x) - s_i^m]^2 \tag{9-13}$$

式中 $s_i(x)$——第 i 个测点处的模拟位移，是 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的函数值；

s_i^m——第 i 个测点处的实际量测位移；

n——位移量测点总数。

因此，对于平面应变状态下的隧洞位移反分析问题，其任务就是要搜索一组最优参数 $x^* = (E^*, \mu^*, C^*, \varphi^*, \sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*)$，它使上述目标函数式（9－13）的值达到最小。

文献［35］的研究表明，在不同的取值点（区间）各反演参数对隧洞位移的影响度和灵敏度是不同的，并且差别较大。为此要获得较好的反演结果，保证各反演参量的组合唯一，应当对每个参量设定合理的反演区间。所以，应该根据测试资料对隧洞围岩的力学性质有一个大概的界定，给出围岩力学参数的上下界限，因此，隧洞位移反问题的数学模型应表示为有约束的优化问题。

$$\min F(x) = \sum_{i=1}^{n} [s_i(x) - s_i^m]^2 \tag{9-14}$$

式中，$x \in [x_a, x_b]$。

总之，隧洞位移反分析的基本思想可以概括为：根据观测得到的隧洞位移量，基于隧洞位移的正演分析和遗传算法优化理论，寻求一组使实测位移量和计算位移量误差最小的隧洞围岩参数和初始地应力。

2. 位移反分析的遗传算法

对于式（9－14）所描述的优化问题，应用遗传算法进行求解，求解步骤如下[31]：

（1）确定 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的取值范围，在此范围内随机产生一定数目的染色体，即若干组 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的组合。

（2）应用 FLAC 计算每组 $E, \mu, C, \varphi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 所对应的测点处的模拟隧洞位移量 $s_i(i=1, 2, \cdots, 7)$，并将每个测点处的实测隧洞位移量 $s_i^*(i=1, 2, \cdots, 7)$ 与模拟隧洞位移量 $s_i(i=1, 2, \cdots, 7)$ 方差和的倒数作为解的适应度函数。显然，式（9－14）的值越小越好（即遗传算法求解的适应度越大越好）。当式（9－14）的值小于某一个很

小的值时，便可认为找到了隧洞位移反分析的最佳解。

（3）根据每个染色体个体的适应度大小，按一定方式进行选择操作，将被选中的个体送至配对库中，用以繁殖下一代。

（4）再从配对库中任意选取两个个体进行交叉，又产生新的个体。

（5）对每个个体实施一定概率情况下的变异操作。

（6）再应用 FLAC 数值软件对新一代个体（即若干组 E，μ，C，φ，σ_x，σ_y，τ_{xy}）计算实测点处的模拟隧洞位移量，统计其适应度，若找到了最优解，则停止进化，否则重复步骤（3）～（6）。

9.2.5 实例分析

1. 弹塑性位移反分析算例[31]

弹塑性巷道问题的力学模型如图 9－24 所示。力学参数设定如下：$E=6.78\times10^9$Pa，$\mu=0.21$，$C=3.45\times10^6$Pa，$\varphi=30°$，$\sigma_x=-3\times10^7$Pa，$\sigma_y=-3\times10^7$Pa，$\tau_{xy}=0$。设围岩服从莫尔－库仑屈服准则，据此可导出圆形巷道塑性区周边位移的计算式[34]：

$$u_a=\frac{a\sin\varphi(p+C\cot\varphi)}{2G}\left[\frac{(p+C\cot\varphi)(1-\sin\varphi)}{C\cot\varphi}\right]^{\frac{1-\sin\varphi}{\sin\varphi}} \tag{9-15}$$

设巷道半径为 1m，将上述力学参数代入式（9－15），经计算得巷道周边位移为 $u_a=0.966$cm。

通常，地下开挖工程可简化为平面应变问题。此时反演参数有岩体的刚度参数 E、μ，强度参数 C、φ 及初始地应力 σ_x，σ_y，τ_{xy}。如果对自重应力 σ_y 采用 Heim 假说，则 σ_x、τ_{xy} 可以进一步表示为

$$\sigma_x=LC\sigma_y \tag{9-16}$$

$$\tau_{xy}=SC\sigma_y \tag{9-17}$$

式中 LC——侧压力系数；

SC——切应力系数。

因此，7 个反演参数被减至 6 个，即 E，μ，C，φ，LC，SC。在圆形巷道周边上取 6 个测点，其分布如图 9－25 所示。这样，6 个测点竖向位移分量的计算值为

$$\{u_y^m\}=\{u_{1y}^m,\ u_{2y}^m,\ u_{3y}^m,\ u_{4y}^m,\ u_{5y}^m,\ u_{6y}^m\}$$
$$=\{-0.683,\ -0.966,\ -0.683,\ 0.683,\ 0.966,\ 0.683\}$$

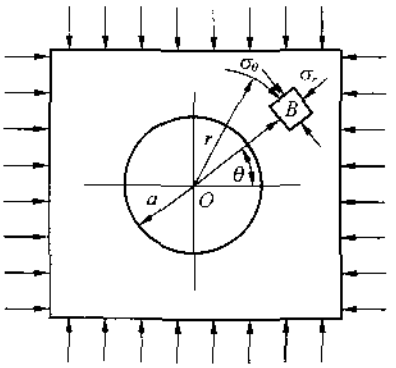


图 9－24　巷道弹塑性分析模型

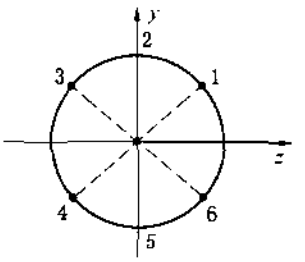


图 9－25　巷道周边位移测点布置

进行本问题的反分析采用 FLAC 数值软件与遗传算法相结合的方法。将坐标原点设置在巷道中心，计算区域面积为 20m×20m。以通过坐标原点的水平轴为 x 轴，从左向右为正；通过该点的竖直轴为 y 轴，从下向上为正。在模型四周将 x、y 方向的位移全部固定。取其全体进行单元划分和数值计算。设模型服从莫尔－库仑屈服准则，根据此模型，对于每组预先给定的力学参数 E，μ，C，φ，LC，SC，就可以计算出测点处相应的竖向位移。因而，此模型与遗传算法程序相结合，即可对 E，μ，C，φ，LC，SC 进行反演。

应用遗传算法程序，将 σ_y 固定为 -3×10^7Pa，经过 168 代进化，方差和达 0.0087，得到的反演结果见表 9－3。

表 9－3　标准弹塑性问题位移反分析的遗传算法反演结果

力学模型	模型值	反演结果	绝对误差	相对误差/%
E/Pa	6.78×10^9	6.43×10^9	0.35×10^9	5.2
μ	0.21	0.23	0.02	9.5
C/Pa	3.45×10^6	3.61×10^6	0.16×10^6	4.6
φ/(°)	30	30.8	0.8	2.7
LC	1.00	1.09	0.09	9.0
SC	0.00	0.0012	0.0012	-

从表 9－3 可以看出，经历 168 代进化后，反演结果与模型参数已相当接近。这说明所建立的弹塑性位移反分析的遗传算法是正确的。

2. 岩体初始应力场反演[32]

某隧道位于砂岩中，埋深 240m，隧道宽 2m，高 2m；岩石重力密度为 25kN/m^3，弹性模量为 10GPa，泊松比为 0.25，假设岩石属于完全弹性，在隧道开挖前其所在位置的原始垂直地应力 σ_y 为 6.0GPa，水平地应力 σ_x 为 2.0MPa，剪切地应力 τ_{xy} 为 1.0MPa。在隧道开挖后引起地应力释放，在巷道内共布置 4 条测线：L_{AB}，L_{CD}，L_{AE}，L_{BC}，如图 9－26 所示。根据 4 条测线的变形收敛观测值矢量 U_m，识别岩体的初始应力场参数矢量 $X=\{\sigma_y,\ \sigma_x,\ \tau_{xy}\}$，在本问题中假设岩体的弹性参数已知。当岩体的弹性模量未知并且只有位移观测数据时，可以识别出弹性模量与初始应力场之间的相对大小，例如以 $\{\sigma_x/E,\ \sigma_y/E,\ \tau_{xy}/E\}$ 形式给出。在巷道周围同时布置应力观测计和位移收敛观测器，测试岩体的二次应力场，可以同时识别岩体的弹性参数和初始应力场。

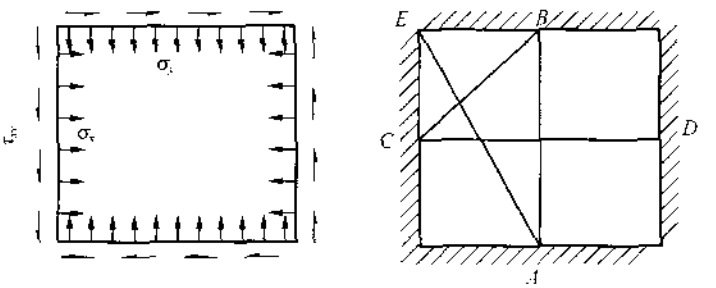


图 9－26　地应力释放和收敛观测线布置

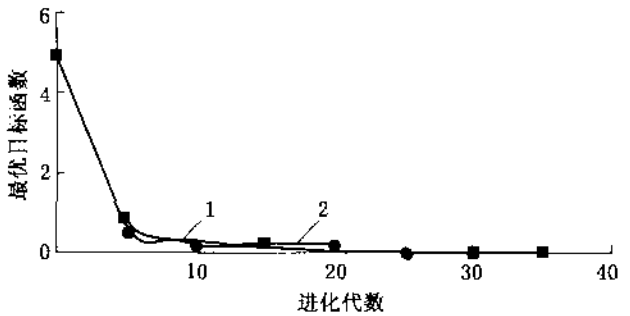
将以上弹性参数和地应力参数代入有限元方程中，得到4条测线的位移收敛观测理论值，将该理论值加上适当的观测误差（即噪音）便可模拟4条收敛测线的“模拟观测值”。$U_m(1)=\Delta L_{AB}=-0.409\text{mm}+\delta 1$，$U_m(2)=\Delta L_{CD}=+2.049\text{mm}+\delta_2$，$U_m(3)=\Delta L_{AE}=-1.246\text{mm}+\delta_3$，$U_m(4)=\Delta L_{BC}=-0.854\text{mm}+\delta_4$，其中$\delta_1\sim\delta_4$分别为4个收敛观测仪器的观测误差。

遗传操作的主要参数选取如下：种群规模$M=100$，二进制编码长度$L=20$，交叉概率$P_c=0.95$，变异概率$P_m=0.015$。

表9-4给出了基于遗传算法的非线性反演方法在不同观测标准差水平条件下，随机得到的一次反演结果。由表9-4进一步计算得到，当在收敛观测值施加0.05mm观测噪音（即观测误差）时，其观测相对误差为2.5%～12.2%，反演结果的最大误差小于10%；而当观测误差为0.02mm时，其观测相对误差为1.0%～5.0%，反演结果的最大误差小于6%。由此可知，基于遗传算法的非线性反演方法具有全局收敛能力和较好的抗噪音能力，并且参数反演结果是唯一和稳定的。图9-27所示为观测误差为0.01mm和0.05mm时基于遗传算法的种群中最优个体（反问题的解）的目标函数随迭代次数的收敛过程。

表9-4 基于遗传算法的初始地应力场反演结果

观测标准差/mm	应力场反演结果/MPa			目标函数/mm²	迭代次数
	σ_x	σ_y	τ_{xy}		
0	2.001	6.004	0.998	0.00004	25
0.005	1.982	6.005	1.088	0.00014	26
0.01	1.982	6.043	0.856	0.00080	20
0.02	1.944	6.023	0.942	0.00108	16
0.05	1.795	6.005	1.001	0.00580	36



1—观测误差0.01mm；2—观测误差0.05mm

图9-27 目标函数的收敛过程

3. 岩体力学流变参数反演[33]

在埋深为25～50m的山体中，开掘一条长为89m的隧洞，主洞断面及测点布置如图9-28所示，隧洞围岩为前寒武系深变质岩类，多属薄层绿泥石绢云母片岩，岩体软弱、破

碎、强度低。地质勘探和现场岩体物理力学试验表明：该岩体的弹性模量 $E=5100\text{MPa}$，泊松比 $\mu=0.34$，内摩擦角 $\varphi=31°$，黏聚力 $C=0.13\text{MPa}$，岩体重力密度 $\rho=27\text{kN/m}^3$。

沿隧洞对多个测试断面进行了较长时间的位移测试，部分测试断面布置如图 9－29 所示。选Ⅰ测试断面的围岩内部位移监测数据，对该类岩体的流变模型进行辨识。布置如图 9－29 所示的两条位移监测线。设置测点的时间为断面爆破成形 5 天后，初喷混凝土立即观测，$t_0=5\text{d}$，即量测位移为相对开挖成形后 5 天的相对位移，以此时刻为监测的零起点，测试数据如图 9－30 所示。

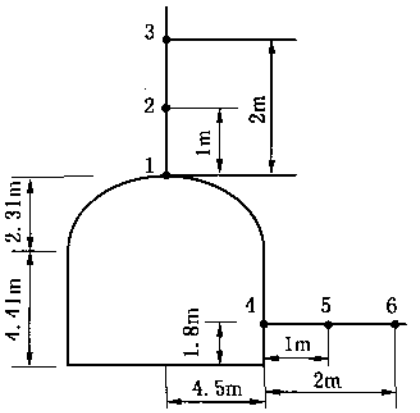


图 9－28　主洞断面及测点布置（1～6 为测点）

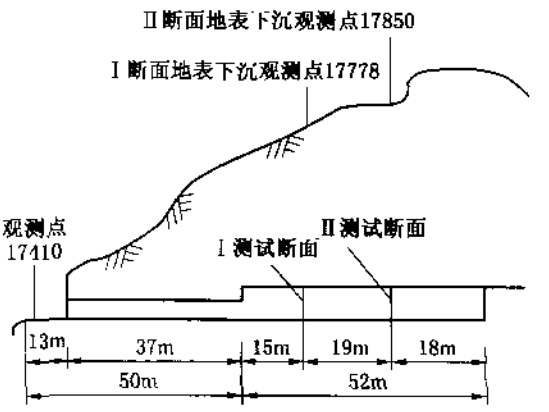


图 9－29　量测断面布置

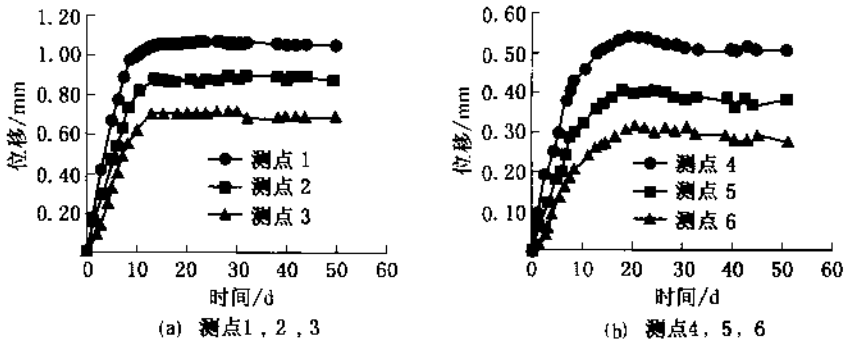


图 9－30　各点量测位移随时间变化图

辨识计算时，使用了图 9－30 中 1，2，4，5 共 4 个点的观测数据，并用图中 3、6 两点的观测数据对辨识的结果进行了检验。

程序采用的模型是如图 9－31 所示的弹黏塑性模型，主要辨识符合实测数据的弹性模量 E、流变参数 γ 和泊松比 μ。根据现场试验和工程经验，结合正分析多次试算结果，岩体弹模 E 取值区间为［3000，10000］MPa，流变参数 γ 取值范围为

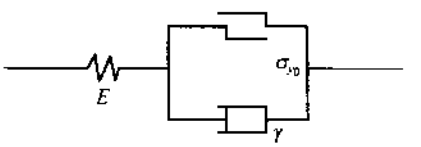


图 9－31　弹黏塑性模型

[0.0001, 0.0005] $(MPa \cdot d)^{-1}$，泊松比μ取值范围为[0.1, 0.4]，其他参数由试验确定。

通过以上约定，可以进行辨识计算。种群规模为30个体，最大进化代数为50代，规定若连续进化12代适用度（目标函数）无改善，则认为收敛。通过计算，得到参数辨识结果：弹性模量$E=4.5034\times10^{4}$MPa，流变参数$\gamma=4.1315\times10^{-4}(MPa\cdot d)^{-1}$，泊松比$\mu=3.2438\times10^{-1}$，适应度（目标函数）$s(\hat{\theta})=1.3106\times10^{-3}$。

根据辨识得到的最优参数，正分析1~4测点的位移变化与实测对比如图9-32所示。结果表明，测点的计算值与实测值吻合程度较高。

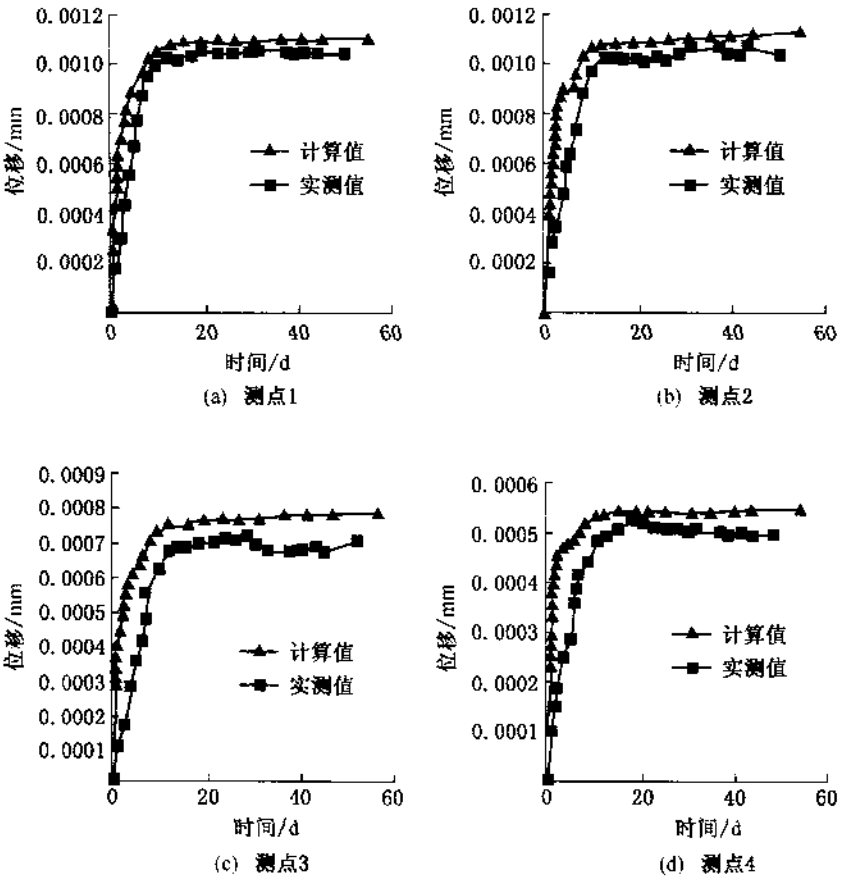


图9-32 各测点计算值与实测值对比

9.3 岩石边坡稳定性的遗传算法分析

边坡稳定性问题涉及矿山工程、公路工程、水利工程、建筑工程等诸多领域，通常采用极限平衡理论分析其稳定性。极限平衡法是在考虑岩石边坡滑动体受力平衡、力矩平衡或二者均平衡的条件下，求解边坡的稳定性安全系数及相应的滑动面的方法[36]。安全系

数是判断边坡失稳的判据，寻找最危险滑裂面则是该方法研究边坡稳定性问题的关键所在。近几十年来，国内外许多学者在这方面做了大量的工作，将一些优化方法相继引入搜索最危险滑动面中，如0.618优选法[40]、单纯形法、共轭梯度法[41]、二分法[42]、坐标轮换法[43]、蒙特卡罗随机搜索法[44]、模拟退火法[45]等，并取得了较为满意的结果。而实际工程中岩土边坡的最危险滑动面的位置不仅与岩土性质有关，而且还与岩土层的分布情况及相邻岩土层力学指标的差异程度有关。对于复杂边坡来说，准确地寻找出全局最危险临界滑动面的位置并不容易，它是一个含多峰的、非凸的复杂非线性问题，求解相当繁琐，并且不易获得全局最优解。研究表明[1]，在生物进化思想基础上发展起来的遗传算法是求解这类问题的有效方法，文献［36，37，46，47］通过实例对比分析，采用遗传算法求解出了边坡滑动的最优安全系数，确定了更为合理的滑动面。

9.3.1 边坡稳定性分析的极限平衡法

极限平衡法是边坡稳定性分析中最常用的方法之一[48]。它是通过分析在临近破坏状况下，坡体滑动外力与内部强度所提供抗力之间的平衡，计算坡体在自身和外荷作用下的稳定程度，通常以边坡稳定系数表示：

$$K = T'/T \tag{9-18}$$

式中 K——稳定系数；

T'——阻抗力；

T——滑动力。

岩土边坡的滑动面一般为曲面，在二维计算分析中可假设滑面为直线、折线、圆弧，或者对数螺旋线以及其他不规则曲线。通过考虑滑动面形成的隔离体的静力平衡，按式（9-18）确定沿滑面发生滑动的稳定安全系数，隔离体可以是一个整体，也可由若干分隔的条块组成。由于滑动面是假设的，所以只有通过求出一系列滑动面可能发生滑动时的安全系数，才能够通过最低安全系数所对应的滑动面来确定滑坡发生的可能性。

1. 直线滑动面极限平衡分析

如图9-33所示，边坡的滑移面为直线，设α为坡体倾斜角，γ为岩土体重力密度，φ为内摩擦角，C为黏聚力，β为滑面的倾角，W为滑动体ABC的质量，l为滑坡AB的长度，h为坡体的高度，则沿滑面向下的滑动力为W在滑面方向的分量，即

$$T = W\sin\beta \tag{9-19}$$

阻止滑坡下滑的力为滑面上的摩擦力和黏聚力，即

$$T' = N\tan\varphi + Cl = W\cos\beta\tan\varphi + Cl \tag{9-20}$$

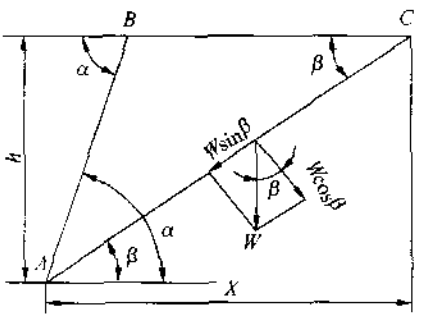


图9-33 直线滑动面

将式（9-19）、式（9-20）代入式（9-18），得直线滑动面的边坡稳定系数：

$$K = T'/T = (W\cos\beta\tan\varphi + Cl)/W\sin\beta \tag{9-21}$$

对于无黏性土，$C=0$，式（9-21）简化为

$$K = T'/T = (W\cos\beta\tan\varphi)/W\sin\beta = \tan\varphi/\tan\beta \tag{9-22}$$

式（9-21）、式（9-22）中K的最小值是确定边坡滑坡位置和评价边坡稳定性的依据。

文献［49］给出了最小稳定系数情况下的滑移面与水平方向的夹角：

$$\beta_{\min} = \arctan\left[\sin\alpha \Big/ \left(\cos\alpha + \sqrt{\frac{2C}{2C + rh\tan\varphi}}\right)\right] \tag{9-23}$$

2. 圆弧滑动面极限平衡分析

假设坡体滑面成圆弧形（图 9－34），*ABCD* 为滑动岩土体，*AD* 为圆弧形滑动面。滑坡发生时，滑动体 *ABCD* 同时整体地沿 *AD* 弧向下滑动。对圆心 *O* 来说，相当于整个滑动岩土体沿 *AD* 弧绕圆心 *O* 转动。取岩土坡体长度 1 延米进行如下分析：

（1）计算滑动力矩 M_T，由滑动岩土体 *ABCD* 的自重在滑动方向上的分力产生。

（2）计算抗滑力矩 M_R，由滑动面 *AD* 上的摩擦力和黏聚力方向上的分力产生。

（3）确定岩土坡体稳定安全系数 K，K = 抗滑力矩/滑动力矩 = M_R/M_T。

由于上述滑动面 *AD* 是任意选定的，不一定是最危险的真正滑动面。所以通过试算法，找出安全系数最小值 $K_{\min}$ 的滑动面，才是真正的滑动面。为此，取一系列圆心 O_1，O_2，O_3…和相应的半径 R_1，R_2，R_3…可计算出各自的安全系数 K_1，K_2，K_3…取其中最小的 $K_{\min}$ 对应的圆弧作为最危险的滑动面。

以极限平衡理论为基础的很多方法都采用条分法。采用条分法先对整个滑动体进行分块，然后假定条块发生位移是按刚体运动，对每个条块进行受力分析，利用合力为零和合力矩为零进行联合求解。求出在极限平衡状态下的岩土体安全系数，并通过一系列方法确定最危险滑裂面位置和最小安全系数。瑞典法条分法假定圆弧滑动面条块间没有相互作用力，其受力分析如图 9－34 所示，边坡稳定系数的计算公式为式（9－24）。毕肖普法条分法假定滑动面为圆弧面，并考虑了条块间侧面的作用力，其受力分析如图 9－35 所示，边坡稳定系数的计算公式为式（9－25）。

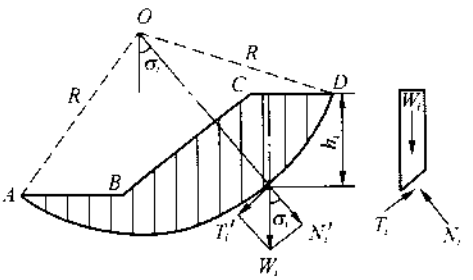


图 9－34　瑞典法条分法

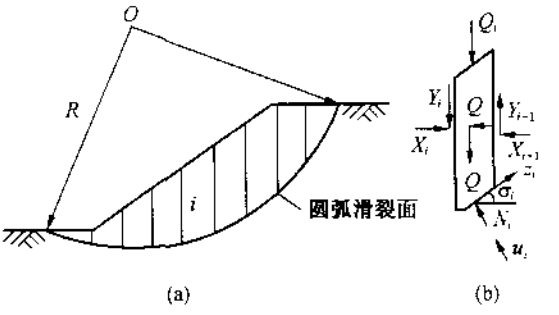


图 9－35　毕肖普法条分法

$$K = \frac{\sum (C_i l_i + W_i \cos\alpha_i \tan\varphi_i)}{\sum W_i \sin\alpha_i} \tag{9-24}$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_{\alpha i}} (W_i \tan\varphi_i + C_i l_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i \sin\alpha_i} \tag{9-25}$$

其中

$$m_{\alpha i}=\cos\alpha_i+\frac{1}{K}\tan\varphi_i\sin\alpha_i$$

3. 任意形状滑动面极限平衡分析[50,51]

在边坡工程中，滑动面的形状一般为曲线或者是不规则形状，Janbu 于 1954 年就提出了基于任意形状滑动面且考虑所有平衡条件的边坡安全系数计算方法即 Janbu 普遍条分法。Janbu 通过假设滑体推力线位置并考虑微分条块的力矩平衡，推导出条块水平推力与竖向剪力的关系，再根据条块的力平衡条件推导出安全系数迭代求解格式。

1）基本假设和受力分析

任意形状滑动面边坡如图 9－36a 所示，划分岩土条后，假定条间力合力作用点位置为已知，这样就减少 $n-1$ 个未知量。分析表明，条间力作用点的位置对岩土坡体稳定安全系数影响不大，一般可假定其作用于岩土条底面以上 1/3 高度处，这些作用点的连线称为推力线。取任一土条，其上作用力如图 9－36b 所示，图中 h_{ti} 为条间力作用点的位置，α_{ti} 为推力线与水平线的夹角，这些都是已知量。

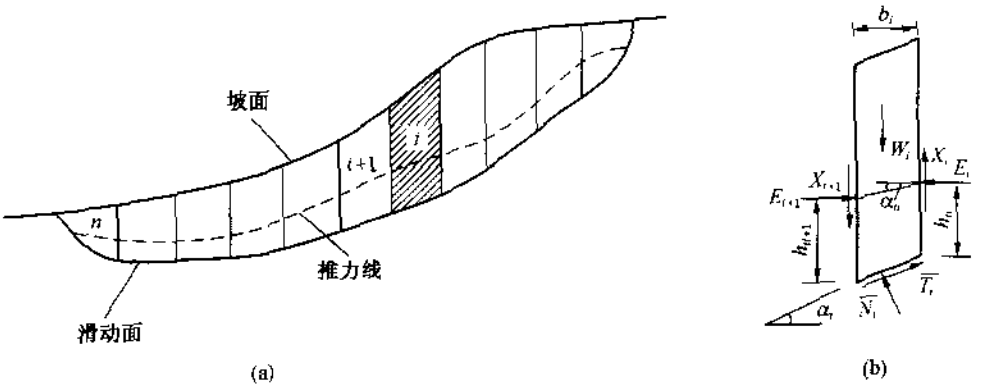


图 9－36　任意形状滑动面坡体受力分析图

2）Janbu 法计算公式

对每一土条取竖直方向力的平衡，有

$$\overline{N}_i\cos\alpha_i=W_i+\Delta X_i-\overline{T}_i\sin\alpha_i \tag{9-26}$$

再取水平方向的平衡，得

$$\Delta E_i=\overline{N}_i\sin\alpha_i-\overline{T}_i\cos\alpha_i \tag{9-27}$$

将式（9－26）代入式（9－27）得

$$\Delta E_i=(W_i+\Delta X_i)\tan\alpha_i-\overline{T}_i\sec\alpha_i \tag{9-28}$$

再对土条 i 底面中点取力矩平衡，并略去高阶微量，得

$$X_ib_i=-E_ib_i\tan\alpha_{ti}+h_{ti}\Delta E_i \tag{9-29}$$

根据边界条件 $\sum\Delta E_i=0$，由式（9－28）可得

$$\sum(W_i+\Delta X_i)\tan\alpha_i-\sum\overline{T}_i\sec\alpha_i=0 \tag{9-30}$$

利用安全系数的定义和莫尔－库仑破坏准则，得

$$\overline{T}_i = \frac{\tau_{fi} l_i}{F_s} = \frac{C_i b_i \sec\alpha_i + \overline{N}_i \tan\varphi_i}{F_s} \tag{9-31}$$

联合求解式（9-26）及式（9-31），得

$$\overline{T}_i = \frac{1}{F_s}[C_i b_i + (W_i + \Delta X_i)\tan\varphi_i] \frac{1}{m_i} \tag{9-32}$$

其中

$$m_i = \cos\alpha_i + \frac{\sin\alpha_i \tan\varphi_i}{F_s}$$

再以式（9-32）代入式（9-30），得 Janbu 法安全系数计算公式

$$F_s = \frac{\sum [C_i b_i + (W_i + \Delta X_i)\tan\varphi_i] \dfrac{1}{\cos\alpha_i m_i}}{\sum (W_i + \Delta X_i)\tan\alpha_i} \tag{9-33}$$

3）Janbu 法计算迭代步骤

Janbu 法计算过程中，同时计算出安全系数，侧向条间力 X_i 和 E_i 需要用迭代法。求解步骤如下：

（1）假设 $\Delta X_i = 0$，相当于简化的毕肖普法，用式（9-33）计算安全系数。这时需要对 F_s 进行迭代。先假定 $F_s = 1$，算出 m_i，代入式（9-33）算出 F_s，与假定值比较，如相差较大，则由新的 F_s 值求出 m_i 再算 F_s，如此逐步逼近求出 F_s 的第一次近似值，并用这个 F_s 代入式（9-32）算出每一土条的 $\overline{T}_i$。

（2）用此 $\overline{T}_i$ 值代入式（9-28），求出每一土条的 ΔE_i，从而求出每一土条侧面的 E_i，再由式（9-29）求出每一土条侧面的 X_i，并求出 ΔX_i 的值。

（3）用新求出的 ΔX_i 重复步骤（1），求出 F_s 的第二次近似值，并以此重新算出每一土条的 $\overline{T}_i$。

（4）再重复步骤（2）、（3），直到 F_s 收敛于给定的容许误差值以内。

9.3.2 边坡最危险滑动面的遗传进化算法

1. 目标函数的表达

目标函数即边坡稳定安全系数公式，根据采用的方法不同，目标函数的具体表达形式有所不同。文献［37-39］给出了任意几何形状滑动面的优化目标函数。为了研究的方便，大多数采用遗传算法搜索最优滑动面的目标函数是基于圆弧滑动的假设[47]，圆弧滑动竖向条分法的目标函数表达形式为

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (C_i l_i + \gamma_i h_i b_i \cos\alpha_i \tan\varphi_i)}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i b_i \sin\alpha_i} \tag{9-34}$$

式中 γ_i——坡体重力密度，kN/m^3；

b_i，h_i——土条的宽度和高度，m；

l_i——第 i 土条滑动面的弧长，m；

C_i，φ_i——滑动面上的黏聚力和内摩擦角；

n——分条数；

α_i——第 i 条滑动面的法线与竖直线的夹角。

用安全系数的大小表示可行解的适应性，本类问题为寻找最小安全系数，因此 F 值越小，适应性能越好。

2. 编码和初始解种群的确定

在式（9－34）中除了滑动面的弧长 l_i、夹角 α_i 与弧的圆心位置有关，其他均为坡体物性参数，目标函数的变量为圆弧圆心的坐标位置。因此，设圆心 O_i 代表第 i 条染色体，坐标分量 x_i，y_i 为染色体 O_i 的基因。

给定最危险滑弧圆心搜索范围，在此范围内随机、均匀地产生 n 个圆心 $O_i(x_i, y_i)$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，即产生了由 n 个个体组成的初始种群。

3. 选择和复制的操作

计算 O_i 所对应的适应值 $F_i(i=1, 2, \cdots, n)$，按着一定的规则从当代群体中选择适应值高的部分个体，淘汰其余个体，然后保留下的个体根据其适应值大小按概率自我复制，仍保证形成新的 n 个圆心点。

4. 杂交操作

按一定的交叉概率随机选择一定数量的圆心，将每一对圆心坐标的某一个分量进行互换，产生一对新的圆心，从而完成杂交操作。

5. 变异操作

按一定的变异概率随机选取一定数量的圆心，将每个圆心坐标的某个分量通过加上一个随机量来产生新的圆心，从而完成变异操作。

6. 最危险滑动面的确定

对子代群体重复第三步至第五步的操作，直至对最小安全系数 F_i 值满意或达到最大进化代数，则计算结束，由 F_i 所对应的圆心 O_i 确定的滑动面即为最危险滑动面。

9.3.3 工程实例

1. 算例 1[52]

新疆雅满苏铁矿露天采场上盘边坡由矽卡岩和钠质正长岩组成，边坡高 98～120m，坡角 53°。根据现场工程地质调查和室内外岩石物理力学参数测试结果分析，边坡破坏模式属圆弧形滑动，边坡岩体物理力学参数（C、φ、γ、K_C）的统计特性见表 9－5。陈昌富等[52]用遗传进化算法对该矿上盘边坡 S9、S13、S21、S29、S43、S47、S51 剖面的稳定性进行了分析评价，结果见表 9－6，遗传算法计算结果与实际情况相符。

表 9－5 雅满苏铁矿边坡岩体物理力学参数统计特性

岩 性	统计特性	内聚力 C/MPa	内摩擦角 φ/（°）	重力密度 γ/（kN·m^{-3}）	爆破地震系数 K_C
矽卡岩	均值	0.328	37.30	32.70	0.080
	标准差	0.049	3.70	16.00	0.012
钠质正长岩	均值	0.321	36.30	31.10	0.080
	标准差	0.048	3.60	15.00	0.012

表 9-6　雅满苏铁矿上盘边坡可靠性遗传进化优化分析结果

剖面号	坡高 H/m	坡角 α/(°)	圆心坐标/m		安全系数 F_s
			x_c	y_c	
S9	109	53	-42.67	159.17	1.369
S13	113	53	-43.12	161.71	1.346
S21	116	53	-44.38	164.19	1.330
S29	120	53	-46.19	164.45	1.338
S43	98.5	53	-40.47	140.77	1.468
S47	98	53	-39.79	140.12	1.471
S51	99	53	-40.63	141.41	1.460

2. 算例 2[36]

由三层水平向成层岩土体构成的边坡的几何参数如图 9-37 所示，构成边坡的各层岩土体物理力学参数值见表 9-7。分别考虑设防烈度为 7 度和无地震两种情况，文献［36］采用 Bishop 法、瑞典法、陈祖煜法及遗传算法方法对该边坡的临界滑动面进行了搜索，并计算相应的临界安全系数，计算结果见表 9-8。从算例 2 的计算结果可见，遗传算法方法与其他方法的计算结果接近，且总能搜索到临界滑动面及对应的安全系数，说明遗传算法方法是分析边坡稳定性的可靠、有效方法之一。

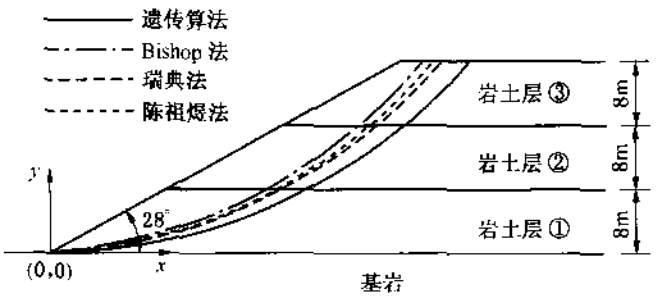


图 9-37　7°地震时边坡临界滑动面图

表 9-7　土层物理力学参数表

层号	厚度/m	重力密度 γ/(kN·m^{-3})	内聚力 C/kPa	内摩擦角 φ/(°)
1	8.0	19	10	27
2	8.0	20	14	26
3	8.0	18	12	28

表9-8 算例2计算结果表

稳定性分析方法	7度地震				无地震			
	滑弧中心坐标/m		滑弧半径/m	安全系数 F_s	滑弧中心坐标/m		滑弧半径/m	安全系数 F_s
	x	y			x	y		
Bishop法	-5.478	70.2011	70.216	1.204	-3.901	66.488	66.614	1.355
瑞典法	-3.933	72.1750	72.282	1.168	-4.720	72.185	72.293	1.321
陈祖煜法	-4.120	70.1460	70.309	1.200	-9.042	75.044	75.611	1.357
遗传算法	-0.553	73.1770	73.125	1.242	-3.470	66.621	66.711	1.367

9.4 挡土墙库仑土压力的遗传算法求解分析

库仑土压力理论是计算挡土结构和基坑支护工程土压力问题的经典基本理论，其力学概念清晰，并且考虑到了地面坡度、墙面倾角以及墙土之间的摩擦阻力等多种影响因素，在工程中应用非常广泛[53]。由于库仑土压力公式复杂、计算繁琐，关于其计算方法的探索研究一直是岩土工程领域中的一个比较活跃的课题。王奎华、阙仁波[54]通过作图，结合几何和物理两方面的关系，得出了一种新的土压力图解法，并对库尔曼图解法进行了改进；李兴高、刘维宁、李小和[55,56]采用极限平衡变分法，对库仑土压力求解进行了研究；兑关锁、左晓宝[57]利用对破裂面斜率求极值的方法，得到了库仑土压力与破裂角的计算公式，并给出了各种等价表达形式；黄健平[58]采用黄金分割法探讨了库仑土压力的求解问题。实际上，可以将计算库仑土压力的问题归结为求解一个目标函数极值的优化问题。本节采用遗传算法对挡土墙库仑土压力进行求解，并将其计算结果与文献中的算例进行比较分析。

9.4.1 挡土墙库仑土压力优化求解的数学模型

库仑土压力理论假设挡土墙是刚性的，在主动和被动极限状态下（本书以求解主动土压力为例），墙后产生的滑动土楔沿墙背和另一个通过墙踵的平面滑动，将滑动土楔体视为刚性体，对填土面和墙背的方向未作假设。主动库仑土压力的确定方法是，考虑挡土墙后整个土体的滑动平衡，在一簇滑裂面中，找出最大土压力值，即为作用在挡土墙上的主动库仑土压力。因此，可将库仑土压力的求解看成一个寻优问题。

1. 无黏性土优化求解数学模型

库仑土压力理论最初是针对砂土而提出的，没有考虑土体的黏性。如图9-38所示，不考虑土体以及土体与墙背之间的黏聚力，以滑动体 ABC 为分析对象，在滑动楔体上作用有自重 W、挡土墙支承力 p 以及滑动面上的反力 R。其中自重 W 数值取决于滑动面的位置；滑动面 BC 上，作用的反力 R 的方向与滑动面的法线 N_1 成 φ 角，R 的数值取决于滑动面的位置；墙背 AB 面上的支承力 p 与墙背法线 N_2 成 δ 角，p 数值也取决于滑动面的位置，此支承力 p 与要求解的土压力 E 大小相等，方向相反。在 W、R、E 三个力作用下滑动楔体处于静止平衡状态，构成一个封闭的力矢量三角形 $\triangle abc$，如图9-39所示。

当挡土墙和土体的情况都已确定时，滑动角 θ 为基本变量，θ 发生变化时，E 随之发生相应的变化。当 $\theta=\varphi$ 时，R 和 W 的作用线重合，$E=0$；当 $\theta=90°+\alpha$ 时，滑动面 BC 与墙背

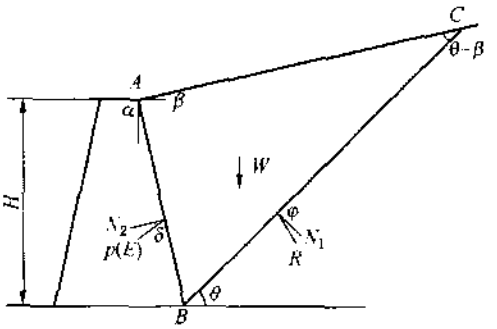


图 9-38 挡墙与无黏性滑动土体

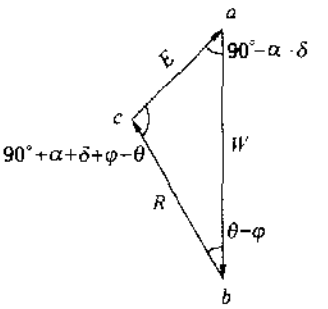


图 9-39 无黏性滑动土体力矢图

AB 重合，$E=0$。当假想的滑动面在两种极端情形之间变动时，墙背所受的土压力也就在 0 与某个极大值之间变动。根据正弦定理，库仑主动土压力求解的数学模型如下：

自变量 θ 的取值区间为 $[\varphi, 90°+\alpha]$，目标函数为

$$maxE(\theta)=\frac{1}{2}\gamma H^2\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\varphi)}{\cos^2\alpha\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\varphi+90°-\alpha-\delta)} \tag{9-35}$$

式中 α——墙背倾角；

β——填土坡角；

γ——填土重力密度，kN/m^3；

φ——土体内摩擦角；

δ——墙背与填土之间的摩擦角；

θ——滑动面倾角。

2. 黏性土优化求解数学模型

在经典的库仑理论基础上，一些学者建立了黏性土的土压力计算方法[59-61]。文献[60]在考虑滑裂面上黏聚力、填土与墙背接触面黏着力以及填土表面裂缝和超载的影响基础上，应用数学力学方法建立了可直接计算的黏性填土挡墙的主动库仑土压力计算公式。如图 9-40 所示，以 BD 滑动面上的滑动体为分析对象，滑动楔体在自重 W 与挡土墙支承力 p 和滑动面上的反力 R、填土的黏聚力 C 以及墙背接触面的黏结力 C_w 几个力作用下处于静止平衡状态。因此，这几个力构成一个封闭的矢量五边形 $abdgf$，其中 $\Psi=90°-\alpha-\delta$，如图 9-41 所示。根据文献[60]的研究结果，可以建立如下黏性土体的库仑主动土压力求解的数学模型：

自变量 θ 的取值区间为 $[\varphi, 90°+\alpha]$，目标函数为

$$\max E(\theta)=\frac{(W_1+W_2+W_3)\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\theta-\varphi+90°-\alpha-\delta)}-\frac{CH\cos(\alpha-\beta)\cos\varphi+C_wH\sin(\theta-\varphi-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\cos\alpha\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\varphi-\alpha-\delta)} \tag{9-36}$$

其中

$$W_1=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\alpha\sin(\theta-\beta)} \tag{9-37}$$

$$W_2=\gamma z_0H\frac{\cos(\theta-\alpha)\cos\beta}{\cos\alpha\sin(\theta-\beta)} \tag{9-38}$$

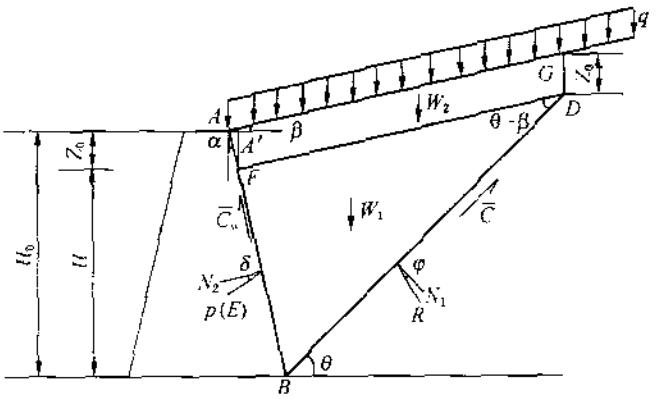


图 9-40　挡墙与黏性滑动土体

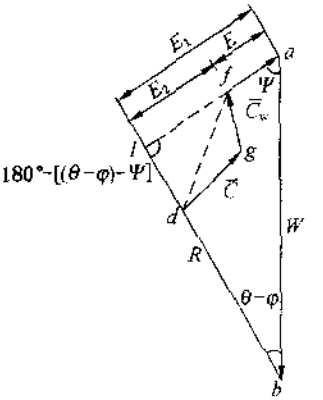


图 9-41　黏性滑动土体力矢图

$$W_3 = qH\frac{\cos(\theta-\alpha)\cos\beta}{\cos\alpha\sin(\theta-\beta)} \tag{9-39}$$

$$z_0 = \frac{2C}{\gamma\sqrt{k_a}} - \frac{q}{\gamma} \tag{9-40}$$

$$H = H_0 - z_0 \tag{9-41}$$

$$k_a = \tan^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{9-42}$$

式中　W_1——未开裂部分土体自重；

W_2——开裂部分土体自重；

W_3——填土表面超载的合力；

q——填土表面的单位集中力；

C——填土的黏聚力；

C_W——填土与墙背间的单位黏着力；

H——未开裂部分墙体的竖直高度；

z_0——开裂部分墙体的竖直高度；

k_a——主动土压力系数；

其他参量的含义同式（9-35）。

9.4.2　挡土墙库仑土压力的遗传算法求解设计

遗传算法求解库仑土压力的实现，可按如下过程进行算法设计：

第一步：采用二进制表达方法对滑动面倾角 θ 进行编码。

第二步：随机初始化 θ 群体，生成 n 个个体 $X(0)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

第三步：对当前群体 $X(t)$ 中每个个体 x_i，按照式（9-33）或式（9-34）计算其土压力值 $E(x_i)$，其值大小即表示了该个体的性能好坏。

第四步：将选择算子作用于群体 $X(t)$。

第五步：对 $X(t)$ 作用交叉算子、变异算子，产生新一代群体 $X(t+1)$。

第六步：$t \to t+1$，如果满足终止条件，则结束程序；否则，继续执行第三步。

9.4.3　算例分析

在算例计算过程中，GA 交叉概率取 0.75，变异概率取 0.05，种群数设定为 20，进

化代数取100，计算精度为0.001，每种情况计算10次，结果取其平均值。

1. 无黏性土算例

挡土墙墙高为H，墙背倾角为α（俯斜），填土坡角为β，填土重力密度为γ，填土内摩擦角为φ，填土与墙背的摩擦角为δ，求解挡土墙的库仑主动土压力。具体的算例参数及计算结果见表9-9，从表9-9计算的5组无黏性土挡土墙的主动土压力的计算结果中可以看出，采用遗传算法求解的结果与经典库仑解析解非常接近，平均误差为1.748%，平均进化代数为15代。

表9-9 库仑主动土压力算例1

序号	α/(°)	β/(°)	δ/(°)	φ/(°)	H/m	γ/(kN·m^{-3})	E_a/(kN·m^{-1})			误差/%
							库仑解	GA解	进化代数	
1	10	30	20	30	4	18	151.3	151.333	11	0.022
2	10	15	20	30	4.5	17.5	85.1	85.115	19	0.018
3	10	25	10	30	5	17	132.18	132.102	17	-0.059
4	0	0	20	30	6	18.5	103.0	99.006	18	-3.878
5	10	10	20	30	6	18.5	153.0	145.713	10	-4.763

2. 黏性土算例

某挡土墙墙高$H=10$m，填土重力密度$\gamma=18.6$kN/m^3，填土内摩擦角为$\varphi=24°$，填土表面无载荷作用$q=0$，当墙背倾角α（俯斜）、填土坡角β、填土与墙背的摩擦角δ、填土黏聚力C以及填土与墙背间的单位黏着力C_ψ取不同值时，求解挡土墙的库仑主动土压力。具体的算例参数及计算结果见表9-10，从表9-10计算的8组黏性土挡土墙的主动土压力的计算结果中可以看出，采用遗传算法求解的结果与文献［60］的解也非常接近，平均误差为0.017%，平均进化代数为17.125代。

表9-10 库仑主动土压力算例2

序号	α/(°)	β/(°)	δ/(°)	C/kPa	C_ψ/kPa	E_a/(kN·m^{-1})			误差/%
						文献[60]解	GA解	进化代数	
1	0	0	0	0	0	392.2	392.209	9	0.002
2	0	0	0	10	0	273.1	273.076	15	-0.009
3	5	5	5	0	0	433.8	433.828	17	0.006
4	5	5	15	0	0	414.3	414.310	18	-0.002
5	5	10	10	10	0	328.4	328.329	15	-0.022
6	5	10	10	10	5	310.4	310.367	19	-0.011
7	5	10	10	10	10	293.5	293.267	21	-0.079
8	10	10	15	10	0	368.8	368.816	23	0.004

参 考 文 献

[1] 王小平、曹立明．遗传算法理论、应用及软件实现［M］．西安：西安交通大学出版社，2002：5－35.

[2] 陈国良，王煦法，等．遗传算法及其应用［M］．北京：人民邮电出版社，1996：32－35.

[3] 周明，孙树栋．遗传算法原理及应用［M］．北京：国防工业出版社，1999：4－64.

[4] 谭浩强．C 程序设计［M］．北京：清华大学出版社，1997.

[5] 胡海生，李升亮．Visual C＋＋6.0 编程［M］．北京：清华大学出版社，2003.

[6] 中国 IT 培训工程编委会．Visual C＋＋6.0 教程［M］．珠海：珠海出版社，2004.

[7] 徐晓刚，高兆法，王秀娟，等．Visual C＋＋入门与提高［M］．北京：清华大学出版社，2003.

[8] 李军，边肇祺，等．用于最优化的计算智能［M］．北京：清华大学出版社，1999：6－13.

[9] 粟塔山、彭维杰，周作益，等．最优化计算原理与算法程序设计［M］．长砂：国防科技大学出版社，2001：71－78.

[10] 李立新，石程云．岩土工程位移反分析方法综述［J］．沈阳建筑工程学院学报，1996，12（3）：354－358.

[11] 高延法，张庆松．矿山岩体力学［M］．徐州：中国矿业大学出版社，2000：114－118.

[12] 王芝银，杨志法，王思敬．岩石力学位移反演分析回顾及进展［J］．力学进展，1998，28（4）：488－498.

[13] 杨志法，刘竹华．位移反分析法在地下工程设计中的初步应用［J］．地下工程，1981（2）：15－24.

[14] 刘怀恒．地下工程位移反分析原理及其进展［J］．西安矿业学院学报，1988，8（3）：18－28.

[15] 李世煇，等．隧道支护设计新论［M］．北京：科学出版社，1999：159－173.

[16] 朱护国，孙晓立．模拟退火法在路面结构模量反算中的应用［J］．中外公路，2002，22（3）：22－24.

[17] 邵黎霞，戴文琰．人工神经网络方法在力学反问题研究中的应用［J］．宁波高等专科学校学报，2000，12（4）：41－44.

[18] 周宝生，朱维申．巷道围岩参数的人工神经网络预测［J］．岩土力学，1999，20（1）：22－25.

[19] 高玮，郑颖人．基于遗传算法的岩土本构模型辨识［J］．岩石力学与工程学报，2002，21（1）：9－12.

[20] 王登刚，刘迎曦，李守巨．岩土工程位移反分析的遗传算法［J］．岩石力学与工程学报，2000，19（增）：979－982.

[21] 刘世君，徐卫亚，王春红，等．遗传算法的改进及其在岩体位移反分析中的应用［J］．电力勘测，2002（2）：10－13.

[22] 高玮，郑颖人．岩体参数的进化反演［J］．水利学报，2000（8）：1－5.

[23] 蔡美峰，何满朝，刘东燕．岩石力学与工程［M］．北京：科学出版社，2002：145－170.

[24] 黄光远，刘维倩，刘小军．反问题及计算力学［J］．计算结构力学及其应用，1993，10（3）：302－306.

[25] 周维垣．高等岩石力学［M］．北京：水利电力出版社，1990：23－60.

[26] 吴立军．宏观尺度位移反演分析研究及其多尺度问题探讨［D］．大连理工大学博士学位论文，2002.

[27] 徐千成，白洪才，郑颖人，等．地下工程支护结构［M］．北京：中国水利水电出版社，2002：1－8.

[28] 高玮，郑颖人．岩土力学反分析及其集成智能研究［J］．岩土力学，2001，22（1）：114－120.
[29] 王芝银，李云鹏．地下工程位移反分析法及程序［M］．西安：陕西科学技术出版社，1993：120－145.
[30] 肖富国．开采沉陷反分析的遗传算法及其在水口山矿务局铅锌矿的应用［D］．中南大学硕士学位论文，2002.
[31] 丁德馨，张志军，孙钧．弹塑性位移反分析的遗传算法研究［J］．工程力学，2003，20（6）：1－5.
[32] 李守巨，刘迎曦，王登刚．基于遗传算法的岩体初始应力场反演［J］．煤炭学报，2000，26（1）：13－17.
[33] 红伟，冯紫良，田玉静，等．岩石粘弹塑性时效模型的遗传算法多参数辨识［J］．岩石力学与工程学报，2002，21（增2）：2527－2531.
[34] 丁德馨．弹塑性位移反分析的智能化方法及其在地下工程中的应用［M］．上海：同济大学，2000.
[35] 赵同彬，谭云亮，张玉明，等．巷道工程位移反分析的可反演性评价研究［J］．采矿与安全工程学报，2006，23（2）：224－227.
[36] 陈昌富，杨宇，龚晓南．基于遗传算法地震荷载作用下边坡稳定性分析水平条分法［J］．岩石力学与工程学报，2003，22（11）：1919－1923.
[37] 万文，曹平，冯涛．加速混合遗传算法在搜索边坡最危险滑动面中的应用［J］．岩石力学与工程学报，2006，25（增1）：2770－2775.
[38] 李亮，迟世春，林皋．引入和声策略的遗传算法在土坡非圆临界滑动面求解中的应用［J］．水利学报，2005，36（8）：913－918.
[39] 王成华，夏绪勇，李广信．基于应力场的土坡临界滑动面的遗传算法搜索［J］．清华大学学报（自然科学版），2004，44（3）：425－428.
[40] 殷宗泽，郭志平，徐鸿江，等．条分法土坡稳定分析计算程序（SLP）［C］//姜宏道，赵光恒，向大润，等．水工结构工程与岩土工程的现代计算方法及程序．南京：河海大学出版社，1992：343－351.
[41] 陈祖煜，邵长明．最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用［J］．岩土工程学报，1988，10（4）：1－13.
[42] 江见鲸，等．土建工程常用微机程序汇编［M］．北京：水利电力出版社，1987.
[43] Yang H Huang. 土坡稳定分析［M］．包承纲，等译．北京：清华大学出版社，1988：117－126.
[44] 黄雅虹，甘卫军．土坡最危险滑裂面的随机搜索和稳定性分析［J］．内陆地震，1992，6（1）：8－12.
[45] 李守巨，刘迎曦．基于模拟退火算法的边坡最小安全系数全局搜索方法［J］．岩石力学与工程学报，2003，22（2）：236－240.
[46] 甘卫军，黄雅虹．黄土斜坡最危险滑裂面的遗传算法确定及稳定性分析［J］．工程地质学报，1999，7（2）：168－174.
[47] 肖专文，张奇志，梁力，等．遗传进化算法在边坡稳定性分析中的应用［J］．岩土工程学报，1998，20（1）：44－46.
[48] 郑颖人，赵尚毅，时卫民，等．边坡稳定分析的一些进展［J］．地下空间，2001，21（4）：262－271.
[49] 时卫民，郑颖人，张鲁渝，等．滑移面为直线假设下的斜坡稳定分析［J］．公路交通技术，2001，（3）：1－3.
[50] 曾纪杰．一种改进的Janbu法［J］．湖南理工学院学报（自然科学版），2005，18（2）：60－62.
[51] 卢廷浩．土力学［M］．南京：河海大学出版社，2005.

[52] 陈昌富，王贻荪，尚守平．开挖边坡可靠性分析遗传进化调优算法及其应用［J］．矿冶工程，1999，19（3）：16－18.
[53] Wei Rulong. Application of Coulomb's theory to cohesive soil［J］．岩土工程学报，1998，20（3）：80－84.
[54] 王奎华，阙仁波．改进的库尔曼图解法及其在土压力计算中的应用［J］．岩土工程学报，2003，25（2）：167－169.
[55] 李兴高，刘维宁．Coulomb 土压力理论的两种解法［J］．岩土力学，2006，27（6）：981－985.
[56] 李小和，李兴高．库仑土压力的变分法研究［J］．工程地质学报，2006，14（1）：78－82.
[57] 兑关锁，左晓宝．库仑土压力与破裂角公式的各种等价形式［J］．南京理工大学学报，1999，23（3）：270－272.
[58] 黄健平．用优化法计算库仑土压力［J］．路基工程，2006（4）：26－27.
[59] 陈希哲．土力学地基基础［M］．北京：清华大学出版社，2004.
[60] 卢廷浩．考虑黏聚力及墙背黏着力的主动土压力公式［J］．岩土力学，2002，23（4）：470－473.
[61] 胡晓军．黏性土主动土压力库仑精确解的改进［J］．岩土工程学报，2006，28（8）：1049－1052.

图书在版编目（CIP）数据

岩石非线性动力学初论／谭云亮，刘传孝，赵同彬著．北京：煤炭工业出版社，2008.3

ISBN 978－7－5020－3243－2

Ⅰ．岩… Ⅱ．①谭…②刘…③赵… Ⅲ．岩石力学：非线性力学：动力学－研究 Ⅳ．TU45

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 192838 号

煤炭工业出版社 出版
（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）
网址：www.cciph.com.cn
北京盛兰兄弟印刷装订有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 24
字数 570 千字 印数 1—2,000
2008 年 3 月第 1 版 2008 年 3 月第 1 次印刷
社内编号 6044 定价 65.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，本社负责调换

责任编辑：郑发科　罗秀全
梁晓平　赵　冰　潘星泉
封面设计：王　滨

YANSHIFEIXIANXING
DONGLIXUECHULUN

岩石非线性动力学初论

ISBN 978-7-5020-3243-2
9 787502 032432 >
定价：65.00 元